Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №1, с. 35–49 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Е.А. МАЗЕПА, Д.К. РЯБОШЛЫКОВА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Аннотация. В работе изучается поведение ограниченных решений неоднородного уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях при вариации правой части уравнения. Различные задачи для однородных эллиптических уравнений, в частности уравнения Лапласа–Бельтрами и стационарного уравнения Шрёдингера, рассматривались рядом российских и зарубежных авторов начиная со второй половины XX-го века. В первой части данной работы будет развит подход к постановке краевых задач, основанный на введении классов эквивалентных функций, установлена взаимосвязь разрешимости краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии при вариации неоднородности. Во второй части работы, основываясь на результатах первой части, исследуются свойства решений неоднородного уравнения Шрёдингера на квазимодельных многообразиях, а также найдены точные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле и некоторых других краевых задач на данных многообразиях.

Ключевые слова: неоднородное уравнение Шрёдингера, краевая задача, квазимодельное риманово многообразие.

УДК: 517.95

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-1-35-49

Введение

Истоки проблематики, заявленной в теме статьи, восходят к классификационной теории некомпактных двумерных римановых поверхностей, основанной на изучении некоторых функциональных классов на поверхностях. Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического типа является выполнение на них теоремы Лиувилля, которая утверждает, что всякая положительная супергармоническая функция на такой поверхности является тождественной постоянной. В противном случае двумерную риманову поверхность относят к гиперболическому типу. Позже данная классификация была распространена на некомпактные римановы многообразия произвольной размерности.

Данное направление нашло свое развитие в работах таких российских и зарубежных математиков, как М. Андерсон, А.А. Григорьян, С.А. Корольков, А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа, В.М. Миклюков, Н.С. Надирашвили, Д. Сулливан, В.Г. Ткачев и ряда других авторов. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из работы А.А. Григорьяна [1].

Поступила в редакцию 29.12.2022, после доработки 05.05.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

В настоящее время выделяют три основных направления развития данной тематики. К первому направлению относят проблему нахождения условий выполнения теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность некоторых функциональных пространств решений эллиптических уравнений на многообразии. А именно, пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено (A, L)-лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A, является тождественной постоянной. В случае, когда A является линейным пространством, а L — линейным оператором, часто оценивают размерность пространства решений рассматриваемого уравнения из класса A. Это второе направление. Третье направление развития традиционно связывают с вопросами разрешимости на некомпактном многообразии задачи Дирихле о восстановлении решения уравнения $Lu = 0$ по граничным данным на "бесконечности" и других краевых задач.

Однако, можно заметить, что сама постановка задачи Дирихле на некомпактных многообразиях может оказаться проблематичной. Один из возможных подходов решения данной проблемы является использование "границы Мартина" (см., например, [2]). Другой подход к постановке краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях основан на введении классов эквивалентных на многообразии функций (см., например, [3]–[5]).

В некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это также как и при постановке классической задачи Дирихле в ограниченных областях R^n (третий подход). Так, например, М. Андерсон [6] и Д. Сулливан [7] показали, что для односвязного риманового многообразия отрицательной секционной кривизны, удовлетворяющей условиям

$$-b^2 \leq \mathrm{sect} M \leq -a^2 < 0,$$

существует геометрическая компактификация, добавляющая сферу на бесконечности $S(\infty)$, и на $\overline{M} = M \cup S(\infty)$ для гармонических функций разрешима задача Дирихле для непрерывных граничных данных на $S(\infty)$.

Другим классом некомпактных римановых многообразий, для которых существует естественная геометрическая компактификация, являются сферически-симметричные (или модельные) римановы многообразия, а также некоторые их обобщения. За последние годы был опубликован ряд работ, посвященых изучению поведения решений различных эллиптических уравнений и неравенств на подобных многообразиях (см., например, [8]–[10]). Так, А.Г. Лосевым и Е.А. Мазепой в работе [8] были найдены условия разрешимости задачи Дирихле для ограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где *c(x)* — гладкая неотрицательная функция, на многообразиях с квазимодельными концами. Более подробно данные многообразия будут описаны ниже.

Все описанные выше результаты касались решений линейных однородных уравнений на некомпактных многообразиях без края или с компактным краем. Естественно, возникает вопрос о разрешимости краевых задач для неоднородных линейных эллиптических уравнений на таких многообразиях. В последние годы появилось достаточно большое количество работ (см., например, [11]–[17]), посвященных исследованию вопросов существования и асимптотического поведения решений уравнения Пуассона и его обобщений на некомпактных римановых многообразиях.

В данной работе изучаются решения неоднородного эллиптического уравнения вида

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = h(x) \tag{2}$$

на некомпактном римановом многообразии M без края. Здесь $c(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ — неотрицательная функция, $h(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ для любого $G \subset\subset M$, $0 < \alpha < 1$. Ясно, что если $h(x) \equiv 0$, то уравнение (2) является стационарным уравнением Шрёдингера, свойства решений которого ранее достаточно подробно были изучены, например, в работах [3]–[5], [8], [9], [18], [19] Поэтому всюду далее будем полагать $h(x) \not\equiv 0$.

Кроме того, в работе будут отдельно рассмотрены ситуации $c(x) \equiv 0$ и $c(x) \not\equiv 0$. Ранее в [20] показано, что локальное изменение коэффициента $c(x)$ не влияет на выполнение или невыполнение на некомпактном римановом многообразии теоремы Лиувилля для уравнения (1). Кроме того, случаи $c(x) \equiv 0$ и $c(x) \not\equiv 0$ в уравнении (1) обслуживаются на многообразии разными лиувиллевыми теоремами. Поэтому в последнем случае считаем, что $c(x)$ имеет некомпактный носитель.

В первой части работы будет развит подход к постановке краевых задач, основанный на введении классов эквивалентных функций. Будет установлена взаимосвязь разрешимости краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии при вариации правой части уравнения (2). Во второй части работы, опираясь на результаты первой части, исследуются вопросы асимптотического поведения решений данного уравнения на квазимодельных многообразиях, будут получены точные условия разрешимости на них некоторых краевых задач.

