Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, №12, с. 71–89 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.М. ШЕЛЕХОВ

ТРИ-ТКАНИ ИЗ ОКРУЖНОСТЕЙ

Аннотация. Найдено новое геометрическое условие, необходимое для регулярности криволинейной три-ткани. Рассмотрен класс три-тканей из окружностей, обобщающих регулярную три-ткань В. Бляшке из трех эллиптических пучков окружностей с попарно совпадающими вершинами, и показано, что в этом классе регулярными являются только ткани, эквивалентные ткани Бляшке.

Ключевые слова: криволинейная три-ткань, регулярная три-ткань, три-ткань из окружностей, три-ткань из пучков окружностей, граничная кривая три-ткани, сингулярный цикл три-ткани.

УДК: 514.763

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-12-71-89

Введение

Говорят, что три гладких семейства кривых на плоскости образуют в некоторой области D три-ткань, если в каждой точке этой области кривые семейства попарно трансверсальны. Следуя В. Бляшке [1], мы рассматриваем три-ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов: три-ткани W и $\widetilde{W}$, заданные в областях D и $\widetilde{D}$ соответственно, считаются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $D \to \widetilde{D}$, переводящий линии одной ткани в линии другой.

Простейшая три-ткань (ее называют параллельной) образована тремя семействами параллельных прямых. Три-ткань, эквивалентная параллельной ткани, называется параллелизуемой или регулярной. Нахождение подкласса регулярных тканей в заданном классе тканей — одна из важнейших задач в теории тканей, возникающая в разных приложениях этой теории. Задача об описании всех регулярных тканей из прямых решается теоремой Графа–Зауэра (см. [1]). Задача об описании всех регулярных тканей из окружностей была поставлена в совместной работе В. Бляшке и Г. Бола еще в 1938 г. [2] и не решена полностью до сих пор. Такие ткани используются, в частности, в задачах геометрического дизайна (см. [3] и библиографию там же). Нетривиальный пример регулярной ткани приведен В. Бляшке (см., например, [1]) — три эллиптических пучка окружностей с попарно совпадающими вершинами (далее три-ткань BW).

Три-ткани из окружностей рассматривались разными авторами (см. например, [4]–[7]).

Описание всех регулярных три-тканей, образованных пучками окружностей, дано в [8]–[10] (там они названы круговыми три-тканями) (см. также [11]).

Поступила в редакцию 09.12.2022, после доработки 09.12.2022. Принята к публикации 29.03.2023.

В [12] рассматривалась близкая задача: дана полная классификация регулярных специальных три-тканей из коник, которые высекаются на кубической поверхности V плоскостями пучков, оси которых лежат на V и расположены специальным образом: либо две из них пересекаются, либо одна из них пересекает остальные, либо все три лежат в одной плоскости.

В [13] построен дифференциально-геометрический аппарат для изучения три-тканей, образованных тремя произвольными семействами окружностей, которые названы тканями CW. Методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана получены структурные уравнения ткани CW, найден (в терминах подвижного репера) ее дифференциальный относительный инвариант — кривизна, обращение в нуль которой необходимо и достаточно для регулярности ткани. В [14] и [15] разными способами доказано, что существует всего два класса регулярных три-тканей, образованных декартовой сетью и семейством окружностей. В [15] также перечислены все регулярные три-ткани, образованные декартовой сетью и семейством кривых второго порядка.

В данной работе вводится обобщающее конфигурацию Томсена понятие особого цикла три-ткани — шестиугольника из линий ткани, соседние стороны которого касаются в точках граничной кривой. Доказывается (теорема 3), что на регулярной ткани особые циклы замыкаются.

В статье рассматривается класс регулярных тканей CW, у которых имеются три граничные кривые, одна из которых является окружностью, а две другие вырождаются в точки. Такие ткани мы обозначаем CW'. Показано (теорема 4), что любая регулярная три-ткань CW' эквивалентна ткани Бляшке BW.

1. Граничные кривые три-ткани

1.1. Пусть в некоторой области $\mathcal{O}$ плоскости заданы три семейства λ_i, $i = 1, 2, 3$, гладких кривых:

$$\lambda_i\colon\ \mathcal{F}_i(x, y, u_i) = 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{F}_i$ — гладкие функции, u_i — параметры семейств.

Семейства λ_i образуют в некоторой области $D \subset \mathcal{O}$ три-ткань W, если в этой области линии семейств образуют слоения и попарно трансверсальны. Обычно областью определения три-ткани W называют наибольшую область D такого рода.

