

Р.З. ДАУТОВ

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ
АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ И КУСОЧНЫМИ
МНОГОЧЛЕНАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ $H^m(a, b)$ И $B_{2,q}^s(a, b)$**

Аннотация. Получены наилучшие оценки погрешности приближения функций, заданных на конечном отрезке, алгебраическими многочленами и кусочно-полиномиальными функциями в случае, когда погрешности измеряются в нормах пространства Соболева или Бесова. Указаны весовые пространства Бесова, для функций которых справедливы неравенства типа Джексона и Бернштейна и, как следствие, справедливы прямые и обратные теоремы аппроксимации. В ряде случаев указаны точные константы в оценках.

Ключевые слова: наилучшее приближение многочленами, ортогональный полином, точная оценка погрешности, неравенство Бернштейна, неравенство Джексона, прямая и обратная теоремы.

УДК: 517.587: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-1-14-34

ВВЕДЕНИЕ

1. Одной из основных задач теории приближения функций является нахождение прямых и обратных теорем приближения многочленами, сплайнами, рациональными функциями и т. д. Подобные теоремы описывают внутренние свойства классов функций с определенным порядком погрешности наилучшего приближения. Классический пример связан с равномерным приближением 2π -периодических функций тригонометрическими многочленами. Пусть

$$E_n(f) = \inf_{t \in \mathcal{T}_{n-1}} \|f - t\|_{C(\mathbb{T})}$$

есть погрешность наилучшего равномерного приближения функции f тригонометрическими многочленами степени не выше $n - 1$. Известно, что

$$\text{если } f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T}), \text{ то } E_n(f) \leq C n^{-\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1)$$

$$\text{если } E_n(f) \leq C n^{-\alpha} \text{ для всех } n = 1, 2, \dots, \text{ то } f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T}), \quad (2)$$

где $0 < \alpha < 1$, $\text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ — класс 2π -периодических липшицевых функций с показателем α . Здесь и далее C обозначает положительную постоянную, не зависящую от n , значение которой в разных формулах может различаться.

Поступила в редакцию 24.12.2022, после доработки 24.12.2022. Принята к публикации 29.03.2023.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Утверждение (1) является примером прямой теоремы аппроксимации (теоремы Джексона [1]), а (2) — соответствующей ей обратной теоремы (теоремы Бернштейна [2]). Из них следует, что утверждение $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, эквивалентно $f \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$. Как видим, эта пара теорем определяет не только точный порядок погрешности наилучшего приближения, но и точный класс функций, для которых этот порядок достигается. Важно отметить, что следующее неравенство Бернштейна (также называемое обратным неравенством) играет решающую роль в доказательстве теоремы Бернштейна:

$$\|t'\|_{C(\mathbb{T})} \leq n \|t\|_{C(\mathbb{T})}, \quad t \in \mathcal{T}_n.$$

Отметим также, что большой интерес представляет точное значение постоянной C в оценке (1), влияющей на величину погрешности (т.е. такое значение C , при котором неравенство (1) превращается в равенство для некоторой f).

2. Известный в теории приближения функций общий метод доказательства прямых и обратных теорем, которым мы воспользуемся в данной работе, основан на получении пары согласованных между собой неравенств типа Джексона и Бернштейна. Приведем иллюстрацию этого метода в достаточно общей ситуации, следуя статье [3] (см. также [4], гл. 7, §5, теорема 5.1; гл. 7, §9, теорема 9.1; [5], теорема 5.4.1).

Пусть X, Y — пара банаховых пространств с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно, $Y \subset X$, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ — семейство конечномерных подпространств Y , $S_n \subset S_{n+1}$ для всех $n \geq 1$. Рассмотрим задачу приближения функции $f \in X$ элементами S_n (в теории аппроксимации рассматривается также более общая ситуация, когда $\|\cdot\|_X$ может быть квазинормой, а S_n может не быть линейным множеством; условия на S_n см., например, в [3] или [4], гл. 7, §5). Обозначим через $E_n(f)_X$ погрешность наилучшего приближения:

$$E_n(f)_X = \inf \{ \|f - s\|_X : s \in S_n \}.$$

В статье ([3], утверждение 1.1, следствия 1.1, 1.2) содержится доказательство следующей теоремы (кроме оценки (6), методика доказательства которой приведена в [6]). Для полноты изложения мы приводим его доказательство в приложении.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие неравенства типа Джексона и Бернштейна: для каждой $f \in Y$*

$$E_n(f)_X \leq C n^{-\alpha} \|f\|_Y, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

для любых $s \in S_n$ и $n = 1, 2, \dots$,

$$\|s\|_Y \leq C n^\alpha \|s\|_X. \quad (4)$$

Пусть также $0 < \gamma < \alpha$, $\theta = \gamma/\alpha$. Тогда, если $f \in (X, Y)_{\theta, \infty}$, то

$$E_n(f)_X \leq C n^{-\gamma} \|f\|_{(X, Y)_{\theta, \infty}}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

Обратно, если для любого $n \geq 1$ существует элемент $s_n \in S_n$ такой, что

$$\|f - s_n\|_X \leq A n^{-\gamma},$$

с постоянной A , не зависящей от n , то $f \in (X, Y)_{\theta, \infty}$, и

$$\|f\|_{(X, Y)_{\theta, \infty}} \leq C (A + \|f\|_X), \quad (6)$$

где постоянная C не зависит от n , A и f .

Здесь $(X, Y)_{\theta, \infty}$ обозначает интерполяционное (промежуточное) пространство между X и Y , определяемое вещественным K -методом (см. далее п. 1.3). Отметим, что оценки (3) используются только при доказательстве прямой теоремы, а (4) применяются только при доказательстве обратной теоремы.

3. Прямые и обратные теоремы хорошо известны в случае, когда погрешность аппроксимации измеряется в равномерной норме или L_p -норме, а аппроксимации отыскиваются в пространствах тригонометрических или алгебраических многочленов, сплайнов, в множестве рациональных функций и т.д. В связи с этим отметим лишь книги [4], [5], [7], [8], содержащие многочисленные результаты по этим вопросам.

Если погрешность аппроксимации измеряется в норме пространства Соболева W_p^m , то также хорошо известны прямая и обратная теоремы аппроксимации периодических функций тригонометрическими многочленами. Доказательства оценок (3) и (4) в этом случае (т.е. для $X = W_p^m(\mathbb{T})$, $Y = W_p^k(\mathbb{T})$ с целыми $k > m \geq 0$, $\alpha = k - m$) можно найти, например, в ([4], гл. 7, §2, теорема 2.7; гл. 4, §2, теорема 2.5). Аналогичные оценки, а также прямые и обратные теоремы для приближений алгебраическими многочленами или кусочно-полиномиальными функциями нам неизвестны. Неулучшаемые оценки погрешности подобных аппроксимаций в пространствах Соболева представляют большой интерес для спектральных методов, а также p - и $(h-p)$ -методов конечных элементов для решения дифференциальных уравнений. Восполнению этого пробела и посвящена данная работа.

Мы доказываем, что оценки (3) и (4) (следовательно, и соответствующие прямые и обратные теоремы), справедливы в случае приближения функций алгебраическими многочленами, когда

$$X = H^m(I), \quad m \geq 1,$$

$$Y = H^{s,m}(I) = \{f \in H^m(I) : (1 - x^2)^{(\nu-m)/2} D^\nu f \in L_2(I), \quad m+1 \leq \nu \leq s\},$$

где $s \geq m$, $D^\nu f = d^\nu f / dx^\nu$, $I = (-1, 1)$, $H^m(I) = W_2^m(I)$. Эти результаты остаются справедливыми также для пространств Бесова $X = B_{2,q}^s$, которые мы рассматриваем как интерполяционные пространства (см. далее п. 1.3), а также для приближений в $H^m(a, b)$ кусочно-полиномиальными функциями, используемыми в p -версиях метода конечных элементов (в этих методах разбиение $[a, b]$ на элементы является фиксированным).

4. Отметим публикации по близким к рассматриваемым нами вопросам. Оценки вида (3) и (4) в случае приближения алгебраическими многочленами известны для весовых пространств Соболева $Z_\beta^r(I)$ с нормой

$$\|f\|_{Z_\beta^r(I)} = \left(\sum_{s=0}^r \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\beta+s} |D^s f|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $\beta > -1$. Для $X = Z_\beta^m(I)$, $Y = Z_\beta^r(I)$ оценка (3) с $\alpha = r - m$ доказана в [10] (см. также [11], [12]), а оценка (4) — в [13] (см. также [12], [14]). Подобные оценки в весовых нормах, а также обратные оценки в пространстве Соболева $H^1(Q)$ были получены в двумерном случае в статьях [11], [15], [6]. Отметим также работы [16], [17], посвященные прямой и обратной теоремам аппроксимации кусочно-полиномиальными функциями, используемыми в h -версии метода конечных элементов (в этих методах степени многочленов на элементах ограничены некоторой величиной).

5. Охарактеризуем кратко содержание статьи. В разделе 2 определяются весовые пространства Соболева $H^{s,m}(I)$ (см. выше) и $V^{s,m}(I)$, $s = 0, 1, \dots$,

$$V^{s,m}(I) = \{f : (1 - x^2)^{(\nu-m)/2} D^\nu f \in L_2(I), \quad 0 \leq \nu \leq s\},$$

параметрически зависящие от целого числа $m \geq 0$. Они играют центральную роль в дальнейшем. Пространства $H^{s,m}(I)$ интересны тем, что являются подпространствами $H^m(I)$, а $H^{m,m}(I) = H^m(I)$. Элементы $V^{s,m}(I)$ удовлетворяют краевым условиям $D^\nu f(\pm 1) = 0$ при $0 \leq \nu \leq \min\{m, s\} - 1$, причем $V^{m,m}(I) = \{f \in H^m(I) : D^\nu f(\pm 1) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq m - 1\}$.