1. Разрешимость неоднородного уравнения Шрёдингера при вариациях его коэффициентов на некомпактных римановых многообразиях

1.1. **Вводные понятия и определения.** Введем основные понятия и вспомогательные утверждения, доказанные ранее в работах [4], [5], [17]. Пусть $G \subset M$ — некоторое предкомпактное подмножество с достаточно гладкой границей ∂G, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, т. е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств многообразия M таких, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ и $M = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные на M функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M, и использовать обозначение $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(\Omega)} = \sup\limits_{\Omega} |f(x)|$.

Несложно проверить, что отношение «$\overset{M}{\sim}$» не зависит от выбора исчерпания многообразия и разбивает множество всех непрерывных на M функций на классы эквивалентности [4], [5]. Обозначим класс эквивалентных f функций $[f]$.

Будем говорить, что для уравнения (2) на M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что $u \in [f]$.

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей и $B \subset B_k$ для всех k. Будем говорить, что для уравнения (2) на $M\setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$, если для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M\setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Обозначим через v_k решение уравнения (1) в $B_k\setminus B$, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

В [4] показано, что последовательность v_k равномерно ограничена на $M \backslash B$ и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве в $M \backslash B$. Более того, при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и сходится на $M \backslash B$ к решению уравнения (1):

$$v = \lim_{k \to \infty} v_k, \quad 0 < v \leq 1, \quad v|_{\partial B} = 1.$$

Заметим также, что функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. Функцию v будем называть *L-потенциалом компакта B* относительно многообразия M. Для уравнения Лапласа–Бельтрами функция v есть *емкостный потенциал компакта B* относительно многообразия M.

Многообразие M будем называть *L-строгим многообразием*, если соответствующий L-потенциал компакта B удовлетворяет условию $v \in [0]$ (если $L = \Delta$, то многоообразие будем называть Δ-строгим).

Будем называть функцию ω *асимптотически неотрицательной*, если на M существует непрерывная функция $f \geq 0$ такая, что $\omega \overset{M}{\sim} f$.

Лемма 1 ([4]). *Пусть $L\omega \leq 0$ на $M \backslash B$, $\omega|_{\partial B} \geq 0$, ω асимптотически неотрицательна. Тогда $\omega \geq 0$ на $M \backslash B$.*

Следствие 1 ([4]). Пусть $L\omega \leq Lu$ на $M \backslash B$, $\omega|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $\omega \overset{M}{\sim} u$. Тогда $\omega \geq u$ на $M \backslash B$. Если же $L\omega = Lu$ на $M \backslash B$ и $\omega|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $\omega \overset{M}{\sim} u$, то $\omega = u$ на $M \backslash B$.

Лемма 2 ([4]). *Пусть $L\omega \leq 0$ на M, ω асимптотически неотрицательна. Тогда $\omega \geq 0$ на M.*

Следствие 2 ([4]). Пусть $L\omega \leq Lu$ на M и $\omega \overset{M}{\sim} u$. Тогда $\omega \geq u$ на M. Если же $L\omega = Lu$ на M и $\omega \overset{M}{\sim} u$, то $\omega = u$ на M.

Лемма 3 ([5]). *Пусть $G \subset M$ — предкомпактное подмножество на M, функция $u(x) \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$ является решением уравнения (2) на G, где $h \in C_0^0(\overline{G})$, $\Omega := \operatorname{supp}(h)$, $\Omega \subset G$, $c(x) \geq 0$ на $\overline{G}$ и $c(x) \neq 0$ на Ω. Тогда $\sup\limits_{G} |u| \leq \sup\limits_{\partial G} |u| + \sup\limits_{\Omega} \dfrac{|h|}{c(x)}$.*

Теорема 1 ([17]). *Пусть $B \subset M$ — некоторое компактное подмножество такое, что $c(x) > 0$ в некоторой окрестности подмножества B, и на $M \setminus B$ для произвольной константы A разрешима внешняя краевая задача для уравнения (2) с граничными данными $u|_{\partial B} = A$ и $u \in [f]$. Тогда на M также разрешима краевая задача для уравнения (2) с граничными данными из класса $[f]$.*

Теорема 2 ([17]). *Пусть M — L-строгое многообразие и на M разрешима краевая задача для уравнения (2) с граничными данными из класса $[f]$. Тогда на $M \setminus B$ для любой непрерывной функции $\Phi(x) \in C^0(\partial B)$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения (2) с граничными данными $u|_{\partial B} = \Phi(x)$ и $u \in [f]$.*

Замечание 1. Аналогичные результаты справедливы и для уравнения Пуассона, если многообразие M — Δ-строгое многообразие [16]. Результаты для стационарного уравнения Шрёдингера (1) были получены в [4], [5].

1.2. **Основные результаты.** Пусть $h_j(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ для любого предкомпактного подмножества $G \subset M$, $0 < \alpha < 1$, и $h_1(x) \le h(x) \le h_2(x)$, где $h(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ — правая часть уравнения (2), $f(x)$ — произвольная ограниченная непрерывная на M функция.