Точки, в которых нарушается трансверсальность линий семейств λ_i и λ_j, мы называем *граничными*, а их совокупность — *границей* или *граничной кривой* и обозначаем Γ_{ij}. Координаты точки границы Γ_{ij} удовлетворяют уравнениям (1) и уравнению

$$\Gamma_{ij}\colon\quad \triangle_{ij} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначим через $\bar{D}$, $\bar{D} \supset D$, область, в которой семейства λ_i образуют слоения, т. е. могут быть записаны в виде

$$u_i(x, y) = \mathrm{const}, \tag{2}$$

тогда границы Γ_{ij} определяются уравнениями

$$\Gamma_{ij}\colon\quad \triangle_{ij} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} & \dfrac{\partial u_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x} & \dfrac{\partial u_j}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) выполняется, в частности, в случае, если первая строка нулевая, т. е. точка $M(x, y)$ является особой точкой слоя слоения $u_i(x, y) = \text{const}$. В этом случае точку $M(x, y)$ мы будем называть *особой граничной точкой три-ткани.* В частности, если линии ткани — окружности, то особая точка может быть только окружностью нулевого радиуса (например, нулевая окружность гиперболического или параболического пучка).

Пусть граничная кривая Γ_{ij} не вырождается в точку. Если параметры линий ткани, касающихся друг друга в точках границы Γ_{ij}, зависят от точки касания, то такие границы мы называем границами первого рода (см. [11]).

Если параметры линий ткани, касающихся друг друга вдоль границы Γ_{ij}, не зависят от точки касания, т. е. постоянны вдоль Γ_{ij}, то эта граница представляет собой общую линию двух семейств. Такие границы мы называем границами второго рода.

Если параметры линий одного семейства постоянны вдоль границы, а параметры линий другого меняются, то такая граница будет линией первого семейства, входящей в состав дискриминантной кривой второго семейства (в частности, будет огибающей линии другого семейства). Это граница третьего рода.

Отметим, что дискриминантные кривые семейства λ_i не входят в область $\bar{D}$, поэтому граничные кривые третьего рода находятся вне области $\bar{D}$. Таким образом, *задавая семейства линий ткани уравнениями* (2)*, мы исключаем из рассмотрения граничные кривые третьего рода.*

Границы Γ_{ij} могут содержать параболические точки, в которых касаются линии всех трех семейств ткани. Совокупность параболических точек мы называем параболической границей. Параболические границы также могут быть разного типа (см. [11]).

В параболической точке все определители $\triangle_{ij}$ обращаются в нуль. Но если, например, в точке M $\triangle_{12}= 0$ и $\triangle_{13}= 0$, но $\triangle_{23}\neq 0$, то в M $\dfrac{\partial u_1}{\partial x} \equiv u_{1x} = 0, \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \equiv u_{1y} = 0$, т. е. точка M является особой точкой слоя первого слоения. Таким образом, *особые непараболические граничные точки характеризуются тем, что в них только два из трех определителей* $\triangle_{ij}$ *обращаются в нуль.*

Пусть теперь граничная кривая Γ_{ij} вырождается в точку, обозначим последнюю M. Согласно определению граничной кривой в точке M касаются линии семейств λ_i и λ_j. Следовательно, все (в локальном смысле) линии этих семейств проходят через точку M, т. е. M — общая вершина семейств λ_i и λ_j. Обратно: пусть M — общая вершина семейств λ_i и λ_j, тогда через нее проходят все линии этих семейств, и каждая линия одного из семейств будет касаться в точке M некоторой линии другого из этих семейств. Согласно определению точка M будет граничной кривой.

Назовем граничные точки, которые являются вершинами семейств, *вершинными граничными точками три-ткани* или *вырожденными границами три-ткани.* Вершинные граничные точки входят в состав дискриминантных кривых семейства, поэтому находятся вне области $\bar{D}$. Таким образом, *задавая семейства линий ткани уравнениями* (2)*, мы исключаем из рассмотрения вершинные граничные точки.*

1.2. Исключив из уравнений (1) или (2) переменные x и y, получим уравнение

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{4}$$

которое связывает параметры линий три-ткани W, имеющих общую точку (x, y). Оно называется уравнением три-ткани W, а функция $F(u_1, u_2, u_3)$ называется функцией этой ткани. Отметим, что все переменные входят в F существенно.

Функция три-ткани определена с точностью до замены параметров в семействах λ_i, т. е. с точностью до локальных диффеоморфизмов вида $u_i \to u_i(\tilde{u}_i)$.

Обозначим через Φ гладкое отображение

$$u_i(x,y) \to u_i,\ (x,y) \in \bar{D},$$

в пространство параметров, которое для простоты будем полагать евклидовым[1]. Уравнение (4) определяет в пространстве параметров гладкую поверхность — образ отображения Φ, обозначим ее V.