В разделе 3 устанавливаются необходимые свойства обобщенных многочленов Якоби

$$P_n^{(-m)}(x) = (1 - x^2)^m P_{n-2m}^{(m,m)}(x)$$

степени $n \geq 2m$, ортогональных с неинтегрируемым при $m \geq 1$ весом $(1 - x^2)^{-m}$, где $P_{n-2m}^{(m,m)}$ — обычные многочлены Якоби степени $n - 2m$ с равными m индексами. Обобщенные многочлены Якоби были введены в ([18], § 4.22) и изучались в [19]. Наш интерес к ним связан с тем, что система многочленов $\{P_n^{(-m)}\}_{n=2m}^\infty$ образует ортогональный базис в $V^{s,m}(I)$ при каждом целом $s \geq 0$ (теорема 6) и является аналогом стандартного тригонометрического базиса в соболевских пространствах периодических функций $H^s(\mathbb{T})$. Это свойство позволяет получить точные оценки погрешности наилучшего приближения функций из пространств $V^{s,m}(I)$ алгебраическими многочленами, а также точные обратные неравенства (с точными постоянными). Этим вопросам посвящен раздел 4, в котором результаты статьи [12] обобщаются на случай неинтегрируемой весовой функции Якоби.

В разделе 5 полученные результаты распространяются на функции из пространства $H^{s,m}(I)$ и устанавливаются неравенства типа Джексона и Бернштейна. Используемая здесь конструкция проектора $\Pi_{n,m} : H^m(I) \rightarrow \mathcal{P}_n$ позволяет непосредственно обобщить результаты раздела 5 на кусочно-полиномиальные приближения функций из H^m в разделе 7. В разделе 6 доказываются прямая и обратная теоремы аппроксимации многочленами в пространствах Соболева и Бесова.

Можно заметить, что в данной работе мы реализуем обратный традиционному подход: сначала изучаются вопросы аппроксимации функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям Дирихле (принадлежащих $V^{s,m}(I)$), а на их основе затем выводятся оценки для функций, не обязательно удовлетворяющих однородным краевым условиям.

Данная статья является расширенным изложением результатов, анонсированных ранее в кратком сообщении [20].

1. ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{P}_n$ — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n , а также $I = (-1, 1)$. Мы используем стандартные обозначения L_2 , H^m , $m \in \mathbb{Z}_+$, для пространств функций Лебега и Соболева на I со стандартными нормами $\|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_{H^m}$ и полунормами $|\cdot|_{H^s}$ (мы не указываем множество в обозначении пространства, если оно совпадает с I , так что L_2 , H^m есть сокращения для $L_2(I)$, $H^m(I)$),

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_{H^m} = \left(\sum_{s=0}^m |f|_{H^s}^2 \right)^{1/2}, \quad |f|_{H^s} = \|D^s f\|_{L_2},$$

где $D^s = d^s/dx^s$. Через H_0^m обозначим стандартное подпространство H^m :

$$H_0^m = \{f \in H^m : D^s f(\pm 1) = 0, 0 \leq s \leq m-1\}, \quad m \geq 1.$$

1.1. Пространства $V^{s,m}$. Пусть $\alpha \in R$, $\omega_\alpha(x) = (1 - x^2)^\alpha$. Обозначим через $L_{2,\alpha}$ весовое пространство Лебега, снабженное следующими скалярным произведением и нормой:

$$(f, g)_{L_{2,\alpha}} = \int_{-1}^1 \omega_\alpha(x) f(x) g(x) dx, \quad \|f\|_{L_{2,\alpha}} = (f, f)_{L_{2,\alpha}}^{1/2}.$$

Далее важнейшую роль играет гильбертово пространство

$$V^{s,m} = \{f : D^\nu f \in L_{2,\nu-m}, 0 \leq \nu \leq s\}, \quad s, m \in \mathbb{Z}_+,$$

снабженное скалярным произведением

$$(f, g)_{V^{s,m}} = \int_{-1}^1 \sum_{\nu=0}^s (1-x^2)^{\nu-m} D^\nu f(x) D^\nu g(x) dx$$

и нормой

$$\|f\|_{V^{s,m}}^2 = \int_{-1}^1 \left(\frac{f^2}{(1-x^2)^m} + \frac{|Df|^2}{(1-x^2)^{m-1}} + \dots + |D^m f|^2 + \right. \\ \left. + (1-x^2) |D^{m+1} f|^2 + \dots + (1-x^2)^{s-m} |D^s f|^2 \right) dx.$$

По определению $V^{0,m} = L_{2,-m}$. Обозначим через $|\cdot|_{V^{\nu,m}}$ полунорму

$$|f|_{V^{\nu,m}} = \left\| (1-x^2)^{\frac{\nu-m}{2}} D^\nu f \right\|_{L_2}.$$

Как видим, полунорма $|\cdot|_{V^{m,m}}$ является невесовой и существенно отличается от других полунорм; она совпадает с полунормой $|\cdot|_{H^m}$. Поскольку весовые функции локально ограничены, то ясно, что $V^{s,m} \subset C^{s-1}$.

Лемма 1. При $s, m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:

а) если $f \in V^{s,m}$ и $0 \leq \nu \leq \min(s, m) - 1$, то по непрерывности определены значения $D^\nu f(\pm 1)$, причем $D^\nu f(\pm 1) = 0$;

б) пусть $s \geq m + 1$ и $f \in V^{s,m}$, тогда для всех целых ν , $m \leq \nu \leq s - 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} (1-x^2)^{(\nu+1-m)/2} D^\nu f(x) = 0.$$

Доказательство. Докажем первую часть утверждения а), а именно, убедимся, что $D^\nu f \in C[-1, 1]$. При $s \geq m$, т.е. при $\nu \leq m - 1$, это следует из очевидной оценки $\|f\|_{H^m} \leq \|f\|_{V^{s,m}}$ и вложения $H^m \subset C^{m-1}[-1, 1]$. Пусть $s < m$, т.е. $\nu \leq s - 1$. Обозначим через $L_{p,\alpha,\beta}^s(a, b)$ совокупность функций, имеющих на интервале (a, b) обобщенные производные порядка s , для которых конечна полунорма

$$|f|_{L_{p,\alpha,\beta}^s} = \left(\int_a^b |(x-a)^\alpha (b-x)^\beta D^s f|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Вопросы его эквивалентной нормировки изучались в [21]. При слабом вырождении весовой функции, т.е. при условиях $\alpha < 1 - 1/p$, $\beta < 1 - 1/p$ установлено, что предельные значения $D^\nu f(\pm 1)$ существуют при $0 \leq \nu \leq s - 1$ ([21], лемма 2). Используя этот результат при $p = 2$, $\alpha = \beta = (s - m)/2 \leq 0$, $(a, b) = I$, получим первую часть утверждения а), поскольку $V^{s,m} \subset C^{s-1}$. Из конечности первого интеграла в представлении

$$|f|_{V^{\nu,m}}^2 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-m} |D^\nu f(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} |(1-x^2)^{(\nu+1-m)/2} D^\nu f(x)|^2 dx$$

следует, что $D^\nu f(\pm 1) = 0$, т.е. утверждение а), поскольку $\nu - m \leq -1$, и $D^\nu f \in C[-1, 1]$. Утверждение б) следует из конечности второго интеграла. $\square$

1.2. **Пространства $H^{s,m}$, $H_0^{s,m}$.** Для целых $s \geq m \geq 0$ определим пространство

$$H^{s,m} = \{f \in H^m : D^\nu f \in L_{2,\nu-m}, m+1 \leq \nu \leq s\}$$

с нормой

$$\|f\|_{H^{s,m}} = \left(\|f\|_{H^m}^2 + \sum_{\nu=m+1}^s |f|_{H^{\nu,m}}^2 \right)^{1/2}, \quad |f|_{H^{\nu,m}}^2 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-m} |D^\nu f|^2 dx,$$

а также при $m \geq 1$ его подпространство $H_0^{s,m} = H_0^m \cap H^{s,m}$. Отметим, что $H^{m,m} = H^m$, а также, что $|\cdot|_{H^{s,m}} = |\cdot|_{V^{s,m}}$ при $s > m$.

Лемма 2. При всех $s \geq m \geq 1$ на пространстве $H_0^{s,m}$ нормы $\|\cdot\|_{H^{s,m}}$ и $\|\cdot\|_{V^{s,m}}$ эквивалентны. Точнее для любого $f \in H^{s,m}$

$$\|f\|_{H^{s,m}} \leq \|f\|_{V^{s,m}} \leq C \|f\|_{H^{s,m}}. \quad (7)$$

Доказательство. Левая оценка в (7) очевидна, так как $(1-x^2)^{\nu-m} \geq 1$ при $\nu \leq m$. Для доказательства правого неравенства достаточно установить, что $\|f\|_{V^{m,m}} \leq C \|f\|_{H^m}$. С этой целью определим норму

$$\|f\| = \left(\sum_{\nu=0}^m \int_{-1}^1 (1-x^2)^{2(\nu-m)} |D^\nu f|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Ясно, что $\|f\|_{V^{m,m}} \leq \|f\|$. В ([21], теорема 6) доказано, что на пространстве функций с ограниченной полунормой $\|D^m f\|_{L_2}$, удовлетворяющих условиям $D^\nu f(\pm 1) = 0$, $0 \leq \nu \leq m-1$, норма (8) эквивалентна норме $\|f\|_{H^m}$. Следовательно, $\|f\|_{V^{m,m}} \leq \|f\| \leq C \|f\|_{H^m}$. $\square$