Теорема 3. *Пусть на M разрешимы краевые задачи для уравнений $Lu = h_1(x)$ и $Lu = h_2(x)$, где $h_1(x) \le h(x) \le h_2(x)$, с граничными условиями из класса $[f]$. Тогда на M разрешима краевая задача для уравнения (2) с граничными условиями из класса $[f]$.*

Доказательство. Обозначим через w_1 и w_2 ограниченные (в силу ограниченности функции f) решения уравнений $Lw_1 = h_1(x)$ и $Lw_2 = h_2(x)$ соответственно такие, что $w_1 \in [f]$, $w_2 \in [f]$. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Рассмотрим в B_k последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\begin{aligned} &Lu_k = h(x) \qquad \text{в} \quad B_k, \\ &u_k|_{\partial B_k} = w_2|_{\partial B_k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим $u_k^* = u_k - w_2$ в B_k. Тогда $Lu_k^* = Lu_k - Lw_2 = h(x) - h_2(x) \le 0$ и $u_k^*|_{\partial B_k} = u_k|_{\partial B_k} - w_2|_{\partial B_k} = 0$. Далее, используя принцип сравнения для решений уравнения Шрёдингера (см., например, [21]), получаем, что $u_k^* \ge 0$ в B_k. Отсюда следует

$$u_k \ge w_2 \qquad \text{в} \quad B_k. \tag{4}$$

Теперь в B_k рассмотрим последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\begin{aligned} &Lv_k = h(x) \qquad \text{в} \quad B_k, \\ &v_k|_{\partial B_k} = w_1|_{\partial B_k}. \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим $v_k^* = v_k - w_1$ в B_k. Тогда $Lv_k^* = Lv_k - Lw_1 = h(x) - h_1(x) \ge 0$ и $v_k^*|_{\partial B_k} = v_k|_{\partial B_k} - w_1|_{\partial B_k} = 0$. Следовательно, $Lv_k^* \ge 0$ в B_k и $v_k^*|_{\partial B_k} = 0$. Далее, применяя принцип сравнения для решений уравнения Шрёдингера, получаем, что $v_k^* \le 0$ в B_k. Отсюда следует

$$v_k \le w_1 \qquad \text{в} \quad B_k. \tag{6}$$

Сравним решения w_1 и w_2. В рамках условий теоремы на M выполнено $Lw_1 = h_1(x)$ и $Lw_2 = h_2(x)$. Далее, учитывая, что $h_1(x) \le h(x) \le h_2(x)$, получаем $Lw_1 \le Lw_2$ на M и $w_1 \overset{M}{\sim} w_2 \overset{M}{\sim} f$. Таким образом, применяя следствие 2, получаем $w_2 \le w_1$ на M.

Теперь сравним решения u_k и v_k. Из (3), (5) следует $Lu_k \ge Lv_k$ в B_k. Учитывая, что $w_2 \le w_1$ на M, имеем $u_k|_{\partial B_k} \le v_k|_{\partial B_k}$. Из принципа сравнения, как и выше, следует

$$u_k \le v_k \qquad \text{в} \quad B_k. \tag{7}$$

Объединяя результаты (4), (6), (7), получаем, что для любого k в B_k выполнены неравенства

$$w_1 \ge v_k \ge u_k \ge w_2. \tag{8}$$

Так как w_1 и w_2 — ограниченные решения соответствующих уравнений на M, то последовательности $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничены на любом предкомпактном подмножестве $G \subset M$. Из равномерной ограниченности последовательностей $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на M следует компактность семейства функций $\{v_k\}$ и $\{u_k\}$ в классе $C^2(G)$ для произвольного предкомпактного подмножества $G \subset M$. В свою очередь, компактность семейства $\{v_k\}$ и $\{u_k\}$ влечет существование предельных функций $\overline{u} = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$ и $\underline{u} = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которые являются решениями уравнений $L\overline{u} = h(x)$ и $L\underline{u} = h(x)$ (см. также [4], [17]).

Переходя к пределу в (8) при $k \to \infty$, на M получаем $w_1 \ge \overline{u} \ge \underline{u} \ge w_2$.

Так как $w_1 \overset{M}{\sim} w_2 \overset{M}{\sim} f$, то $\overline{u} \overset{M}{\sim} \underline{u} \overset{M}{\sim} f$. Таким образом, учитывая следствие 2, имеем $\overline{u} = \underline{u} = u$. Получили, что функция u на M является ограниченным решением уравнения $Lu = h(x)$ таким, что $u \overset{M}{\sim} f$. □

Теорема 4. *Пусть на $M \setminus B$ разрешимы внешние краевые задачи для уравнений $Lu = h_1(x)$ и $Lu = h_2(x)$, где $h_1(x) \le h(x) \le h_2(x)$, с граничными условиями из класса $[f]$. Тогда на $M \setminus B$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения (2) с граничными условиями из класса $[f]$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная на ∂B функция. По теореме 1 из разрешимости внешних краевых задач на $M \setminus B$ для уравнений $Lu = h_1(x)$ и $Lu = h_2(x)$ с граничными условиями из класса f следует разрешимость на M краевых задач для этих уравнений с граничными условиями из того же класса $[f]$. Применяя теорему 3 получаем, что на M разрешима краевая задача для уравнения (2) с граничными условиями из класса $[f]$, т. е. существует u — решение краевой задачи для уравнений $Lu = h(x)$ на M такое, что $u \in [f]$.

Покажем, что многообразие M является L-строгим. Рассмотрим решения u_1 и u_2 следующих краевых задач:

$$Lu_1 = h_1(x) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B, \qquad u_1|_{\partial B} = \Phi(x) + 1, \qquad u_1 \in [f],$$

$$Lu_2 = h_2(x) \quad \text{в} \quad B_k \setminus B, \qquad u_2|_{\partial B} = \Phi(x), \qquad u_2 \in [f].$$

Пусть функция v — L-потенциал компакта B относительно многообразия M, т. е. на $M \setminus B$ выполнено $Lv = 0$, $0 < v \le 1$, $v|_{\partial B} = 1$. Применяя принцип сравнения для решений эллиптических уравнений (см., например, [21]) и учитывая определение функции v, на $M \setminus B$ получаем

$$0 < v \le u_1 - u_2, \qquad v|_{\partial B} = (u_1 - u_2)|_{\partial B} = 1, \qquad u_1 - u_2 \in [0].$$

Следовательно, $v \in [0]$ и многообразие M является L-строгим.

Аналогичным образом можно показать, что многообразие M является Δ-строгим, если уравнение (2) является уравнением Пуассона.

В заключении применяем теорему 2 и получаем разрешимость на M внешней краевой задачи для уравнения (2) с граничными условиями из класса $[f]$. □

2. Краевые задачи для неоднородного уравнения Шрёдингера на квазимодельных римановых многообразиях

2.1. **Вводные понятия и вспомогательные утверждения.** Данный раздел посвящен исследованию вопросов существования и асимптотического поведения решений уравнения (2) на некомпактных римановых многообразиях следующего вида.

