Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №1, с. 3–13 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Т.И. БЕЛОУС, А.М. ГАЙСИН, Р.А. ГАЙСИН

ОЦЕНКА СУММЫ РЯДА ДИРИХЛЕ НА ДУГЕ ОГРАНИЧЕННОГО НАКЛОНА

Аннотация. В статье речь идет о поведении суммы ряда Дирихле $F(s)=\sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0<\lambda_n\uparrow\infty$, абсолютно сходящегося в левой полуплоскости Π_0, на кривой γ, произвольным образом приближающейся к мнимой оси — границе этой полуплоскости. Нами получено решение следующей задачи: при каких условиях на γ будет справедливо усиленное асимптотическое соотношение типа Полиа для суммы $F(s)$ ряда Дирихле, т. е. когда аргумент s стремится к мнимой оси вдоль γ по достаточно массивному множеству.

Ключевые слова: ряд Дирихле, лакунарный степенной ряд, максимальный член, кривая ограниченного наклона, полуплоскость сходимости.

УДК: 517.53

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-1-3-13

Введение

Статья посвящена оценке суммы ряда Дирихле, сходящегося лишь в полуплоскости, на дуге ограниченного наклона. В отличие от случая произвольных кривых, в данном случае можно получить более сильные оценки, а именно — точные асимптотические равенства, справедливые всюду на полуинтервале $[-1, 0)$ вне некоторого исключительного множества. Подобным исследованиям, связанным с асимптотикой целых функций, заданных лакунарными степенными рядами

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad a_n \neq 0, \ \ p_n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

или их общениями — рядами Дирихле, посвящены многочисленные работы (см., например, [1]). В ряде статей была обнаружена тесная связь между асимптотическими свойствами рядов Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, и аппроксимативными свойствами системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ на дугах. Наиболее полно эти вопросы исследовались в работах [2], [3], где были получены результаты законченного характера по проблеме неполноты системы экспонент на дугах. Но случай, когда область сходимости ряда (1) есть круг $D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$ или область сходимости ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \ \ s = \sigma + it, \ \ 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{2}$$

Поступила в редакцию 23.12.2022, после доработки 06.02.2023. Принята к публикации 29.03.2023.

— полуплоскость $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$, исследован недостаточно. Нас интересует самая общая ситуация, когда на рост суммы ряда не накладываются никакие ограничения сверху. Этот случай впервые был рассмотрен, как нам известно, в работе [4]. Вкратце остановимся на основных результатах этой работы.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Введем также следующие функции распределения точек $\lambda \in \Lambda$:

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1, \quad N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x} dx.$$

Пусть L — класс всех положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть W — класс сходимости, т. е.

$$W = \left\{ w \in L : \int\limits_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\},$$

а

$$W_\varphi = \left\{ w \in W : \lim_{t\to\infty} \varphi(t) J(t; w) = 0 \right\},$$

$$\underline{W}_\varphi = \left\{ w \in W : \underline{\lim_{t\to\infty}} \varphi(t) J(t; w) = 0 \right\},$$

где $\varphi \in L$,

$$J(t; w) = \int\limits_t^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx.$$

Через H обозначим подкласс L, состоящий из всех функций Φ, для которых

$$1) \ \sup_{t>0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} = C < \infty; \quad 2) \ \frac{\varphi(t)\ln t}{t} = o(1), \ t \to \infty,$$

где φ — функция, обратная к Φ.

Теорема 1 ([4])**.** *Пусть $\Phi \in H$ и*

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (2).

Если для некоторой функции $w \in W$

$$-\ln |Q'(\lambda_n)| \le w(\lambda_n), \quad n \ge 1, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

причем $\varphi(t)J(t; w + N) = o(1)$, $t \to \infty$, то при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности

$$de = \underline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\mathrm{m}(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}$$

справедливо равенство

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|, \tag{3}$$

где $M_F(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$.