1.3. **Интерполяционные пространства.** Через $(X, Y)_{\theta,q}$ для банаховых пространств X и Y будем обозначать, как обычно, интерполяционное весовое пространство определяемое вещественным K -методом, где $\theta \in (0, 1)$, $1 \leq q \leq \infty$ (см., например, [9], п. 1.3). Отметим, что $(X, X)_{\theta,q} = X$ для всех указанных параметров. Далее мы будем иметь дело лишь со случаем, когда Y непрерывно вложено в X , т.е. $Y \subset X$. В этом случае пространство $(X, Y)_{\theta,q}$ является промежуточным между Y и X , точнее $Y \subset (X, Y)_{\theta,q} \subset X$. Известно, что $(X, Y)_{\theta,q_1} \subset (X, Y)_{\theta,q_2}$, если $q_1 < q_2$, поэтому $(X, Y)_{\theta,\infty}$ — наиболее широкое пространство среди $(X, Y)_{\theta,q}$. При $1 \leq q < \infty$ норма в $(X, Y)_{\theta,q}$ определяется функционалом (см., например, [9], п. 1.3.2)

$$\|f\|_{(X,Y)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

а при $q = \infty$ — по любой из следующих эквивалентных формул ([4], гл. 6, §7):

$$\|f\|_{(X,Y)_{\theta,\infty}} = \sup_{0 < t < 1} t^{-\theta} K(t, f), \quad \|f\|_{(X,Y)_{\theta,\infty}} = \sup_{n \geq N} n^{\nu\theta} K(n^{-\nu}, f), \quad (9)$$

где N и ν — произвольные положительные числа, K -функционал имеет вид

$$K(t, f) = K(t, f, X, Y) = \inf \{ \|f - g\|_X + t \|g\|_Y, g \in Y \}. \quad (10)$$

Далее нам понадобятся два важных свойства пространств, определяемых вещественным K -методом. Первое из них касается интерполяции линейных операторов (см., например, [4], гл. 6, §7, теорема 7.1).

Теорема 2. Пусть X_0, X_1 и Y_0, Y_1 — две пары банаховых пространств, а T — линейный оператор, отображающий X_i в Y_i с нормой M_i , $i = 0, 1$. Тогда T ограничено отображает $X_{\theta,q}$ в $Y_{\theta,q}$ с нормой $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ для всех $\theta \in (0, 1)$ и $1 \leq q \leq \infty$.

Второе свойство связано с интерполяцией фактор-пространств ([9], п. 1.17.2).

Теорема 3. Пусть X/D , Y/D есть фактор-пространства банаховых пространств X и Y , где пространство D конечномерно. Тогда

$$(X/D, Y/D)_{\theta, q} = (X, Y)_{\theta, q}/D \quad \text{при } 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Известно, что пространство Соболева H^s при нецелом s может быть определено интерполяцией пространств Соболева с целыми показателями. Пусть m, k целые, $0 \leq m < k$, и $s = (1 - \theta)m + \theta k$ при некотором $\theta \in (0, 1)$. Тогда [22]

$$H^s = (H^m, H^k)_{\theta, 2}.$$

Это равенство остается верным и при нецелых m и k . Интерполяцией пространств Соболева определяется также пространство Бесова $B_{2, q}^s$, $1 \leq q \leq \infty$:

$$B_{2, q}^s = (H^{s_0}, H^{s_1})_{\theta, q}, \quad s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \quad (11)$$

где $s_1 > s_0 \geq 0$, $\theta \in (0, 1)$. Известно, что $H^s = B_{2, 2}^s$ и ([9], п. 4.3.1, теорема 2)

$$B_{2, q}^s = (B_{2, q_0}^{s_0}, B_{2, q_1}^{s_1})_{\theta, q}, \quad s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1.$$

Далее дробные пространства Соболева и интерполяционные пространства нам понадобятся только в разделах, посвященных прямым и обратным теоремам аппроксимации. В них нам понадобятся также весовые интерполяционные пространства Бесова. Они будут вводиться по мере необходимости.

2. ОБОБЩЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЯКОБИ

Пусть $\alpha, \beta > -1$. Напомним, что классические многочлены Якоби $y = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)D^2y + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)Dy + \lambda y = 0, \quad (12)$$

которое может быть записано в виде

$$-D((1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}Dy) = \lambda(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}y. \quad (13)$$

Здесь $\lambda = n(n + 1 + \alpha + \beta)$. Уравнение (12) можно записать также в виде

$$(1 - x^2)D^2Y + (\alpha - \beta + (\alpha + \beta - 2)x)DY + \Lambda Y = 0, \quad (14)$$

где $Y = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\Lambda = (n + 1)(n + \alpha + \beta)$ ([18], § 4.2).

Лемма 3. При $\alpha, \beta < 0$ функция $y = (1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta}P_n^{(-\alpha, -\beta)}(x)$ является решением (12) при $\lambda = (n + 1)(n - \alpha - \beta)$. В частности, для $m \in \mathbb{N}$ многочлен $P_n^{(-m)}(x) = (1 - x^2)^m P_{n-2m}^{(m, m)}(x)$ степени $n \geq 2m$ удовлетворяет равенству (12) при $\alpha = \beta = -m$, $\lambda = \lambda_n^{(-m)} = n(n - 2m + 1)$.

Доказательство. Сделаем замену $\alpha \rightarrow -\alpha$, $\beta \rightarrow -\beta$ в (14). Из сравнения полученного равенства с (12) следует, что Y удовлетворяет уравнению (12) при $\lambda = (n + 1)(n - \alpha - \beta)$. Полагая в этом уравнении $\alpha = \beta = -m$, и заменяя n на $n - 2m$, получим заключительное утверждение леммы. $\square$

Многочлены $(1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta}P_n^{(-\alpha, -\beta)}(x)$ при целых $\alpha \leq -1$, $\beta \leq -1$ были введены в ([18], § 4.22) как обобщение многочленов Якоби, в [19] были установлены их основные свойства. Легко видеть, что $P_n^{(-m)} \in V^{s, m}$ при всех $s \in \mathbb{Z}_+$ и $n \geq 2m$. Ближайшей нашей целью является доказательство того, что система многочленов $\left\{P_n^{(-m)}\right\}_{n=2m}^{\infty}$ образует

ортогональный базис в каждом $V^{s,m}$, $s, m \in \mathbb{Z}_+$. При $m = 0$ этот факт известен [10]. Поэтому далее в этой секции целое $m \geq 1$. В основе нашего доказательства лежит следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\omega_\alpha(x) = (1 - x^2)^\alpha$. Тогда многочлен $y = P_n^{(-m)}(x)$, определенный в лемме 3, удовлетворяет равенству

$$(-1)^s D^s (\omega_{s-m} D^s y) = \lambda_{sn}^{(-m)} \omega_{-m} y \quad (15)$$

при каждом $s \in \mathbb{Z}_+$, где $\lambda_{sn}^{(-m)} = 0$ при $s > n$, $\lambda_{0n}^{(-m)} = 1$,

$$\lambda_{sn}^{(-m)} = \lambda_n^{(-m)} \lambda_{n-1}^{(1-m)} \cdots \lambda_{n-s+1}^{(s-m-1)}, \quad s \leq n, \quad \lambda_k^{(\nu)} = k(k + 2\nu + 1).$$

Доказательство. Ясно, что теорема верна при $s = 0$. При $s = 1$ уравнение (15) справедливо, поскольку оно совпадает с уравнением (13), а также с (12) при $\alpha = \beta = -m$ и $\lambda = \lambda_n^{(-m)}$. Согласно лемме 3 оно имеет следующий вид:

$$(1 - x^2) D^2 y - 2(1 - m)x Dy + \lambda_n^{(-m)} y = 0. \quad (16)$$

Пусть $s \geq 2$. Дифференцируя $(s - 1)$ раз равенство (16), получим

$$(1 - x^2) D^{s+1} y + 2(s - m)x D^s y + (\lambda_n^{(-m)} - (s - 1)(s - 2m)) D^{s-1} y = 0. \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что коэффициент при $D^{s-1} y$ в этом уравнении равен $\lambda_{n-s+1}^{(s-m-1)}$. После умножения (17) на ω_{s-m-1} придем к равенству

$$-D(\omega_{s-m} D^s y) = \lambda_{n-s+1}^{(s-1-m)} \omega_{s-m-1} D^{s-1} y,$$

из которого следует рекуррентное по s соотношение

$$-D^s (\omega_{s-m} D^s y) = \lambda_{n-s+1}^{(s-m-1)} D^{s-1} (\omega_{s-m-1} D^{s-1} y).$$

Продолжая рекурсию далее, получим (15). $\square$

Теорема 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$ и $n \geq 2m$. Тогда

$$\int_{-1}^1 \omega_{s-m} D^s P_n^{(-m)} D^s v dx = \lambda_{sn}^{(-m)} \int_{-1}^1 \omega_{-m} P_n^{(-m)} v dx \quad (18)$$

для любой функции $v \in V^{s,m}$. Здесь величины $\lambda_{sn}^{(-m)}$ определены в теореме 4.

Доказательство. При $s = 0$ тождество (18) справедливо. Пусть $s \geq 1$. Умножим равенство (15) на функцию $v \in V^{s,m}$ и проинтегрируем результат по интервалу $(-a_\varepsilon, a_\varepsilon) \subset (-1, 1)$, считая, что $a_\varepsilon \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая, что $v \in C^{s-1}[-a_\varepsilon, a_\varepsilon]$, после s -кратного интегрирования по частям получим

$$\int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \omega_{s-m} D^s P_n^{(-m)} D^s v dx + \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^{\nu+1} S_{\nu s}^\varepsilon(v) = \lambda_{sn}^{(-m)} \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \omega_{-m} P_n^{(-m)} v dx, \quad (19)$$

где

$$S_{\nu s}^\varepsilon(v) = D^{s-1-\nu} (\omega_{s-m} D^s P_n^{(-m)}) D^\nu v|_{x=-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} = \varphi_{\nu s}(x) D^\nu v(x)|_{x=-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon},$$

$$\varphi_{\nu s}(x) = D^{s-1-\nu} \phi_s(x), \quad \phi_s(x) = \omega_{s-m}(x) D^s P_n^{(-m)}(x).$$

Пусть $0 \leq \nu \leq s - 1$. Докажем, что $(\varphi_{\nu s} D^s v)(\pm a_\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда, в силу равномерной по ε ограниченности интегралов, утверждение теоремы получим предельным переходом в (19).