Пусть M — полное риманово многообразие без края, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт с гладкой границей, D изометрично произведению $[r_0, +\infty) \times S_1 \times S_2 \ldots \times S_k$ (где $r_0 > 0$, S_i — компактные римановы многообразия без края) и имеет метрику

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2 + \ldots + g_k^2(r)d\theta_k^2.$$

Здесь $g_i(r)$ — положительные, гладкие на $[r_0, \infty)$ функции, а $d\theta_i^2$ — метрика на S_i. Пусть $\dim S_i = n_i$. Ясно, что $\dim M = n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 1$. Всюду в дальнейшем будем считать, что на D выполнено $c(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \equiv c(r)$, $h_1(r) \le h(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) \le h_2(r)$, где $h_1(r)$, $h_2(r) \in C^{0,\alpha}(R_+)$.

При доказательстве будем использовать вид оператора Лапласа–Бельтрами на D в координатах $(r, \theta_1, \dots \theta_k)$:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{g_i'(r)}{g_i(r)}\right] \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{g_i^2(r)} \Delta_i,$$

где Δ_i — внутренний лапласиан на S_i.

Введем обозначения $S(t) = g_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot g_2^{n_k}(t)$,

$$I = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} c(z) S(z) dz \right) dt, \quad I_i = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} \frac{S(z)}{g_i^2(z)} dz \right) dt,$$

$$K = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} dt, \qquad K_h = K + \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} \max\{|h_1(z)|, |h_2(z)|\} S(z) dz \right) dt.$$

$$I_h = I + \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} \max\{|h_1(z)|, |h_2(z)|\} S(z) dz \right) dt,$$

где $r_0 > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Ранее в работах [8], [18] достаточно подробно было изучено асимптотическое поведение решений однородных уравнений (уравнения Лапласа–Бельтрами и стационарного уравнения Шрёдингера) на таких многообразиях и получены следующие результаты.

Теорема 5 ([8], [18]).

1) *Пусть многообразие M таково, что $I < \infty$ (если $c(x) \equiv 0$, то $K < \infty$), $I_1 = \ldots = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1, \dots, k$, $0 \le s \le k$. Тогда для любой непрерывной на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функции $\Phi(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$ на M существует ограниченное решение стационарного уравнения Шрёдингера* (1) *такое, что*

$$\lim_{r \to +\infty} u(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k).$$

2) *Пусть многообразие M таково, что $I < \infty$ (если $c(x) \equiv 0$, то $K < \infty$), $I_1 = \ldots = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1, \dots, k$, $0 \le s \le k$. Тогда для любых непрерывных на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функций $\Phi_1(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$ и $\Phi_2(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$ на $D = M \setminus B$ существует ограниченное решение $u(r, \theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$ стационарного уравнения Шрёдингера* (1) *с граничными условиями*

$$u(r_0, \theta_{s+1}, \dots, \theta_k) = \Phi_1(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k),$$

$$\lim_{r \to +\infty} u(r, \theta_{s+1}, \dots, \theta_k) = \Phi_2(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k).$$

3) *На M выполняется лиувиллево свойство для ограниченных гармонических функций тогда и только тогда, когда $I_i = \infty$ для всех $i = 1, \dots, k$.*

4) *На M выполняется лиувиллево свойство для стационарного уравнения Шрёдингера* (1) *тогда и только тогда, когда $I = \infty$.*

Замечание 2.

а) В пунктах 1) и 2) теоремы в случае $s = k$ множество индексов i, для которых $I_i < \infty$, будет пусто и соответствующие предельные функции $\Phi(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$, $\Phi_1(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$, $\Phi_2(\theta_{s+1}, \dots, \theta_k)$ будут константами.

b) Предельный переход в граничных условиях на "бесконечности" понимается в смысле равномерной сходимости, т. е.

$$\lim_{r\to+\infty} ||u(r,\theta_1,\ldots,\theta_k)-\Phi(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)||_{C^0(M\setminus B(r))}=0,$$

где $B(r)$ — геодезический шар радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке. Таким образом, в терминах первой части работы можем считать, что $u(x)\in[\Phi]$ на M.

Рассмотрим сначала на $D=M\setminus B$ неоднородные уравнения вида

$$Lu=h_j(r), \qquad j=1,2, \tag{9}$$

и введем дополнительные обозначения

$$I_{h_j}=I+\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{S(t)}\left(\int\limits_{r_0}^{t}|h_j(z)|S(z)dz\right)dt, \qquad K_{h_j}=K+\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{S(t)}\left(\int\limits_{r_0}^{t}|h_j(z)|S(z)dz\right)dt.$$

Ясно, что если $I_h<\infty$, то и $I_{h_j}<\infty$, если $K_h<\infty$, то и $K_{h_j}<\infty$.

Докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 4. *Пусть D и правая часть уравнения (9) таковы, что $I_{h_j}<\infty$ (если $c(x)\equiv 0$, то $K_{h_j}<\infty$) и $I_1=\ldots=I_s=\infty, I_i<\infty$ для всех $i=s+1,\ldots,k,\ 0\le s\le k$. Тогда для любых непрерывных на $S_1\times S_2\times\ldots\times S_k$ функций $\Phi_1(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)$ и $\Phi_2(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)$ на D существует единственное ограниченное решение $u(r,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)$ уравнения (9) такое, что*

$$u(r_0,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)=\Phi_1(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k), \qquad \lim_{r\to\infty}u(r,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)=\Phi_2(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k).$$

Доказательство. Решение рассматриваемой краевой задачи будем искать в виде

$$u(r,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)=u_1(r,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)+u_2(r),$$

где $u_1(r,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)$ является решением задачи

$$\begin{array}{l} Lu_1=0,\\ u_1(r_0,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)=\Phi_1(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k),\\ \lim\limits_{r\to\infty}u_1(r,\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)=\Phi_2(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k), \end{array} \tag{10}$$

а $u_2(r)$ — радиально-симметричным решением задачи

$$Lu_2=h_j(r), \quad u_2(r_0)=0, \quad \lim_{r\to\infty}u_2(r)=0. \tag{11}$$

Из условия $I_{h_j}<\infty$ сразу следует выполнение условия $I<\infty$. Тогда, учитывая теорему 5, получаем однозначную разрешимость краевой задачи (10) (см. также [8]).