Если выполняется более сильное условие

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

то равенство (3) *имеет место вне некоторого множества* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой верхней плотности* (*нулевой плотности*)

$$De = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\mathrm{m}(\mathrm{e} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}.$$

В настоящей работе получены более общие результаты, а именно, оценки типа (3) для дуг $\gamma \subset \Pi_0$ ограниченного наклона, оканчивающихся на мнимой оси. По определению дуга γ имеет ограниченный наклон, если она задается уравнением $y = g(x)$, $a \le x \le b$, причем выполняется условие Липшица

$$\sup_{x_1\ne x_2} \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = K < \infty. \tag{4}$$

Условие (4) означает, что тангесы углов всех хорд с положительной осью по модулю не превосходят K. В этом случае дугу γ для кратности будем называть дугой K-ограниченного наклона.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in L$, $w \in \underline{W}_{\varphi}$, *где* $w(x) = N(ex)$. *Если функции* φ *и* w *согласованы, т. е.*

$$\frac{w(x)\varphi(x)}{x} = o(x), \quad x \to \infty,$$

максимальный член ряда (2) *удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)} > 0$$

(Φ — *функция, обратная к* φ), *а для некоторой функции* $\widetilde{w} \in W_{\varphi}$

$$-\ln |Q'(\lambda_n)| \le \widetilde{w}(\lambda_n), \qquad n \ge 1, \tag{5}$$

то для любой дуги γ K*-ограниченного наклона, заданной на* $[-1, 0)$, *при* $s \in \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ *по асимптотическому множеству* $A \subset [-1, 0)$, *верхняя плотность которого*

$$DA = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\mathrm{m}(\mathrm{A} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \ge \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{K}^2}},$$

справедливо соотношение типа Полиа

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(s)|, \quad s \in \gamma, \quad s = \sigma + it. \tag{6}$$

В конце статьи приведена теорема 3, двойственная к теореме 2, в которой ослаблено условие роста максимального члена ряда.

В отличие от работы [1], где исследуются целые ряды Дирихле, в случае полуплоскости возникают существенно новые трудности, связанные с оценкой размеров исключительных множеств. Поэтому в задачах, рассматриваемых здесь, предполагается выполнение некоторых оценок снизу для максимального члена ряда. Эти оценки вполне естественны и встречались ранее в других задачах (см., например, [4], [5]). Указанные оценки для $\ln \mu(\sigma)$ снизу и позволяют получить необходимые оценки для мер исключительных множеств из $[-1,0)$.

1. Доказательство теоремы 2

Пусть L — класс всех положительных, непрерывных и неограничено возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть W, W_φ, $\underline{W}_\varphi$ — классы функций, введенные выше.

Будем говорить, что две функции φ и w из класса L согласованы, если $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}\,(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность вещественных чисел, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n},$$

а

$$n(t) = \sum_{\lambda_j \le t} 1, \quad N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx.$$

В этом случае

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

является целой функцией экспоненциального типа (см., например, [6]).

Пусть ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{7}$$

сходится в полуплоскости $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$. Через $\mu(\sigma)$ обозначим максимальный член ряда (7).

Пусть $e \subset [-1,0)$ — измеримое по мере m Лебега множество. Напомним, что верхней De и нижней de плотностями называются величины

$$De = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{m(e \cap [\sigma,0))}{|\sigma|}, \qquad de = \underline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{m(e \cap [\sigma,0))}{|\sigma|}.$$

Прежде, чем мы приступим к доказательству теоремы 2, сформулируем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть функция $g(z)$ аналитична и ограничена в круге $D(0,R) = \{z : |z| < R\}$, $|g(0)| \ge 1$. Если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, то существует не более чем счетное множество кружков*

$$V_n = \{z : |z - z_n| \le \rho_n\}, \quad \sum_n \rho_n \le R r^N (1-r), \tag{8}$$

таких, что для всех z из круга $\{z : |z| \le rR\}$, но вне кружков $\bigcup\limits_n V_n$, справедлива оценка

$$\ln|g(z)| \ge \frac{R-|z|}{R+|z|}\ln|g(0)| - 5NL, \tag{9}$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|g(\mathrm{Re}^{\,i\theta})|d\theta - \ln|g(0)|.$$

Лемма доказана в [7].