Рассмотрим два случая: а) $1 \leq s \leq m$; б) $s \geq m+1$. В случае а) имеем $0 \leq \nu \leq m-1$ и

$$\phi_s(x) = (1-x^2)^{s-m} D^s \left((1-x^2)^m P_{n-2m}^{(m,m)}(x) \right) \in \mathcal{P}_{n-m},$$

т. е. функция $\varphi_{\nu s}(x)$ ограничена на $[-1, 1]$. Так как $D^\nu v \in C[-1, 1]$, а также $D^\nu v(\pm 1) = 0$ согласно утверждению а) леммы 1, то

$$\varphi_{\nu s}(x) D^\nu v(x)|_{x=\pm a_\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В случае б) множество чисел $0 \leq \nu \leq s-1$ распадается на два подмножества: $0 \leq \nu \leq m-1$ и $m \leq \nu \leq s-1$. Случай $0 \leq \nu \leq m-1$ был рассмотрен выше на шаге а). Пусть $m \leq \nu \leq s-1$. Тогда

$$\phi_s(x) = (1-x^2)^{s-m} D^s P_n^{(-m)}(x) = (1-x^2)^{s-m} p_{n-s}, \quad p_{n-s} \in \mathcal{P}_{n-s},$$

а также $\varphi_{\nu s}(x) = (1-x^2)^{\nu+1-m} \varphi(x)$, где φ некоторый многочлен. Следовательно, учитывая утверждение б) леммы 1, получим

$$\varphi_{\nu s}(x) D^\nu v(x)|_{x=\pm a_\varepsilon} = (1-x^2)^\mu \varphi(x) \left((1-x^2)^{(\nu+1-m)/2} D^\nu v(x) \right) \Big|_{x=a_\varepsilon} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку $\mu = (\nu+1-m)/2 > 0$. □

Теорема 6. Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

а) система многочленов $\left\{ P_\nu^{(-m)} \right\}_{\nu=2m}^\infty$ образует ортогональный базис в $V^{s,m}$;

б) если $f \in V^{s,m}$ и $f = \sum_{\nu=n}^\infty c_\nu P_\nu^{(-m)}$, $n \geq 2m$, то

$$|f|_{V^{s,m}}^2 = \sum_{\nu=n}^\infty \lambda_{s\nu}^{(-m)} h_\nu^{(m)} c_\nu^2, \quad h_\nu^{(m)} = \|P_\nu^{(-m)}\|_{L_{2,-m}}^2. \quad (20)$$

Доказательство. а) Напомним, что ортогональная система $\{\varphi_\nu\}$ гильбертова пространства H образует в нем базис, если H не содержит ненулевого элемента, ортогонального всем φ_ν . Суммируя по s равенства (18), получаем

$$\left(P_n^{(-m)}, v \right)_{V^{s,m}} = \Lambda_{nms} \left(P_n^{(-m)}, v \right)_{L_{2,-m}} = \Lambda_{nms} \left(P_{n-2m}^{(m,m)}, \hat{v} \right)_{L_{2,m}}, \quad (21)$$

где $\Lambda_{nms} = \sum_{\nu=0}^s \lambda_{\nu n}^{(-m)}$, $\hat{v} = \omega_{-m} v \in L_{2,m}$. Из тождества (21) следует как ортогональность системы $\left\{ P_\nu^{(-m)} \right\}_{\nu=2m}^\infty$ в $V^{s,m}$, так и его полнота в $V^{s,m}$, т. е. утверждение а), поскольку такими же свойствами обладает в $L_{2,m}$ система $\left\{ P_{\nu-2m}^{(m,m)} \right\}_{\nu=2m}^\infty = \left\{ P_\nu^{(m,m)} \right\}_{\nu=0}^\infty$. Утверждение б) следует из а) и тождества (18) при $v = P_n^{(-m)}$. □

3. НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В $V^{s,m}$

Пусть $\mathcal{P}_{n,m}$ есть множество алгебраических многочленов степени не выше $n \geq 2m$, имеющих нули кратности m в точках $x = \pm 1$,

$$\mathcal{P}_{n,m} = (1-x^2)^m \operatorname{span} \left\{ P_0^{(m,m)}, P_1^{(m,m)}, \dots, P_{n-2m}^{(m,m)} \right\} = (1-x^2)^m \mathcal{P}_{n-2m}.$$

Пусть также $\pi_{n-1,m} : L_{2,-m} \rightarrow \mathcal{P}_{n-1,m}$ есть оператор ортогонального проектирования, т. е.

$$(f - \pi_{n-1,m} f, v)_{L_{2,-m}} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{P}_{n-1,m}.$$

Важнейшие свойства этого оператора указаны в следующем утверждении.

Теорема 7. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m + 1$. Тогда

- i) $\pi_{n-1,m}f$ является наилучшим приближением f в $V^{s,m}$ при каждом $s \in \mathbb{Z}_+$;
- ii) для любых $f \in V^{r,m}$ и $0 \leq s \leq r \leq n$ справедлива оценка

$$|f - \pi_{n-1,m}f|_{V^{s,m}} \leq C(s, r, n, m) |f|_{V^{r,m}}, \quad (22)$$

где

$$C^2(s, r, n, m) = \frac{(n-r)!}{(n-s)!} \frac{(n-2m+s)!}{(n-2m+r)!}. \quad (23)$$

Оценка (22) является точной, равенство в нем достигается при $f = P_n^{(-m)}$.

Доказательство. Утверждение i) непосредственно следует из утверждения а) теоремы 6. Пусть

$$f = \sum_{\nu=2m}^{\infty} c_{\nu} P_{\nu}^{(-m)}, \quad c_{\nu} = \left(f, P_{\nu}^{(-m)} \right)_{L_2, -m} / h_{\nu}^{(m)}.$$

Тогда

$$\pi_{n-1,m}f = \sum_{\nu=2m}^{n-1} c_{\nu} P_{\nu}^{(-m)}, \quad f - \pi_{n-1,m}f = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu} P_{\nu}^{(-m)}. \quad (24)$$

Докажем ii). Используем представление (20). Получим

$$|f - \pi_{n-1,m}f|_{V^{s,m}}^2 = \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{s\nu}^{(-m)} h_{\nu}^{(m)} c_{\nu}^2 = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\lambda_{s\nu}^{(-m)}}{\lambda_{r\nu}^{(-m)}} \lambda_{r\nu}^{(-m)} h_{\nu}^{(m)} c_{\nu}^2. \quad (25)$$

Так как $s \leq r \leq n$, то величина

$$C^2(s, r, n, m) = \lambda_{sn}^{(-m)} / \lambda_{rn}^{(-m)} = 1 / \left(\lambda_{n-s}^{(s-m)} \cdots \lambda_{n-r+1}^{(r-m-1)} \right)$$

убывает с ростом n . Следовательно, снова используя (20), будем иметь

$$|f - \pi_{n-1,m}f|_{V^{s,m}}^2 \leq C^2(s, r, n, m) \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{r\nu}^{(-m)} h_{\nu}^{(m)} c_{\nu}^2 = C^2(s, r, n, m) |f|_{V^{r,m}}^2. \quad (26)$$

Точность этой оценки следует из того, что при $f = P_n^{(-m)}$ суммы в (25) содержат только одно ненулевое слагаемое при $\nu = n$, как следствие, (26) превращается в равенство. $\square$

Следствие 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m + 1$ и $0 \leq s \leq m$. Тогда для любого $f \in V^{r,m}$ при $s \leq r \leq n$ справедлива оценка

$$|f - \pi_{n-1,m}f|_{H^s} \leq C(s, r, n, m) |f|_{V^{r,m}}. \quad (27)$$

Доказательство. Оценка (27) следует из (22), поскольку $|f|_{H^s} \leq |f|_{V^{s,m}}$ для всех $s \leq m$. $\square$

Далее нам понадобится равномерная по n оценка величин $C(s, r, n, m)$.

Лемма 4. Пусть $m \geq 1$, $r \geq s \geq 0$, а также $c_{srm} = e^{r - \min\{s, m\}}$. Тогда

$$C(s, r, n, m) \leq c_{srm} n^{-(r-s)}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (28)$$

Доказательство. Будем опираться на оценку ([23], с. 72, теорема 3.11)

$$D_{-\nu}(n) = \frac{(n-\nu)!}{(n+\nu)!} \leq \left(\frac{\gamma}{n} \right)^{2\nu}, \quad \gamma = \left(\frac{e}{2} \right)^{\nu/n} \leq e/2, \quad 0 \leq \nu \leq n.$$

Определим целые $N = n - m$, $M = n - m$, $\nu = r - m$. Рассмотрим отдельно случаи а) $\mu = s - m \geq 1$ ($\min\{s, m\} = m$) и б) $\mu = m - s \geq 0$ ($\min\{s, m\} = s$).