Обозначим $h_j^+(r)=\max\{h_j(r),0\}$, $h_j^-(r)=\max\{-h_j(r),0\}$. Ясно, что $h_j^+(r)\ge 0$ и $h_j^-(r)\ge 0$. Кроме того, легко показать, что $h_j^+(r),\ h_j^-(r)\in C^{0,\alpha}(R_+)$. Данный факт следует из представлений $h_j^+(r)=\dfrac{|h_j(r)|+h_j(r)}{2}$, $h_j^-(r)=\dfrac{|h_j(r)|-h_j(r)}{2}$ и свойств функций из пространства $C^{0,\alpha}(R_+)$.

Решение задачи (11) будем искать в виде $u_2(r)=u^+(r)-u^-(r)$, где $u^+(r)$ и $u^-(r)$ — решения краевых задач

$$Lu^+=h_j^+(r), \quad u^+(r_0)=0, \quad \lim_{r\to\infty}u^+(r)=0; \tag{12}$$

$$Lu^-=h_j^-(r), \quad u^-(r_0)=0, \quad \lim_{r\to\infty}u^-(r)=0. \tag{13}$$

Учитывая вид оператора Лапласа–Бельтрами на D и условие $c(r,\theta_1,\ldots,\theta_k)\equiv c(r)$, несложно проверить, что функция $u^+(r)$ должна являться решением следующей краевой задачи:

$$(u^+(r))''+\left(n_1\frac{g_1'(r)}{g_1(r)}+\ldots+n_k\frac{g_k'(r)}{g_k(r)}\right)(u^+(r))'-c(r)u^+(r)=h_j^+(r),\;\; u^+(r_0)=0,\;\; \lim_{r\to\infty}u^+(r)=0. \tag{14}$$

Перепишем обыкновенное дифференциальное уравнение из (14) в виде

$$(u^+(r))'(g_1^{n_1}(r)\ldots g_k^{n_k}(r))'=c(r)g_1^{n_1}(r)\ldots g_k^{n_k}(r)u^+(r)+h_j^+(r)g_1^{n_1}(r)\ldots g_k^{n_k}(r).$$

Откуда учитывая обозначения, введенные в начале раздела, получим

$$(u^+(r))'(S(r))'=c(r)S(r)u^+(r)+h_j^+(r)S(r). \tag{15}$$

Проинтегрируем последнее равенство в промежутке $[r_0,r]$:

$$(u^+(r))'=\frac{1}{S(r)}\int\limits_{r_0}^{r}\left(c(t)u^+(t)+h_j^+(t)\right)S(t)dt+\frac{(u^+(r_0))'S(r_0)}{S(r)}. \tag{16}$$

Докажем существование решения краевой задачи (14). Обозначим через $l(r)$ решение уравнения (15) с начальными условиями

$$l(r_0)=0,\quad l'(r_0)=1.$$

Из (16) сразу следует монотонное возрастание функции $l(r)$. Докажем ее ограниченность сверху.

Пусть $l(r)$ монотонно стремится к бесконечности. Тогда можно считать, что $l(r)\geq 1$ для всех $r\geq r_1\geq r_0$. Таким образом, учитывая монотонное возрастание, получим

$$l'(r)\leq\frac{l(r)}{S(r)}\int\limits_{r_0}^{r}c(t)S(t)dt+\frac{l(r)}{S(r)}\int\limits_{r_0}^{r}h_j^+(t)S(t)dt+\frac{l'(r_0)S(r_0)}{S(r)}$$

или в силу начального условия $l'(r_0)=1\leq l(r)$

$$l'(r)\leq\frac{l(r)}{S(r)}\int\limits_{r_0}^{r}c(t)S(t)dt+\frac{l(r)}{S(r)}\int\limits_{r_0}^{r}h_j^+(t)S(t)dt+\frac{l(r)S(r_0)}{S(r)}$$

для всех $r\geq r_1\geq r_0$.

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{l'(r)}{l(r)}\leq\frac{1}{S(r)}\left(\int\limits_{r_0}^{r}(c(t)S(t)+h_j^+(t)S(t))dt+S(r_0)\right)$$

и проинтегрируем на промежутке $r\geq r_1$ это выражение. Получим следующую цепочку неравенств:

$$l(r)\leq l(r_1)\exp\left(\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dt}{S(t)}\int\limits_{r_0}^{t}(c(z)S(z)+h_j^+(z)S(z))dz\right)\exp\left(S(r_0)\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dt}{S(t)}\right)\leq$$

$$\leq l(r_1)\exp\left(\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dt}{S(t)}\int\limits_{r_0}^{t}(c(z)S(z)+|h_j(z)|S(z))dz\right)\exp\left(S(r_0)\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dt}{S(t)}\right).$$

Сходимость интеграла I_{h_j} влечет сходимость интегралов $I < \infty$ и $K < \infty$ (если $c(x) \equiv 0$, то сходимость интеграла K_{h_j} влечет сходимость интеграла $K < \infty$). Из этих условий следует ограниченность функции $l(r)$ и существование предела $\lim\limits_{r\to\infty} l(r) = b$. Кроме того, сходимость интегралов $I < \infty$ и $K < \infty$ влечет существование решения $m(r)$ однородного уравнения (см., например, [8])

$$m''(r) + \left(n_1 \frac{g_1'(r)}{g_1(r)} + \ldots + n_k \frac{g_k'(r)}{g_k(r)}\right) m'(r) - c(r)m(r) = 0$$

такого, что

$$m(r_0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} m(r) = -b.$$

Полагая

$$u^+(r) = l(r) + m(r),$$

получаем решение краевой задачи (14) и, следовательно, краевой задачи (12).