Доказательство. Пусть $w_1(x) = N(ex)$, $w_1 \in \underline{W}_{\,\varphi}$, $\widetilde{w} \in W_{\,\varphi}$ — функция из условия (5). Следовательно, функция $w(x) = w_1(x) + \widetilde{w}(x)$ принадлежит классу $\underline{W}_{\,\varphi}$. Далее, поскольку $\widetilde{w} \in W_{\,\varphi}$, то $\varphi(x)\widetilde{w}(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Но из условий теоремы следует, что $\varphi(x)w_1(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Тогда найдется функция $w^*(x) = \beta(x)w(x)$, $0 < \beta(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$, также принадлежащая $\underline{W}_{\,\varphi}$, $\varphi(x)w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma). \tag{10}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Далее, уравнение (10) можно представить в виде

$$w^*(v) = e^{u(\sigma)},$$

где $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln\mu(\sigma)$, $w^*(v) = \beta(v)w(v)$, $v = v(\sigma)$.

Поскольку $w^* \in \underline{W}_{\,\varphi}$, то найдется последовательность $\{\tau_j\}$, $\tau_j \uparrow 0$, такая, что

$$\lim_{v_j \to \infty} \varphi(v_j)J(v_j; w^*) = 0, \tag{11}$$

где $v_j = v(\tau_j) \to \infty$, $\tau_j \to 0-$, а

$$J(v_j; w^*) = \int\limits_{v_j}^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2}dx.$$

Из условия

$$\varliminf_{\sigma \to 0-} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

учитывая (10), при $\sigma' \le \sigma < 0$ имеем

$$w^*(v(\sigma)) = 3\ln\mu(\sigma) > \varepsilon_o\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right), \;\; \varepsilon_o > 0.$$

Но поскольку $w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то отсюда получаем

$$\frac{1}{|\sigma|} < \varphi(\varepsilon_o^{-1}w^*(v)) < \varphi(v),$$

где $v = v(\sigma)$, $\sigma' < \sigma'' \le \sigma < 0$. Следовательно, из (11) и условий согласованности функций φ и w^* имеем

$$\lim_{\tau_j \to 0-} \frac{1}{|\tau_j|}J(v_j; w^*) = 0, \quad v_j = v(\tau_j),$$

$$\lim_{\sigma \to 0-} \frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|v(\sigma)} = 0. \tag{12}$$

Из (12) видно, что при малых $|\sigma|$ величина $\sigma + \dfrac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)} < 0$. Следовательно, согласно лемме типа Бореля–Неванлинны ([8], лемма 3.2) при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$, $m(e_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$,

$$\mu(\sigma + 3h^*) \le \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \quad h^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \tag{13}$$

Следовательно, при $\sigma \to 0-$ вне e_1

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma} \le \mu(\sigma + h^*) \sum_{\lambda_j > v} e^{-h^* \lambda_j} \le C\mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp\{\max_{t \ge v} (\ln t - h^* t)\},$$

где $C = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_j} < \infty$, так как $w_1(x) = N(ex)$ принадлежит W.

Максимум функции $\psi(t) = \ln t - h^* t$ достигается в точке $t_\epsilon = \dfrac{1}{h^*} = \dfrac{v}{w^*(v)} < v$. Следовательно,

$$\max_{t \ge v} \psi(t) = \psi(v) = -w^*(v)\left[1 - \frac{\ln v}{w^*(v)}\right].$$

Поскольку

$$\frac{\ln v}{w^*(v)} \le \frac{\ln v}{N(ev)} \le \frac{\ln v}{N(v)} \le \frac{\ln v}{\int\limits_{\sqrt{v}}^{v} \frac{n(x)}{x} dx} \le \frac{\ln v}{n(\sqrt{v}) \ln \sqrt{v}} = \frac{2}{n(\sqrt{v})} = o(1), \quad v \to \infty,$$

то, очевидно, $\psi(v) = -(1 + o(1)) w^*(v) = -(1 + o(1)) 3 \ln \mu(\sigma)$ при $v \to \infty$. Следовательно,

$$R_v \le \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{14}$$

Значит, при $\sigma \in [\sigma'', 0) \backslash e_1$ имеем $\lambda_{\nu(\sigma)} \le v(\sigma)$, $\nu = \nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (7).