Нетрудно видеть, что $1/N \leq 2/n$. Поэтому в случае а) имеем

$$C^2(s, r, n, m) = D_{-\nu}(n) D_{\mu}(N) \leq \left(\frac{e}{n}\right)^{2(r-m)} D_{\mu}(N). \quad (29)$$

Второй сомножитель в (29) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{\mu}(N) &= \frac{(N + \mu)!}{(N - \mu)!} = [(N + \mu)(N + \mu - 1) \dots (N + 1)] [N(N - 1) \dots (N - \mu + 1)] = \\ &= [(N + \mu)(N - \mu + 1)] [(N + \mu - 1)(N - \mu + 2)] \dots [(N + 1)N]. \end{aligned}$$

В силу неравенства $ab \leq ((a + b)/2)^2$ отсюда получаем

$$D_{\mu}(N) \leq (N + 1/2)^{2\mu} \leq n^{2(s-m)}, \quad (30)$$

так как $(N + 1/2) \leq n$. Искомая оценка (28) в случае а) теперь следует из оценок (29), (30). В случае б) имеем

$$C^2(s, r, n, m) = D_{-\nu}(n) D_{-\mu}(N) \leq \left(\frac{e}{n}\right)^{2(r-m)} \left(\frac{e}{n}\right)^{2(m-s)} = e^{2(r-s)} n^{-2(r-s)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

4. НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В H^m

До сих пор мы рассматривали аппроксимации функций, удовлетворяющих $2m$ однородным граничным условиям Дирихле. Рассмотрим теперь аппроксимацию функций, не обязательно подчиняющихся этим условиям, адаптируя полученные ранее результаты. Аппроксимации будем искать в пространстве многочленов $\mathcal{P}_{n-1}$.

Пусть $f \in H^m$, $h_{2m-1}(x; f) \in \mathcal{P}_{2m-1}$ есть многочлен Эрмита такой, что

$$D^{\nu} h_{2m-1}(\pm 1; f) = D^{\nu} f(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1.$$

Функция $f_0 = f - h_{2m-1}$ принадлежит H_0^m , поэтому ее проекция $\pi_{n-1,m}(f_0)$ корректно определена при $n \geq 2m + 1$. Определим оператор проектирования $\Pi_{n-1,m} : H^m \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ следующим образом:

$$\Pi_{n-1,m} f = h_{2m-1} + \pi_{n-1,m}(f - h_{2m-1}), \quad n \geq 2m + 1. \quad (31)$$

Отметим, что

$$D^{\nu} \Pi_{n-1,m} f(\pm 1) = D^{\nu} f(\pm 1), \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1. \quad (32)$$

Теорема 8. Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m + 1$. Пусть также $f \in H^{r,m}$ при $m \leq r \leq n$. Тогда

$$|f - \Pi_{n-1,m} f|_{V^{s,m}} \leq C(s, r, n, m) |f|_{V^{r,m}}, \quad 0 \leq s \leq r, \quad (33)$$

$$|f - \Pi_{n-1,m} f|_{H^s} \leq C(s, r, n, m) |f|_{H^{r,m}}, \quad 0 \leq s \leq m, \quad (34)$$

$$|f - \Pi_{n-1,m} f|_{H^m} = \inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} |f - p|_{H^m}, \quad (35)$$

где величины $C(s, r, n, m)$ определены в (23). Оценки (33) и (34) при $s = m$ являются точными, равенство в них достигается при $f = P_n^{(-m)}$.

Доказательство. Пусть f_0 определяется по f как указано выше. Тогда

$$f - \Pi_{n-1,m} f = f_0 - \pi_{n-1,m}(f_0) \in H_0^m, \quad (36)$$

поскольку $H^{r,m} \subseteq H^m$. Согласно (22) имеем

$$|f - \Pi_{n-1,m} f|_{V^{s,m}} = |f_0 - \pi_{n-1,m}(f_0)|_{V^{s,m}} \leq C(s, r, n, m) |f_0|_{V^{r,m}}. \quad (37)$$

Оценим здесь сомножитель $|f_0|_{V^{r,m}}$. Предварительно убедимся, что

$$J = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{r-m} D^r(f - h_{2m-1}) D^r h_{2m-1} dx = \int_{-1}^1 g D^r f_0 dx = 0, \quad (38)$$

где $g = (1-x^2)^{r-m} D^r h_{2m-1}$. Ясно, что $J = 0$ при $r > 2m-1$. Иначе, при $m \leq r \leq 2m-1$, т. е. при $0 \leq r-m \leq m-1$, проинтегрируем по частям $r-m$ раз во втором интеграле в (38). Получим

$$J = \pm \int_{-1}^1 D^{r-m} g D^m f_0 dx.$$

Отсюда также следует $J = 0$ после m -кратного интегрирования по частям, поскольку $D^{r-m} g \in \mathcal{P}_{m-1}$, $f_0 \in H_0^m$. Равенство $J = 0$ позволяет записать следующее:

$$|f_0|_{V^{r,m}}^2 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{r-m} |D^r(f - h_{2m-1})|^2 dx = |f|_{V^{r,m}}^2 - |h_{2m-1}|_{V^{r,m}}^2 \leq |f|_{V^{r,m}}^2.$$

Учитывая эту оценку в (37), придем к (33). Ее точность следует из точности оценки (22), поскольку при $f = P_n^{(-m)}$ имеем $h_{2m-1} = 0$.

Оценка (34) следует из (33), так как $|f|_{H^s} \leq |f|_{V^{s,m}}$ для всех $s \leq m$, а также $|f|_{H^{r,m}} \leq |f|_{V^{r,m}}$ для всех $r \geq m$.

Докажем (35). Пусть $p \in \mathcal{P}_{n-1}$, $p_0 = p - h_{2m-1}(p)$. Достаточно проверить, что $E_m = 0$, где

$$E_m = \int_{-1}^1 D^m(f - \Pi_{n-1,m} f) D^m p dx. \quad (39)$$

Интегрируя по частям m раз и учитывая (36), получаем

$$\int_{-1}^1 D^m(f - \Pi_{n-1,m} f) D^m h_{2m-1}(p) dx = 0.$$

Вычтем это равенство из (39). Придем к равенству

$$E_m = \int_{-1}^1 D^m(f_0 - \pi_{n-1,m} f_0) D^m p_0 dx.$$

Используем вторую формулу в (24) и тождество (18) при $s = m$. Получим

$$E_m = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu} \int_{-1}^1 D^m P_{\nu}^{(-m)} D^m p_0 dx = \lambda_{mn}^{(-m)} \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu} \int_{-1}^1 \omega_{-m} P_{\nu}^{(-m)} p_0 dx = 0$$

в силу ортогональности $P_{\nu}^{(-m)}$ многочлену меньшей степени в $L_{2,-m}$. $\square$

Следствие 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m+1$ и $f \in H^{r,m}$ при $m \leq r \leq n$. Тогда

$$\|f - \Pi_{n-1,m} f\|_{H^s} \leq \Lambda(s, r, m, n) |f|_{H^{r,m}}, \quad 0 \leq s \leq m, \quad (40)$$

где

$$\Lambda(s, r, m, n) = \left(\sum_{\nu=0}^s C_{\nu r n m}^2 \right)^{1/2} \leq C n^{-(r-s)}.$$

Справедливы также оценки

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p\|_{H^m} \leq C n^{-(r-m)} \|f\|_{H^{r,m}}, \quad 0 \leq m \leq r \leq n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Доказательство. Из оценок (34) следует

$$\|f - \Pi_{n-1,m} f\|_{H^s}^2 \leq \Lambda_{srnm}^2 |f|_{H^{r,m}}^2.$$

Отсюда вытекает (40), если учесть оценки (28) величин $C(s, r, n, m)$. Оценка (41) при $m = 0$ известна (см., например, [4], гл. 8, §7, теорема 7.3), а при $m \geq 1$ она следует из (40) при $n \geq 2m + 1$. При $m \geq 1$ и $1 \leq n \leq 2m$ также имеем

$$\inf_{g \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - g\|_{H^m} \leq \|f\|_{H^m} \leq C n^{-(r-m)} \|f\|_{H^{r,m}}$$

в силу ограниченности n и вложения $H^{r,m} \subset H^m$. $\square$

Теорема 9. Пусть $m, s, r \in \mathbb{Z}_+$ и $p_n \in \mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$|p_n|_{H^{r,m}} \leq C^{-1}(s, r, n, m) |p_n|_{H^{s,m}}, \quad m \leq s \leq r, \quad (42)$$

где величины $C(s, r, n, m)$ определены в теореме 8. Оценка (42) является точной.

Доказательство. Следующее точное обратное неравенство

$$|p|_{Z_\alpha^r} \leq c^{-1}(s, r, n, \alpha) |p|_{Z_\alpha^s}, \quad 0 \leq s \leq r, \quad p \in \mathcal{P}_n, \quad (43)$$

было доказано в [13] (см. также [12]). Здесь $\alpha > -1$,

$$c^2(s, r, n, \alpha) = \frac{(n-r)!}{(n-s)!} \frac{\Gamma(n+s+1+2\alpha)}{\Gamma(n+r+1+2\alpha)},$$

$$|p|_{Z_\alpha^\nu}^2 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha+\nu} |D^\nu p|^2 dx.$$

Заметим, что $C(s, r, n, m) = c(s-m, r-m, n-m, 0)$, а оценка (43) при $\alpha = 0$ совпадает с (42) при $m = 0$. Пусть $m \geq 1$. В оценке (43) примем $\alpha = 0$ и произведем замены $n \rightarrow n-m$, $r \rightarrow r-m$, $s \rightarrow s-m$. Получим оценку

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{r-m} |D^{r-m} p|^2 dx \leq c^{-2}(s-m, r-m, n-m, 0) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{s-m} |D^{s-m} p|^2 dx,$$

где $p \in \mathcal{P}_{n-m}$. Выбирая здесь $p = D^m p_n$, придем к (42). Точность оценки (42) следует из точности обратного неравенства (43). $\square$

Следствие 3. Для любого $p \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, справедливы оценки

$$\|p\|_{H^{r,m}} \leq C n^{r-m} \|p\|_{H^m}, \quad r \geq m \geq 0. \quad (44)$$

Доказательство. Пусть $m+1 \leq \nu \leq r$. Согласно теореме 9 имеем

$$|p|_{H^{\nu,m}}^2 \leq C^{-2}(m, \nu, n, m) |p|_{H^{m,m}}^2 \leq C n^{2(r-m)} |p|_{H^m}^2.$$

Остается просуммировать эти неравенства по ν , $m+1 \leq \nu \leq r$, и добавить к результату очевидную оценку $\|p\|_{H^m}^2 \leq n^{2(r-m)} \|p\|_{H^m}^2$. $\square$

5. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ

Из оценок (41), (44) и результатов статьи [3] непосредственно следуют прямая и обратная теоремы аппроксимации в случае, когда погрешность аппроксимации измеряется в норме пространства Соболева H^m (см. теорему 1). Дополнительная оценка (46) будет полезна при изучении аппроксимаций кусочно-полиномиальными функциями.