Аналогично доказывается существование решения $u^-(r)$ краевой задачи (13).

Тогда функция

$$u_2(r) = u^+(r) - u^-(r)$$

является решением краевой задачи (11), что доказывает лемму 4. □

Докажем теперь разрешимость задачи Дирихле для уравнения (2) на квазимодельном конце D.

Лемма 5. *Пусть D и правая часть уравнения (2) таковы, что $I_h < \infty$ (если $c(x) \equiv 0$, то $K_h < \infty$), и $I_1 = \ldots = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1, \ldots, k$, $0 \le s \le k$. Тогда для любых непрерывных на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функций $\Phi_1(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ и $\Phi_2(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ на D существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что*

$$u(r_0, \theta_1, \ldots, \theta_k) = \Phi_1(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k), \qquad \lim_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = \Phi_2(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k).$$

Доказательство. Из сходимости интеграла $I_h < \infty$ следует сходимость интегралов $I_{h_1} < \infty$ и $I_{h_2} < \infty$ (если $c(x) \equiv 0$, то из сходимости интеграла $K_h < \infty$, соответственно, получаем сходимость интегралов $K_{h_1} < \infty$ и $K_{h_2} < \infty$). Тогда по лемме 4 для любых непрерывных функций $\Phi_1(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ и $\Phi_2(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ на $D = M \setminus B$ существуют решения u_1 и u_2 краевых задач, соответственно,

$$\begin{aligned}
&Lu_1 = h_1(r),\\
&u_1(r_0, \theta_{s+1}, \ldots, \theta_k) = \Phi_1(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k),\\
&\lim_{r\to\infty} u_1(r, \theta_{s+1}, \ldots, \theta_k) = \Phi_2(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Lu_2 = h_2(r),\\
&u_2(r_0, \theta_{s+1}, \ldots, \theta_k) = \Phi_1(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k),\\
&\lim_{r\to\infty} u_2(r, \theta_{s+1}, \ldots, \theta_k) = \Phi_2(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k).
\end{aligned}$$

В терминах первой части статьи получаем разрешимость следующих внешних краевых задач на $M \setminus B$:

$$Lu_1 = h_1(r), \quad u_1|_{\partial B} = \Phi_1, \quad u_1 \in [\Phi_2];$$

$$Lu_2 = h_2(r), \quad u_2|_{\partial B} = \Phi_1, \quad u_2 \in [\Phi_2].$$

Далее, учитывая выполнение на D неравенства $h_1(r) \le h(x) \le h_2(r)$ и применяя теорему 4, на $M \setminus B$ получаем разрешимость внешней краевой задачи

$$Lu = h(x), \quad u|_{\partial B} = \Phi_1, \quad u \in [\Phi_2].$$

Учитывая замечание 2, получаем существование на $D = M \setminus B$ ограниченного решения $u(x)$ уравнения (2), удовлетворяющего краевым условиям

$$u(r_0, \theta_1, \ldots, \theta_k) = \Phi_1(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k), \qquad \lim_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = \Phi_2(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$$

для произвольных непрерывных на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функций $\Phi_1(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ и $\Phi_2(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$.

Однозначность решения краевой задачи следует из теоремы единственности.

$\square$

2.2. **Основные результаты для случая** $c(x) \not\equiv 0$**.** Пусть $c(x)$ имеет некомпактный носитель на M и $c(x) > 0$ в некоторой окрестности связного компактного подмножества $B \subset M$, ∂B — гладкая граница.

Теорема 6. *Пусть риманово многообразие M и правая часть уравнения (2) таковы, что $I_h < \infty$, $I_1 = \ldots = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1, \ldots, k,\ 0 \le s \le k$. Тогда для любой непрерывной на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функции $\Phi(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ на M существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что на D выполнено*

$$\lim_{r\to+\infty} u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k).$$

Доказательство. Точно также, как в приведенном выше доказательстве леммы 4, учитывая условия 1) и 2) теоремы 5, достаточно показать разрешимость краевой задачи

$$Lu = h(x), \quad \lim_{r\to\infty} u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = 0. \tag{17}$$

Из леммы 5 следует существование решения $u_0(r, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ уравнения (2) такого, что

$$u_0(r_0, \theta_1, \ldots, \theta_k) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u_0(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = 0.$$

Обозначим через B'' окрестность компакта B, где $c(x) > 0$. Рассмотрим функцию $U_0 \in C^{2,\alpha}(M)$ такую, что $U_0 = u_0$ вне B'', $U_0 = 0$ на некотором подмножестве $B' \subset\subset B$. Ясно, что $LU_0 = h_0(x)$ на M, где $h_0(x) \in C^\alpha(M)$ удовлетворяет следующим условиям: $h_0(x) = 0$ на B', $h_0(x) \equiv h(x)$ вне B'', $h_0(x) \not\equiv h(x)$ на $B'' \setminus B'$.

Пусть, как и ранее, $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами. Рассмотрим теперь последовательность функций φ_k, которая является решением следующей задачи:

$$L\varphi_k = h(x) \qquad \text{в} \quad B_k, \ \ \varphi_k\,|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$$

и последовательность функций $\psi_k = \varphi_k - U_0$. Ясно, что ψ_k — решения задачи

$$L\psi_k = h(x) - h_0(x) \qquad \text{в} \quad B_k, \ \ \psi_k\,|_{\partial B_k} = 0,$$

где функция $h(x) - h_0(x) \in C^\alpha(M)$ и удовлетворяет следующим условиям: $h(x) - h_0(x) = h(x)$ на компактном множестве B', $h(x) - h_0(x) = 0$ вне окрестности компакта B''. Таким образом, $\Omega := \operatorname{supp}\{h(x) - h_0(x)\}$ — компакт и $\Omega \subset B''$.