Пусть

$$F_a(s) = \sum_{\lambda_n \le a} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it.$$

Тогда для $\lambda_n \le a$ имеем [6]

$$a_n = e^{-\alpha\lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \varphi_n(t) F_a(t + \alpha) dt, \tag{15}$$

где α — произвольный параметр,

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{Q'_a(\lambda_n)} \int\limits_0^{\infty} \frac{Q_a(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad Q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n \le a} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \tag{16}$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$ — сопряженную диаграмму $Q_a(\lambda)$. Но $Q_a(\lambda)$ — полином, следовательно, $\overline{D} = \{0\}$.

Положим $a = v(\sigma)$, $\alpha = \sigma + i\tau$, где τ такое, что $\alpha \in \gamma$. В качестве C возьмем контур $\{t : |t| = h^{(1)}\}$, где $h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma) = \dfrac{h^*(\sigma)}{\sqrt{\beta(v(\sigma))}}$. Далее из (5), (10) следует, что для $\lambda_n \le v(\sigma)$ при $\sigma \to 0-$

$$\frac{1}{|Q'_v(\lambda_n)|} \le \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \le e^{\widetilde{w}(\lambda_n)} \le e^{\widetilde{w}(v)} = e^{o(w^*(v))} = \mu(\sigma)^{o(1)}.$$

Следовательно, из (15), (16) получаем, что для $\lambda_n \le v(\sigma)$ при $\sigma \to 0-$ вне e_1

$$|a_n|e^{\lambda_n\sigma} \le \mu(\sigma)^{o(1)}h^{(1)}\left[\max_{|\xi-\alpha|\le h^{(1)}}|F(\xi)| + \sum_{\lambda_j>v}|a_j|\ e^{\lambda_j(\sigma+h^{(1)})}\right]\int_0^\infty\left|\frac{Q_v(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right||e^{-\lambda t}||d\lambda|, \tag{17}$$

где $\alpha = \sigma + i\tau \in \gamma$.

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$ такое, что $|\lambda - \lambda_n| > 1$. Тогда

$$\left|\frac{Q_v(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right| \le |Q_v(\lambda)|. \tag{18}$$

В противном случае по принципу максимума модуля имеем

$$\max_{|\lambda-\lambda_n|\le 1}\left|\frac{Q_v(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}\right| = |Q_v(\lambda_o)|, \quad |\lambda_o - \lambda_n| = 1. \tag{19}$$

Поскольку $|\lambda_o - \lambda| \le 2$, а $|e^{-\lambda t}| \le e^{-rh^{(1)}}$ при $|t| = h^{(1)}$, то, учитывая, что $\lambda_{\nu(\sigma)} \le v(\sigma)$, а также (14), (18), (19) из (17) при $\sigma \to 0-$ вне e_1 получаем

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \le h^{(1)}\left[\max_{|\xi-\alpha|\le h^{(1)}}|F(\xi)| + \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}\right]\int_0^\infty M(r+2;Q_v)e^{-rh^{(1)}}dr. \tag{20}$$

Далее, учитывая определения величин $v = v(\sigma)$, $h^{(1)} = h^{(1)}(\sigma)$, а также неравенства $n(x) \le N(ex)$, $\ln(1+x^2) < x$, $x > 0$, имеем

$$\ln M(R;Q_v) = n(v)\ln\left(1+\frac{R^2}{v^2}\right) + 2R^2\int_0^v\frac{n(t)}{t(t^2+R^2)}dt \le$$

$$\le \frac{n(v)}{v}R + 2N(v) = o(1)h^{(1)}R + o(1)\ln\mu(\sigma), \quad R = r+2.$$