5.1. Оценки в пространствах Соболева. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$, $s > m$. Определим $r = [s] + 1$, где $[s]$ есть целая часть s . Пусть далее $B_{2,q}^{s,m}$ есть интерполяционное весовое пространство Бесова, определяемое K -методом:

$$B_{2,q}^{s,m} = (H^m, H^{r,m})_{\theta,q}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (45)$$

где $\theta = (s - m)/(r - m)$, $0 < \theta < 1$. Напомним, что $H^m = H^{m,m}$. В следующей теореме интерес представляет наиболее широкое пространство $B_{2,\infty}^{s,m}$.

Теорема 10. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m + 1$. Пусть также $f \in B_{2,\infty}^{s,m}$ для некоторых $m < s < n$. Тогда

$$\|f - \Pi_{n-1,m} f\|_{H^m} \leq C n^{-(s-m)} \|f\|_{B_{2,\infty}^{s,m}}. \quad (46)$$

Доказательство. Пусть $r = [s] + 1$, $\theta = (s - m)/(r - m)$. Оценка (46) получается стандартной интерполяцией из оценок (40). Действительно, в силу (40) линейный оператор $T = I - \Pi_{n-1,m}$ ограниченно отображает H^m в H^m и $H^{r,m}$ в H^m с нормами $M_1 = C$ и $M_2 = C n^{-(r-m)}$ соответственно. Согласно интерполяционной теореме 2 заключаем, что T также ограниченно отображает промежуточное пространство $B_{2,\infty}^{s,m}$ в H^m с нормой $M \leq M_1^{1-\theta} M_2^\theta = C n^{-(s-m)}$, т. е. справедлива оценка (46). $\square$

Теорема 11. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in B_{2,\infty}^{s,m}$ при $m < s < n$. Тогда

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p\|_{H^m} \leq C n^{-(s-m)} \|f\|_{B_{2,\infty}^{s,m}}.$$

Обратно, пусть $f \in H^m$ и для любого $n = 1, 2, \dots$ найдется $\psi_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ такой, что при $s > m$ и постоянной A , не зависящей от n ,

$$\|f - \psi_{n-1}\|_{H^m} \leq A n^{-(s-m)}.$$

Тогда $f \in B_{2,\infty}^{s,m}$ и $\|f\|_{B_{2,\infty}^{s,m}} \leq C (A + \|f\|_{H^m})$, где постоянная C не зависит от n , A и f .

Доказательство. Утверждения теоремы следуют из оценок (41), (44) и теоремы 1. Действительно, если принять $X = H^m$, $Y = H^{r,m}$, $r = [s] + 1$, $S_n = \mathcal{P}_{n-1}$, а также $\alpha = r - m$ и $\gamma = s - m$, то $0 < \gamma < \alpha$, $(X, Y)_{\theta,\infty} = B_{2,\infty}^{s,m}$ при $\theta = \gamma/\alpha$. $\square$

5.2. Оценки в пространствах Бесова. Напомним доказанные нами неравенства типа Джексона и Бернштейна в пространствах Соболева. Для всех целых $0 \leq m \leq r \leq n$, $n = 1, 2, \dots$, справедливы оценки

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p\|_{H^m} \leq C n^{-(r-m)} \|f\|_{H^{r,m}}, \quad (47)$$

$$\|p\|_{H^{r,m}} \leq C n^{r-m} \|p\|_{H^m}, \quad p \in \mathcal{P}_n. \quad (48)$$

Искомые неравенства типа Джексона и Бернштейна в пространствах Бесова получим интерполяцией этих оценок по m . В связи с этим для заданных целых $r \geq m \geq 1$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \in (0, m)$, определим новое весовое пространство Бесова

$$B_{2,q}^{r,t,m} = (H^{r,0}, H^{r,m})_{\vartheta,q}, \quad \vartheta = t/m, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Напомним, что $B_{2,q}^t = (L_2, H^m)_{\vartheta,q}$, где $\vartheta = t/m \in (0, 1)$, есть обычное пространство Бесова (см. (11)). Оно не зависит от выбора m .

Теорема 12. Пусть $m, r, n \in \mathbb{N}$ и $f \in B_{2,q}^{r,t,m}$ для некоторых $m \leq r \leq n$, $t \in (0, m)$ и $1 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p\|_{B_{2,q}^t} \leq C n^{-(r-t)} \|f\|_{B_{2,q}^{r,t,m}}, \quad (49)$$

$$\|p\|_{B_{2,q}^{r,t,m}} \leq C n^{r-t} \|p\|_{B_{2,q}^t}, \quad p \in \mathcal{P}_n. \quad (50)$$

Доказательство. Для доказательства (49) заметим, что

$$\|f\|_{F_m} = \inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p\|_{H^m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

является нормой на фактор-пространстве $F_m = H^m / \mathcal{P}_{n-1}$. Дополним неравенство (47) таким же неравенством при $m = 0$. Получим

$$\|f\|_{F_0} \leq C n^{-r} \|f\|_{H^{r,0}}, \quad \|f\|_{F_m} \leq C n^{-(r-m)} \|f\|_{H^{r,m}}.$$

Следовательно, согласно теореме 2 справедлива также оценка

$$\|f\|_{F_{t,q}} \leq C n^{-(r-t)} \|f\|_{B_{2,q}^{r,t,m}}, \quad t \in (0, m), \quad (51)$$

поскольку $r(1-\vartheta) + (r-m)\vartheta = r-t$ при $\vartheta = t/m$. Здесь $F_{t,q} = (F_0, F_m)_{\vartheta,q} = (L^p/D, H^m/D)_{\vartheta,q}$, $D = \mathcal{P}_{n-1}$. Осталось заметить, что согласно теореме 3 имеем $F_{t,q} = B_{2,q}^t/D$. Это означает, что оценка (51) совпадает с (49). Аналогично получаются обратные неравенства (50) интерполяцией из оценок (48), если воспользоваться теоремой 2. $\square$

Прямую и обратную теоремы аппроксимации алгебраическими многочленами в пространствах Бесова сформулируем в виде единой теоремы. Для этого, определенные выше при целых $r \geq m$ пространства $B_{2,q}^{r,t,m}$, доопределим интерполяцией при вещественных r . А именно, для $s \in \mathbb{R}$, $s > m$, положим

$$B_{2,q,\infty}^{s,t,m} = (B_{2,q}^t, B_{2,q}^{r,t,m})_{\theta,\infty},$$

где $r = [s] + 1$, $\theta = (s - m)/(r - m)$, $1 \leq q \leq \infty$. В данной работе мы не касаемся важного вопроса об эквивалентных нормировках введенных нами интерполяционных весовых пространств Бесова $B_{2,\infty}^{s,m}$, $B_{2,q}^{s,t,m}$ и $B_{2,q,\infty}^{s,t,m}$. Это тема для отдельной работы.

Теорема 13. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in B_{2,q,\infty}^{s,t,m}$ для $0 \leq t < m < s < n$ и $1 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p\|_{B_{2,q}^t} \leq C n^{-(s-t)} \|f\|_{B_{2,q,\infty}^{s,t,m}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Обратно, пусть $f \in B_{2,q}^t$ для некоторых $0 < t < m$ и $1 \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Если существует многочлен $\psi_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ такой, что

$$\|f - \psi_{n-1}\|_{B_{2,q}^t} \leq A n^{-(s-t)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при $m < s < n$ и постоянной A , не зависящей от n , то $f \in B_{2,q,\infty}^{s,t,m}$ и

$$\|f\|_{B_{2,q,\infty}^{s,t,m}} \leq C \left(A + \|f\|_{B_{2,q}^t} \right),$$

где постоянная C не зависит от n , A и f .

Доказательство. Утверждения теоремы следуют из оценок (49), (50) и теоремы 1. Действительно, если принять $X = B_{2,q}^t$, $Y = B_{2,q}^{r,t,m}$, $r = [s] + 1$, $S_n = \mathcal{P}_{n-1}$, а также $\alpha = r - t$, $\gamma = s - t$, то $0 < \gamma < \alpha$ и $(X, Y)_{\theta,\infty} = B_{2,q,\infty}^{s,t,m}$ при $\theta = \gamma/\alpha$. $\square$

6. АППРОКСИМАЦИЯ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть далее $I = [a, b]$ есть отрезок конечной длины, задано $h > 0$ и целое $M = M(h)$. Введем на I равномерную сетку узлов $a = a_1 < a_2 < \dots < a_{M+1} = b$ и обозначим через $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M\}$ разбиение $[a, b]$ на элементы $\Delta_i = [a_i, a_{i+1}]$ длины $h = (b - a)/M$. Через ω_Δ обозначим сеточную весовую функцию на $[a, b]$:

$$\omega_\Delta(x) = 4(x - a_i)(a_{i+1} - x)/h^2, \quad x \in \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Отметим, что $\omega_\Delta|_{\Delta_i}$ есть образ функции $1 - \hat{x}^2$ при линейном преобразовании $[-1, 1] \rightarrow \Delta_i$; на $[a, b]$ справедливы оценки $0 \leq \omega_\Delta \leq 1$, $\omega_\Delta^{\nu-m} \geq 1$ при $\nu < m$.