По лемме 3 для всех k и $x \in B_k$ получаем

$$|\psi_k| \le \sup_{B_k} |\psi_k| \le \sup_{\partial B_k} |\psi_k| + \sup_{\Omega} \frac{|h(x) - h_0(x)|}{c(x)} = \sup_{\Omega} \frac{|h(x) - h_0(x)|}{c(x)}.$$

Отсюда следует, что семейство функций $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ равномерно ограничено на M.

Последнее условие, как и выше, дает компактность семейства функций $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ в классе $C^2(G)$ для произвольного предкомпактного подмножества $G \subset M$, что, в свою очередь, влечет существование предельной функции $\psi = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$, которая является решением уравнения $L\psi = h(x) - h_0(x)$ на M. Далее, из существования функции $\psi = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k$ следует существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$, которая является решением уравнения (2) на M.

Для завершения доказательства теоремы необходимо показать выполнение краевого условия

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0.$$

Обозначим

$$A = \max_{S_1\times S_2\times\ldots\times S_k} |u(r_0,\theta_1,\ldots,\theta_k)|.$$

Из существования предела $\{\varphi_k\}$ следует, что для достаточно больших k выполнено

$$-(A+1) < \varphi_k|_{\partial B} < A+1.$$

Очевидно,

$$-(A+1) < u_0|_{\partial B} = u_0(r_0,\theta_1,\ldots,\theta_k) < A+1.$$

Из леммы 5 следует существование на D решений следующих краевых задач:

$$\begin{array}{l} Lu_1 = h(r,\theta_1,\ldots,\theta_k),\\ u_1(r_0,\theta_1,\ldots,\theta_k) = -(A+1),\\ \lim\limits_{r\to\infty} u_1(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Lu_2 = h(r,\theta_1,\ldots,\theta_k),\\ u_2(r_0,\theta_1,\ldots,\theta_k) = A+1,\\ \lim\limits_{r\to\infty} u_2(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0. \end{array}$$

По теореме сравнения для решений линейных эллиптических уравнений (см., например, [21]) на D получаем справедливость неравенств $u_1 \le u_0 \le u_2$, $u_1 \le \varphi_k \le u_2$ для достаточно больших k на $B_k \setminus B$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве на D имеем $u_1 \le u \le u_2$. Учитывая асимптотическое поведение функций u_1 и u_2, получаем

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0.$$

Для завершения доказательства заметим, что по теореме 5 в условиях данной теоремы на M существует ограниченное решение с заданным асимптотическим поведением для стационарного уравнения Шрёдингера (1). Это решение в сумме с решением $u(x)$ задачи (17) дает искомое решение краевой задачи и завершает доказательство теоремы. $\square$

2.3. **Основные результаты для случая $c(x)\equiv 0$.** В данном разделе покажем справедливость теоремы 6 для уравнения (2) при $c(x)\equiv 0$ на квазимодельном многообразии M.

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = h(x), \tag{18}$$

где, как и ранее, $h(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ для любого предкомпактного подмножества $G\subset M$, $0<\alpha<1$.

Теорема 7. *Пусть риманово многообразие M и правая часть уравнения (18) таковы, что $K_h<\infty$, $I_1 = \ldots = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1,\ldots,k,\ 0\le s\le k$. Тогда для любой непрерывной на $S_1\times S_2\times\ldots\times S_k$ функции $\Phi(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k)$ на M существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (18) такое, что на D выполнено*

$$\lim_{r\to+\infty} u(r,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = \Phi(\theta_{s+1},\ldots,\theta_k).$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6, учитывая условия 1), 2) теоремы 5, достаточно показать разрешимость краевой задачи

$$\Delta u = h(x), \quad \lim_{r\to\infty} u(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0. \tag{19}$$

Из леммы 5 следует существование решения $u_0(r,\theta_1,\ldots,\theta_k)$ уравнения (18) такого, что что

$$u_0(r_0,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u_0(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0.$$

Обозначим через B'' некоторую окрестность компакта B и рассмотрим функцию $U_0 \in C^{2,\alpha}(M)$ такую, что $U_0 = u_0$ вне B'', $U_0 = 0$ на некотором подмножестве $B' \subset\subset B$. Ясно, что $\Delta U_0 = h_0(x)$ на M, где $h_0(x) \in C^\alpha(M)$ удовлетворяет следующим условиям: $h_0(x) = 0$ на B', $h_0(x) \equiv h(x)$ вне B'', $h_0(x) \not\equiv h(x)$ на $B'' \setminus B'$.

Рассмотрим теперь последовательность функций φ_k, которая является решением следующей задачи

$$\Delta\varphi_k = h(x) \qquad \text{в} \quad B_k, \ \ \varphi_k\mid_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k},$$

и последовательность функций $\psi_k = \varphi_k - U_0$. Ясно, что ψ_k — решения задачи

$$\Delta\psi_k = h(x) - h_0(x) \qquad \text{в} \quad B_k, \ \ \psi_k\mid_{\partial B_k} = 0,$$

где функция $h(x) - h_0(x) \in C^\alpha(M)$ и удовлетворяет следующим условиям: $h(x) - h_0(x) = h(x)$ на компактном множестве B', $h(x) - h_0(x) = 0$ вне окрестности компакта B''. Таким образом, $\Omega := \operatorname{supp}\{h(x) - h_0(x)\}$ — компакт и $\Omega \subset B''$.

Пусть $G_k(x,y)$ — функция Грина подмножества B_k, т. е. функция, которая в каждой точке $y \in B_k$ удовлетворяет условиям

$$\Delta_x G_k(x,y) = -\delta_y(x), \qquad G_k(x,y)\mid_{x\in\partial B_k} = 0,$$

где $\delta_y(x)$ — δ-функция Дирака.

Следовательно, по формуле Грина имеем

$$\psi_k(x) = \int\limits_{B_k} G_k(x,y)(h(y) - h_0(y))dy.$$

Заметим также, что условие теоремы влечет существование нетривиального емкостного потенциала многообразия M, и, следовательно, непараболичность многообразия M, что равносильно существованию на многообразии M конечной предельной функции Грина $G(x,y) = \lim\limits_{k\to\infty} G_k(x,y)$ (см., например, [20]). Из существования предельной функции Грина на M следует существование предела последовательности $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k = \psi$. Тогда $\Delta\psi = h(x) - h_0(x)$ на M.