Следовательно, из (20) при $\sigma \to 0-$ вне e_1 вытекает

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \le \max_{|\xi-\alpha|\le h^{(1)}}|F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{21}$$

где $|\xi^* - \alpha| = h^{(1)}$, $\alpha = \sigma + i\tau \in \gamma$. Учитывая оценку (13), при $\sigma \to 0-$ вне e_1 также имеем

$$\mu(\sigma) \le M(\sigma) \le M(\sigma+2h^*) \le \sum_{n=1}^\infty |a_n|e^{\lambda_n(\sigma+2h^*)} \le$$

$$\le \mu(\sigma+3h^*)\left[n(v) + \sum_{\lambda_j>v(\sigma)} e^{-h^*\lambda_j}\right] < \mu(\sigma)^{1+o(1)}. \tag{22}$$

Пусть $B = [-1,0)\backslash e_1$, $h = \dfrac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}$. Тогда имеется последовательность $\{\sigma_j\}$, $\sigma_j \in B$, $\sigma_j \uparrow 0$, $\sigma_j + h_j \le \sigma_{j+1}$, $j \ge 1$, такая, что [4]

$$B \subset \bigcup_{j=1}^\infty [\sigma_j - h_j, \sigma_j + h_j],$$

где $B = [-1,0)\backslash e_1$, $h_j = \dfrac{w(v_j)}{v_j}$, $v_j = v(\sigma_j)$, $j \ge 1$.

Положим $g(z)=F(z+\xi^*)$. Из (21) видно, что $|g(0)|\geq 1$ при $\sigma''<\sigma'''\leq\sigma<0$ вне e_1. Применим лемму к функции $g(z)$, полагая в (21) $\sigma=\sigma_j$, $h^{(1)}=h_j^{(1)}=\dfrac{w(v_j)}{v_j}\sqrt{\beta(v_j)}$, а в оценках (8), (9) $N=4$, $r=\dfrac{1}{\sqrt{\beta(v_j)}}$, $R=2h_j^*$, где $h_j^*=\dfrac{w^*(v_j)}{v_j}$, $j\geq j_o$. Тогда в круге $\left\{z:|z|\leq 2h_j^{(1)}\right\}$, но вне исключительных кружков V_n с общей суммой радиусов

$$\sum_n \rho_n\leq 2\frac{h_j}{\beta_j},\quad \beta_j=\beta(v(\sigma_j)),\ \ j\geq j_o,\tag{23}$$

выполняется оценка (9). Поскольку круг $K_j=\{\xi:|\xi-\alpha_j|<h_j\}-\{\xi_j^*\}$ содержится в круге $\left\{z:|z|\leq 2h_j^{(1)}\right\}$, то для всех $z\in K_j$, но вне кружков V_{n_j} с общей суммой радиусов, удовлетворяющей оценке из (23), при $j\to\infty$ получаем

$$\ln|g(z)|\geq\left[1+o(1)-\frac{20L}{\ln|g(0)|}\right]\ln|g(0)|.\tag{24}$$

Учитывая (21), (22), а также неравенство $|g(0)|\geq 1$, убеждаемся в том, что при $j\to\infty$ выполняется равенство

$$\frac{L}{\ln|g(0)|}=o(1),$$

где

$$L=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|g(\mathrm{R}e^{i\theta})|d\theta-\ln|g(0)|,$$

$$g(0)=F(\xi^*),\quad |\mathrm{Re}\,\xi^*-\alpha_j|\leq h^{(1)},\ \alpha_j=\sigma_j+it_j\in\gamma.$$