Считая заданными целые $m \geq 1$ и $n \geq 2m$, определим пространство кусочно-полиномиальных функций — подпространство H^m (пространство алгебраических сплайнов степени $n - 1$ дефекта $n - m$):

$$S_{\Delta, n}^m = \{f \in C^{m-1}[a, b] : f|_{\Delta_i} \in \mathcal{P}_{n-1}, \quad i = 1, \dots, M\}.$$

Введем на нем полунормы

$$|f|_{H^{\nu, m}(\Delta_i)} = \left(\int_{\Delta_i} \omega_\Delta^{\nu-m} |D^\nu f|^2 dx \right)^{1/2}, \quad |f|_{H^{\nu, m}(\Delta)} = \left(\sum_{i=1}^M |f|_{H^{\nu, m}(\Delta_i)}^2 \right)^{1/2},$$

где $\nu \geq m$, а также нормы

$$\|f\|_{H^{r, m}(\Delta)} = \left(\|f\|_{H^m}^2 + \sum_{\nu=m+1}^r |f|_{H^{\nu, m}(\Delta)}^2 \right)^{1/2}, \quad r \geq m.$$

Мы рассматриваем равномерную сетку узлов и одинаковую степень многочленов на элементах разбиения лишь для упрощения изложения. Следствием доказанной ранее теоремы 8 является

Теорема 14. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq 2m + 1$, и $f \in H^{r, m}(\Delta)$ при $m \leq r \leq n$. Тогда найдется $s_\Delta \in S_{\Delta, n}^m$, удовлетворяющий условиям

$$D^\nu s_\Delta(a_i) = D^\nu f(a_i), \quad 0 \leq \nu \leq m - 1, \quad 1 \leq i \leq M + 1, \quad (52)$$

и такой, что при $0 \leq s \leq m$ справедливы оценки

$$|f - s_\Delta|_{H^s} \leq C(s, r, n, m) (h/2)^{r-s} |f|_{H^{r, m}(\Delta)}. \quad (53)$$

Кроме того, для любого $p_\Delta \in S_{\Delta, n}^m$

$$|p_\Delta|_{H^{r, m}(\Delta)} \leq C^{-1}(s, r, n, m) (h/2)^{-(r-m)} |p_\Delta|_{H^m}. \quad (54)$$

Здесь $C(s, r, n, m)$ определены в (23). Оценка (53) при $s = m$ и оценки (54) являются точными.

Доказательство. Определим проекцию s_Δ функции f поэлементно. Пусть $\Delta_i \in \Delta$ — произвольный элемент. Линейным преобразованием $\hat{x} = x_i(x)$ отображим Δ_i на стандартный элемент $\hat{\Delta} = [-1, 1]$, а функцию $f|_{\Delta_i}$ в $\hat{f}_i$. На $\hat{\Delta}$ определим аппроксимацию $\hat{s}_i = \Pi_{n-1, m} \hat{f}_i$ функции $\hat{f}_i$ так, как указано в (31), (32). Согласно оценке (34) имеем

$$\int_{-1}^1 (1 - \hat{x}^2)^{s-m} |\hat{D}^s(\hat{f}_i - \hat{s}_i)|^2 d\hat{x} \leq C^2(s, r, n, m) \int_{-1}^1 (1 - \hat{x}^2)^{r-m} |\hat{D}^r \hat{f}_i|^2 d\hat{x},$$

где $\hat{D} = d/d\hat{x}$. В этой оценке осуществим обратное линейное преобразование $\hat{\Delta} \rightarrow \Delta_i$. Получим

$$\int_{\Delta_i} \omega_{\Delta}^{s-m} |D^s(f - s_i)|^2 dx \leq C^2(s, r, n, m) (h/2)^{2(r-s)} \int_{\Delta_i} \omega_{\Delta}^{r-m} |D^r f|^2 dx. \quad (55)$$

Функцию $s_{\Delta} \in S_{\Delta, n}^m$ определим так, что $s_{\Delta}|_{\Delta_i} = s_i$. Тогда справедливость равенств (52), и, как следствие, включение $s_{\Delta} \in S_{\Delta, n}^m$, непосредственно обеспечиваются краевыми условиями (32), а искомая оценка (53) получается суммированием оценок (55) по всем i . Точность оценки (53) обеспечивается точностью использованной оценки (34).

Доказательство оценок (54) на основе теоремы 9 проводится аналогично. $\square$

Следствие 4. Для целых $m \geq 1$, $m \leq r \leq n$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \inf_{s \in S_{n, \Delta}^m} \|f - s\|_{H^m} &\leq C (n/h)^{-(r-m)} \|f\|_{H^{r, m}(\Delta)}, \quad n \geq 2m + 1, \\ \|p_{\Delta}\|_{H^{r, m}(\Delta)} &\leq C (n/h)^{r-m} \|p_{\Delta}\|_{H^m}, \quad p_{\Delta} \in S_{n, \Delta}^m, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от n и h .

Доказательство. Искомые оценки следуют из (53) и (54), если учесть оценки (28) величин $C(s, r, n, m)$. $\square$

6.1. Прямая и обратная теоремы. В оценках, полученных выше в этом разделе, присутствуют два параметра n и h . Прямую и обратную теоремы получим в случае фиксированной сетки (фиксированного разбиения Δ), считая свободным параметром n . В этом случае в оценках следствия 4 можно принять $h = 1$. На их основе, как и в случае аппроксимации алгебраическими многочленами, можно было бы получить прямую и обратную теоремы аппроксимации в пространствах Соболева H^m и Бесова $B_{2, q}^t$ (если дополнительно привлечь известные оценки погрешности наилучшего приближения в L_2 из [8]). Однако такой подход приводит к сложным интерполяционным пространствам вида $(X(\Delta), Y(\Delta))_{\theta, q}$, когда интерполируемые пространства являются весовыми и зависят от разбиения Δ . По этой причине мы ограничимся рассмотрением лишь случая, когда погрешность аппроксимации измеряется в пространстве Соболева H^m . Это позволит нам все рассмотрения свести к отдельным элементам и воспользоваться полученными ранее результатами.

С этой целью определим весовое пространство $B_{2, \infty}^{s, m}(\Delta)$, связанное с разбиением Δ . Пусть $x = \hat{x}_i(\hat{x})$ есть линейное преобразование $[-1, 1] \rightarrow \Delta_i$. Положим

$$\begin{aligned} B_{2, \infty}^{s, m}(\Delta_i) &= \{f : f \circ \hat{x}_i \in B_{2, \infty}^{s, m}(-1, 1)\}, \\ \|f\|_{B_{2, \infty}^{s, m}(\Delta_i)} &= \|f \circ \hat{x}_i\|_{B_{2, \infty}^{s, m}(-1, 1)}, \end{aligned}$$

где $f \circ g$ означает суперпозицию функций f и g , $B_{2, \infty}^{s, m}(-1, 1)$ — определенное ранее в (45) весовое пространство. Пространство

$$B_{2, \infty}^{s, m}(\Delta) = \{f \in H^m : f|_{\Delta_i} \in B_{2, \infty}^{s, m}(\Delta_i), 1 \leq i \leq M\}.$$

Норму в нем определим равенством

$$\|f\|_{B_{2, \infty}^{s, m}(\Delta)} = \left(\|f\|_{H^m}^2 + \sum_{i=1}^M \|f\|_{B_{2, \infty}^{s, m}(\Delta_i)}^2 \right)^{1/2}.$$

Теорема 15. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $f \in B_{2,\infty}^{s,m}(\Delta)$ при $m \leq s < n$. Тогда

$$\inf_{p \in S_{n,\Delta}^m} \|f - p\|_{H^m} \leq C n^{-(s-m)} \|f\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(\Delta)}, \quad n \geq 2m + 1, \quad (56)$$

где постоянная C не зависит от n . Обратно, пусть $f \in H^m$. Если для любого целого $n \geq 2m + 1$ существует элемент $\psi_{n-1,\Delta} \in S_{n,\Delta}^m$ такой, что

$$\|f - \psi_{n-1,\Delta}\|_{H^m} \leq A n^{-(s-m)} \quad (57)$$

при $s > m$ и постоянной A , не зависящей от n , то $f \in B_{2,\infty}^{s,m}(\Delta)$ и

$$\|f\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(\Delta)} \leq C (A + \|f\|_{H^m}), \quad (58)$$

где постоянная C не зависит от n , A и f .

Доказательство. Приведем прямое доказательство теоремы по аналогии с ([6], теорема 3.5), не опираясь на оценки следствия 4. Начнем с прямой оценки (56). Пусть, как и ранее, $x = x_i(\hat{x})$ есть линейное преобразование $[-1, 1] \rightarrow \Delta_i$. Положим $f_i = f|_{\Delta_i}$, $\hat{f}_i(\hat{x}) = f_i \circ x_i$, $\hat{x} \in [-1, 1]$. Согласно оценке (46)

$$\|\hat{f}_i - \Pi_{n-1,m} \hat{f}_i\|_{H^m(-1,1)}^2 \leq C n^{-2(s-m)} \|\hat{f}_i\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(-1,1)}^2. \quad (59)$$

Поскольку $\|g\|_{H^m(\Delta_i)} \leq C \|\hat{g}_i\|_{H^m(-1,1)}$ для любого $\hat{g}_i \in H^m(-1,1)$, и по определению имеем $\|f_i\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(\Delta_i)} = \|\hat{f}_i\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(-1,1)}$, то из (59) следует оценка

$$\|f - \Pi_{n-1,m} f\|_{H^m(\Delta_i)}^2 \leq C n^{-2(s-m)} \|f\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(\Delta_i)}^2.$$