Существование функции $\psi = \lim\limits_{k\to\infty}\psi_k$ влечет существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k$, которая является решением уравнения Пуассона (18) на M.

Далее, дословно повторяя доказательство теоремы 6, необходимо показать выполнение краевого условия

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0.$$

Для завершения доказательства, как и в теореме 6, достаточно заметить, что в условиях данной теоремы и теоремы 5 на M существует ограниченное решение с заданным асимптотическим поведением для однородного уравнения (1) при $c(x) \equiv 0$. Это решение в сумме с решением $u(x)$ задачи (19) дает искомое решение краевой задачи и завершает доказательство. □

Замечание 3. Результат теорем 6 и 7 может быть получен непосредственно как прямое следствие из леммы 5, теоремы 1 и замечания 1, если перейти к терминологии первой части.

Литература

[1] Grigor'yan A. *Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (2), 135–249 (1999).

[2] Ancona A. *Negative curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary*, Ann. Math. **125** (3), 495–536 (1987).

[3] Корольков С.А. *О разрешимости краевых задач для стационарного уравннеия Шрёдинегра в неограниченных областях римановых многообразий*, Дифференц. уравнения **51** (6), 726–732 (2015).

[4] Мазепа Е.А. *Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях*, Сиб. матем. журн. **43** (3), 591–599 (2002).

[5] Losev A.G., Mazepa E.A., Chebanenko V.Y. *Unbounded solutions of the Stationary Shrödinger equation on Riemannian manifolds*, Comput. Methods and Funct. Theory **3** (2), 443–451 (2003).

[6] Anderson M.T. *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom. **18** (4), 701–721 (1983).

[7] Sullivan D. *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold*, J. Diff. Geom. **18** (4), 723–732 (1983).

[8] Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях*, Алгебра и анализ **13** (1), 84–110 (2001).

[9] Лосев А.Г., Филатов В.В. *Ограниченные решения стационарного уравнения Шрёдингера с конечным интегралом энергии на модельных многообразиях*, Матем. физ. и компьют. моделирование **24** (3), 5–17 (2021).

[10] Murata M. *Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds*, Potential Theory (Proc. Intern. Conf., Nagoya/Japan, 1992).

[11] Ni L., Shi Y., Tam L-F. *Poisson equation, Poincare–Lelong equation and the curvature decay on complete Kahler manifolds*, J. Diff. Geom. **57**, 339–388 (2001).

[12] Grigor'yan A., Verbitsky I. *Pointwise estimates of solutions to semilinear elliptic equations and inequalities*, J. d'Analyse Mathématique **137** (2), 559–601 (2019).

[13] Munteanu O., Sesum N. *The Poisson equation on complete manifolds with positive spectrum and applications*, Adv. Math. **223** (1), 198–219 (2010).

[14] Mastrolia P., Monticelly D.D., Punzo F. *Elliptic and parabolic equations with Dirichlet conditions at infinity on Riemannian manifolds*, Adv. Diff. Equat. **23** (1/2), 89–108 (2018).

[15] Лосев А.Г. *О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях*, Дифференц. уравнения **53** (12), 1643–1652 (2017).

[16] Мазепа Е.А. *О разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях*, Матем. физика и компьют. моделирование **20** (3), 136–147 (2017).

[17] Losev A.G., Mazepa E.A. *On solvability of the boundary value problems for the inhomogeneous elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds*, Пробл. анал. Issues Anal. **7 (25)**, Спецвыпуск, 101–112 (2018).

[18] Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях специального вида*, ДАН **367** (2), 166–167 (1999).

[19] Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Об асимптотическом поведении решенеий некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях*, Изв. вузов. Матем. (6), 41–49 (1999).

[20] Григорьян А.А., Надирашвили Н.С. *Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи*, Изв. вузов. Матем. (5), 25–33 (1987).

[21] Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка* (Наука, М., 1989).

Елена Алексеевна Мазепа

Волгоградский государственный университет,
пр-т Университетский, д. 100, г. Волгоград, 400062, Россия,

`e-mail:` elena.mazepa@volsu.ru

Дарья Константиновна Рябошлыкова

Волгоградский государственный университет,
пр-т Университетский, д. 100, г. Волгоград, 400062, Россия,

e-mail: daria_ryaboshlikova@volsu.ru

E.A. Mazepa and D.K. Ryaboshlikova

Asymptotic behavior of solutions of the inhomogeneous Schrödinger equation on noncompact Riemannian manifolds

Abstract. The paper studies the behavior of bounded solutions of the inhomogeneous Schrödinger equation on non-compact Riemannian manifolds under a variation of the right side of the equation. Various problems for homogeneous elliptic equations, in particular the Laplace-Beltrami equation and the stationary Schrödinger equation, have been considered by a number of Russian and foreign authors since the second half of the 20th century. In the first part of this paper, an approach to the formulation of boundary value problems based on the introduction of classes of equivalent functions will be developed. The relationship between the solvability of boundary value problems on an arbitrary non-compact Riemannian manifold with variation of inhomogeneity is also established. In the second part of the work, based on the results of the first part, properties of solutions of the inhomogeneous Schrödinger equation on quasi-model manifolds are investigated, and exact conditions for unique solvability of the Dirichlet problem and some other boundary value problems on these manifolds are found.

Keywords: inhomogeneous Schrödinger equation, boundary value problem, quasi-model Riemannian manifold.

Elena Alekseevna Mazepa

Volgograd State University,
100 Universitetskiy Ave., Volgograd, 400062 Russia,

e-mail: elena.mazepa@volsu.ru

Daria Konstantinovna Ryaboshlikova

Volgograd State University,
100 Universitetskiy Ave., Volgograd, 400062 Russia,

e-mail: daria_ryaboshlikova@volsu.ru