Следовательно, из (24) для всех z из круга $\left\{z:|z|\leq h_j^{(1)}\right\}$, но вне кружков V_{n_j} при $j\to\infty$ имеем

$$\ln|g(z)|\geq(1+o(1))\ln|g(0)|.\tag{25}$$

Но тогда, учитывая, что $g(z)=F(z+\xi^*)$, и используя оценки (21)–(25), получаем, что для всех z из круга $\{z:|z-\alpha_j|\leq h_j\}$, $\alpha_j=\sigma_j+it_j\in\gamma$, но вне исключительных кружков V_{n_j} с общей суммой радиусов не больше $2\dfrac{h_j}{\beta_j}$, $j\geq j_o$,

$$\ln|F(z)|>(1+o(1))\ln\mu(\sigma_j),\ \ j\to\infty.\tag{26}$$

Пусть e_2 — проекция всех исключительных кружков всех кругов $\{z:|z-\alpha_j|\leq h_j\}$ на B, где $B=[-1,0)\backslash e_1$, $B\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}[\sigma_j-h_j,\sigma_j+h_j]$, $\sigma_j\in B$, $\sigma_j+h_j\leq\sigma_{j+1}$, $j\geq 1$. Покажем, что $De_2=0$. Действительно, пусть $\sigma_j\leq\sigma<\sigma_{j+1}$. Тогда, согласно (12) $h_j\leq h_j^{(1)}<h_j^*=o(\sigma_j)$, $j\to\infty$. Следовательно, учитывая оценку $\sum\limits_{k\geq j+1}h_k\leq|\sigma|$, получаем

$$\frac{m(e_2\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}\leq\frac{2h_j}{|\sigma_j+h_j|\beta_j}+\frac{2}{|\sigma|}\sum_{k\geq j+1}\frac{h_k}{\beta_k}\leq\frac{2h_j}{|\sigma_j|\beta_j(1+o(1))}+\frac{2}{\beta_{j+1}}=o(1),\ \ j\to\infty.$$

Значит, $De_2=0$, а следовательно, если положить $e=e_1\cup e_2$, то $de=0$. Здесь учтено, что $De_2=0$, $de_1=0$.

Оценка (26) имеет место в каждом круге

$$K'_j = \{z : |z - \alpha_j| \le h_j\}, \quad \alpha = \sigma_j + it_j \in \gamma,$$

но вне исключительных кружков V_{n_j}, общая сумма радиусов которых удовлетворяет оценке (23).

Оценим меру проекции p_j дуги $\gamma_j = \gamma \cap K'_j$ на отрезок $[a_j, b_j]$, где $a_j = \sigma_j - h_j$, $b_j = \sigma_j + h_j$. Обозначая через $\beta = \eta + i\mu$ правый конец дуги γ (она принадлежит окружности $\partial K'_j$), имеем

$$h_j^2 = (\eta - \sigma_j)^2 + [g(\eta) - g(\sigma_j)]^2 \le (K^2 + 1)(\eta - \sigma_j)^2$$

(дуга γ ограниченного K-наклона задана уравнением $y = g(x)$, $-1 \le x \le 0$). Как видно, мера проекции γ_j на отрезок $[\sigma_j, b_j]$ не меньше $\dfrac{h_i}{\sqrt{K^2+1}}$. То же самое верно и для проекции γ_j на $[a_j, \sigma_j]$. Так что

$$mp_j = \eta - \mu \ge \frac{2}{\sqrt{K^2+1}} h_j.$$

Отсюда следует, что верхняя плотность DP множества $P = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} p_j$ не меньше $\dfrac{1}{\sqrt{K^2+1}}$.

Пусть $\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная в рассмотрение выше, для нее

$$\frac{m(e \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \to 0$$

при $\tau_j \to 0-$. Положим $A = P \setminus e$. На этом множестве выполняются асимптотические оценки (22), (26) (A называется асимптотичеким множеством). Откуда следует, что при $s = \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ по множеству A

$$\ln |F(s)| = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma).$$

Осталось оценить меру DA:

$$DA = \varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{m(A \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|} \ge \varlimsup_{\tau_j \to 0-} \frac{m(P \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} - \lim_{\tau_j \to 0-} \frac{m(e \cap [\tau_j, 0))}{|\tau_j|} \ge \frac{1}{\sqrt{K^2+1}},$$

что и требовалось.