Оценка $\|f - \Pi_{n-1,m} f\|_{H^m} \leq C n^{-(s-m)} \|f\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(\Delta)}$ получается отсюда суммированием по всем i , $1 \leq i \leq M$. Это доказывает (56). Докажем обратную оценку. Пусть $\psi_{n-1,\Delta} \in S_{n,\Delta}^m$ удовлетворяет (57). Аналогично предыдущему имеем

$$\|\hat{f}_i - \hat{\psi}_{n-1,i}\|_{H^m(-1,1)} \leq C \|f_i - \psi_{n-1,i}\|_{H^m(\Delta_i)} \leq C A n^{-(s-m)}.$$

Следовательно, согласно теореме 11 $\hat{f}_i \in B_{2,\infty}^{s,m}(-1,1)$ и

$$\|\hat{f}_i\|_{B_{2,\infty}^{s,m}(-1,1)}^2 \leq C (A + \|\hat{f}_i\|_{H^m(-1,1)})^2 \leq C (A^2 + \|f\|_{H^m(\Delta_i)}^2).$$

Оценка (58) получается отсюда после суммирования по всем $1 \leq i \leq M$. $\square$

7. ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Докажем оценку (5), следуя [3]:

$$E = \inf_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p\|_X \leq C (\|f - q\|_X + n^{-\alpha} \|q\|_Y), \quad q \in Y.$$

Здесь мы учли (3). Вычисляя нижнюю грань по всем $q \in Y$, получим

$$E \leq C n^{-\gamma} [n^{\alpha\theta} K(n^{-\alpha}, f, X, Y)] = C n^{-\gamma} F(n, f).$$

Отсюда в силу (9) следует искомая оценка (5), поскольку

$$F(n, f) \leq \sup \{F(n, f), n \geq 1\} = \|f\|_{(X,Y)_{\theta,\infty}}.$$

Докажем обратное утверждение, точнее оценку (5), следуя ([6], теорема 3.3). Пусть $n_\ell = 2^\ell$, $\ell = 0, 1, \dots$. Обозначим через $\phi_\ell \in S_{n_\ell}$ многочлен наилучшего приближения f в X . Из определения (10) функционала K следует

$$K(t, f) = K(t, f, X, Y) \leq \|f - \phi_\ell\|_X + t \|\phi_\ell\|_Y = K_1 + tK_2. \quad (60)$$

Оценим K_1 и K_2 :

$$K_1 = \|f - \phi_\ell\|_X = E_n(f)_X \leq \|f - s_{n_\ell}\|_X \leq A n_\ell^{-\gamma}; \quad (61)$$

при оценке K_2 учтем, что $\|\phi_0\|_X \leq 2\|f\|_X$:

$$K_2 = \|\phi_\ell\|_Y = \left\| \phi_0 + \sum_{\nu=1}^{\ell} (\phi_\nu - \phi_{\nu-1}) \right\|_Y \leq \|\phi_0\|_Y + \sum_{\nu=1}^{\ell} \|\phi_\nu - \phi_{\nu-1}\|_Y.$$

Воспользуемся здесь обратными неравенствами (4) и оценкой (61). Получим

$$\begin{aligned} \|\phi_\ell\|_Y &\leq C \left(\|\phi_0\|_X + \sum_{\nu=1}^{\ell} n_\nu^\alpha \|\phi_\nu - \phi_{\nu-1}\|_X \right) \leq \\ &\leq C \left(\|f\|_X + \sum_{\nu=1}^{\ell} n_\nu^\alpha (\|f - \phi_\nu\|_X + \|f - \phi_{\nu-1}\|_X) \right) \leq \\ &\leq C \left(\|f\|_X + A \sum_{\nu=1}^{\ell} n_\nu^\alpha (n_\nu^{-\gamma} + n_{\nu-1}^{-\gamma}) \right) = C (\|f\|_X + A S_\ell). \end{aligned} \quad (62)$$

Поскольку $n_\nu = 2n_{\nu-1}$ и $\alpha - \gamma > 0$, то

$$S_\ell \leq 2^{\gamma+1} \sum_{\nu=1}^{\ell} n_\nu^{\alpha-\gamma} \leq 2^{\gamma+1} n_\ell^{\alpha-\gamma} \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha-\gamma}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-\gamma)}} + \dots \right) \leq C n_\ell^{\alpha-\gamma},$$

где постоянная C зависит только от α и γ . Следовательно, из (62) следует оценка

$$\|\phi_\ell\|_Y \leq C (A + \|f\|_X) n_\ell^{\alpha-\gamma},$$

которая с учетом (60) и (61) приводит к неравенству

$$K(t, f) \leq C n_\ell^{-\gamma} (A + \|f\|_X) (1 + t n_\ell^\alpha). \quad (63)$$

При $0 < t < 1$ выберем ℓ так, что $t n_\ell^\alpha \approx 1$. А именно, положим $\ell = \left\lfloor -\frac{\log_2 t}{\alpha} \right\rfloor$. Тогда $t^{-1/\alpha} \leq n_\ell \leq 2t^{-1/\alpha}$, и из (63) получим, что $K(t, f) \leq C t^\theta (A + \|f\|_X)$, где $\theta = \gamma/\alpha$. Следовательно, $\|f\|_{(X,Y)_{\theta,\infty}} = \sup_{0 < t < 1} t^{-\theta} K(t, f) \leq C (A + \|f\|_X)$, т. е. $f \in (X, Y)_{\theta,\infty}$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jackson D. *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung* (Universität Göttingen, Preisschrift und Dissertation, 1911).
- [2] Бернштейн С.Н. *О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени*, в сб.: Сообщ. Харьковск. матем. общ-ва. Сер. 2, 49–194 (1912).
- [3] Petrushev P.P. *Direct and converse theorems for spline and rational approximation and Besov spaces*, в сб.: In: Cwikel, M., Peetre, J., Sagher, Y., Wallin, H. (eds), *Function Spaces and Applications*. Lect. Notes Math., 363–377 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1988).
- [4] DeVore R., Lorentz G.G. *Constructive Approximation* (Springer, Berlin, 1993).

- [5] Nikolski S.M. *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975).
- [6] Babuška I., Guo B.Q. *Direct and inverse approximation theorems for the p -version of the finite element method in the framework of weighted Besov spaces, Part III: Inverse approximation theorems*, J. Approx. Theory **173**, 122–157 (2013).
- [7] Timan A.F. *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable* (Pergamon, Oxford, 1963).
- [8] Schumaker L.L. *Spline Functions: Basic Theory* (Wiley, New York, 1981).
- [9] Triebel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators* (North-Holland, Amsterdam, 1978).
- [10] Nicaise S. *Jacobi polynomials, weighted Sobolev spaces and approximation results of some singularities*, Math. Nachrichten **213**, 117–140 (2000).
- [11] Babuška I., Guo B.Q. *Direct and inverse approximation theorems of the p -version of the finite element method in the framework of weighted Besov spaces, Part I: Approximability of functions in weighted Besov spaces*, SIAM J. Numer. Anal. **39** (5), 1512–1538 (2002).
- [12] Dautov R.Z., Timerbaev M.R. *Sharp estimates for the polynomial approximation in weighted Sobolev spaces*, Diff. Equat. **51** (7), 886–894 (2015).
- [13] Guessab A., Milovanović G.V. *Weighted L^2 -analogues of Bernstein's inequality and classical orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **182** (1), 244–249 (1994).
- [14] Babuška I., Guo B.Q. *Optimal estimates for lower and upper bounds of approximation errors in the p -version of the finite element method in two dimensions*, Numer. Math. **85** (2), 219–255 (2000).
- [15] Babuška I., Guo B.Q. *Direct and inverse approximation theorems of the p -version of the finite element method in the framework of weighted Besov spaces, Part II: Optimal rate of convergence of the p -version finite element solutions*, Math. Models Methods Appl. Sci. **12** (5), 689–719 (2002).
- [16] Widlund O. *On best error bounds for approximation by piecewise polynomial functions*, Numer. Math. **27**, 327–338 (1977).
- [17] Babuška I., Kellogg R.B., Pitkäranta J. *Direct and inverse error estimates for finite elements with mesh refinements*, Numer. Math. **33**, 447–471 (1979).
- [18] Szego G. *Orthogonal Polynomials*. 4th ed. Amer. Math. Soc. Collog. Publ. **23** (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975).
- [19] Guo B.-Y., Shen J., Wang L.-L. *Generalized Jacobi polynomials/functions and their applications*, Appl. Numer. Math. **59** (5), 1011–1028 (2009).
- [20] Даутов Р.З. *Прямые и обратные теоремы аппроксимации функций алгебраическими полиномами и сплайнами в нормах пространства Соболева*, Изв. вузов. Матем. (6), 79–86 (2022).
- [21] Кудрявцев Л.Д. *Об эквивалентных нормах в весовых пространствах*, Тр. МИАН СССР **170**, 161–190 (1984).
- [22] de-Vore R., Scherer K. *Interpolation of linear operators on Sobolev spaces*, Ann. of Math. **109**, 583–599 (1979).
- [23] Schwab C. *p - and hp - finite element methods: theory and applications to solid and fluid mechanics*. Numer. Math. Sci. Comput. (Oxford University Press, Oxford, 1999).

Рафаил Замилович Даутов

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: rdautov@kpfu.ru

R.Z. Dautov

Theorems on direct and inverse approximation by algebraic polynomials and piecewise polynomials in the spaces $H^m(a, b)$ and $B_{2,q}^s(a, b)$

Abstract. The best estimates for the approximation error of functions, defined on a finite interval, by algebraic polynomials and piecewise polynomial functions are obtained in the case when the errors are measured in the norms of Sobolev and Besov spaces. We indicate the weighted Besov spaces, whose functions satisfy Jackson-type and Bernstein-type inequalities and, as a consequence, direct and inverse approximation theorems. In a number of cases, exact constants are indicated in the estimates.

Keywords: best approximation by polynomials, orthogonal polynomial, sharp error estimate, Bernstein's inequality, Jackson's inequality, direct and inverse theorems.

Rafail Zamilovich Dautov

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: rdautov@kpfu.ru