Теорема 2 доказана полностью. □

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in L$, $w \in W_\varphi$, где $w(x) = N(ex)$. Если максимальный член ряда* (2) *удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)} > 0$$

(Φ — функция, обратная к φ), а для некоторой функции $\widetilde{w} \in W_\varphi$ выполняются оценки (5)*, то для любой дуги γ K-ограниченного наклона, заданной на $[-1, 0)$, при $s \in \gamma$, $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ по некоторому асимптотическому множеству $A \subset [-1, 0)$, верхняя плотность которого не меньше $\dfrac{1}{\sqrt{1+K^2}}$, справедливо равенство* (6).

Теорема 3, в отличие от теоремы 1 из [4], доказана без дополнительных ограничений на функцию φ. Если в [4] требуется, чтобы $\Phi \in H$ (Φ обратная к φ), то в нашем случае функция φ подчинена минимальному ограничению: $\varphi \in L$. Кроме того, в теореме 3, как и в теореме 2, вместо $[-1, 0)$ рассматривается случай дуги γ ограниченного K-наклона.

Доказательство теоремы 3 почти ничем не отличается от доказательства теоремы 2. Разница лишь в том, что оценка (13) будет иметь место вне множества $e_1 \subset [-1, 0)$, $m(e_1 \cap [\tau_j, 0) = o(|\tau_j|)$ при $\tau_j \to 0-$, где выбор последовательности $\{\tau_j\}$ диктуется условием

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\dfrac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

а не условием (11). Полное доказательство теоремы 3 будет приведено в другой работе.

Литература

[1] Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых*, Матем. сб. **194** (8), 55–82 (2003).

[2] Гайсин А.М., Гайсин Р.А. *Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана.* II, Алгебра и анализ **27** (1), 49–73 (2015).

[3] Гайсин Р.А. *Интерполяционные последовательности и неполные системы экспонент на кривых*, Матем. сб. **212** (5), 58–79 (2021).

[4] Гайсин А.М. *Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости*, Изв. РАН, Сер. Матем. **58** (4), 173–185 (1994).

[5] Скаскив О.Б. *К теореме Вимана о минимуме модуля аналитических в единичном круге функций*, Изв. АН СССР, Сер. Матем. **53** (4), 833–850 (1989).

[6] Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент* (Наука, М., 1983).

[7] Гайсин А.М. *Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста*, Матем. заметки **50** (4), 47–56 (1991).

[8] Гайсин А.М., Белоус Т.И. *Максимальный член ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости: теорема об устойчивости*, Уфимск. матем. журн. **14** (3), 23–34 (2022).

Татьяна Ивановна Белоус

Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, д. 32, г. Уфа, 450076, Россия,

e-mail: belousti@yandex.ru

Ахтяр Магазович Гайсин

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,

e-mail: gaisinam@mail.ru

Рашит Ахтярович Гайсин

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук,
ул. Чернышевского, д. 112, г. Уфа, 450008, Россия,

e-mail: rashit.gajsin@mail.ru

T.I. Belous, A.M. Gaisin, and R.A. Gaisin

An estimate for the sum of a Dirichlet series on an arc of bounded slope

Abstract. The article considers the behavior of the sum of the Dirichlet series $F(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, which converges absolutely in the left half-plane Π_0, on a curve arbitrarily approaching the imaginary axis — the boundary of this half-plane. We have obtained a solution to the following problem: Under what additional conditions on γ will the strengthened asymptotic relation be valid in the case when the argument s tends to the imaginary axis along γ over a sufficiently massive set.

Keywords: Dirichlet series, lacunary power series, maximal term, curve of bounded slope, convergence half-plane.

Tatiana Ivanovna Belous

Ufa University of Science and Technology,
32 Zaky Validy str., Ufa, 450076 Russia,

`e-mail:` belousti@yandex.ru

Akhtyar Magazovich Gaisin

Institute of Mathematics with Computing Centre – Subdivision of the
Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevsky str., Ufa, 450008 Russia,

`e-mail:` gaisinam@mail.ru

Rashit Akhtyarovich Gaisin

Institute of Mathematics with Computing Centre – Subdivision of the
Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science,
112 Chernyshevsky str., Ufa, 450008 Russia,

`e-mail:` rashit.gajsin@mail.ru