Ранг Φ равен, вообще говоря, двум, но понижается в параболических точках. При этом образ параболической точки не является, вообще говоря, особой точкой поверхности V. В самом деле, рассмотрим ткань BW. Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины пучков окружностей, образующих ткань BW в области $\mathbb{R}^2/S$, где S — окружность, проходящая через точки A_i. Эта окружность принадлежит каждому из пучков, т. е. является параболической границей второго рода. Пусть M — произвольная точка плоскости. Обозначим через u_i угол A_jMA_k $(i,j,k$ все различны), причем угол будем считать острым, если точки A_i и M лежат по одну сторону от стороны A_jA_k, и тупым, если — по разные. Угол A_jMA_k является параметром пучка окружностей с вершинами A_j, A_k.

В частности, если $M \in S$, причем M и A_1 лежат на разных дугах с концами A_2, A_3, то $u_2 + u_3 = \pi - \angle A_2A_1A_3$, $u_1 = \pi + \angle A_2A_1A_3$. Если $M \equiv A_1$, то $u_1 + u_2 = \pi, u_3 = \pi$. Таким образом, при любом положении точки M на плоскости выполняется равенство $u_1+u_2+u_3 = 2\pi$, которое и является уравнением ткани. При этом функция ткани определена и в точках окружности S, т. е. в параболических точках, но поверхность V в данном случае является плоскостью и особых точек не имеет.

Предложение. *Пусть точка $M(x,y)$, $M(x,y) \in \bar{D}$, не является параболической и пусть в ней, например, линии первого и второго слоений трансверсальны. Если при этом точка $\tilde{M} = \Phi(M)$ не является особой точкой поверхности V, то в ней $F_3 \equiv \dfrac{\partial F}{\partial u_3} \neq 0$. Обратно: если точка $M(x,y)$, $M(x,y) \in \bar{D}$, не является параболической и в ней $F_3 \neq 0$, то в этой точке линии первого и второго слоений трансверсальны.*

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$F(u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y)) \equiv 0,$$

которое вытекает из определения уравнения ткани. Дифференцируя, получаем

$$F_1u_{1x} + F_2u_{2x} + F_3u_{3x} \equiv 0, \quad F_1u_{1y} + F_2u_{2y} + F_3u_{3y} \equiv 0. \tag{5}$$

Так как линии первого и второго слоений трансверсальны в точке M, то в этой точке

$$\triangle_{12} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому, если $F_3 = 0$, то из (5) получим $F_1 = F_2 = 0$, т. е. точка $\tilde{M}$ является особой, что противоречит условию. Следовательно, $F_3 \neq 0$.

Обратное доказывается также просто. □

Обобщая, можно сказать, что *в области непараболических точек хотя бы одна из производных F_i отлична от нуля.*

[1] Хотя пространство параметров можно считать римановым, наделив его какой-либо метрикой, в частности, инвариантно связанной с три-тканью ([1]).

В силу предложения в некоторой окрестности точки $\tilde{M}$ уравнение (4) неявно задает функцию $u_3 = f_3(u_1, u_2)$ так, что выполняется

$$F(u_1, u_2, f_3(u_1, u_2)) \equiv 0.$$

Отсюда получаем

$$F_1 + F_3 f_{31} \equiv 0, \; F_2 + F_3 f_{32} \equiv 0.$$

Так как $F_3 \neq 0$, то

$$F_1 = 0 \Leftrightarrow f_{31} = 0, \; F_2 = 0 \Leftrightarrow f_{32} = 0. \tag{6}$$

Плоскости $u_i = \mathrm{const}$ высекают на V три-ткань $\widetilde{W}$, которая эквивалентна (локально диффеоморфна) три-ткани W, поскольку ранг Φ равен двум. Три-ткань $\widetilde{W}$ не определена в особых точках поверхности V.

Обозначим через $\bar{W}_3$ три-ткань, полученную проектированием ткани $\widetilde{W}$ на плоскость переменных u_1, u_2. Она образована линиями $u_1 = \mathrm{const}$, $u_2 = \mathrm{const}$, $f_3(u_1, u_2) = \mathrm{const}$ и эквивалентна ткани $\widetilde{W}$. Равенство $f_{31} = 0$ ($f_{32} = 0$) выделяет граничные точки, в которых линии третьего семейства ткани $\bar{W}_3$ касаются линий второго семейства этой ткани (линии третьего семейства касаются линий первого семейства). Множества граничных точек образуют граничные кривые $\bar{\Gamma}_{23}$ и $\bar{\Gamma}_{13}$ соответственно. В силу (6) на ткани $\widetilde{W}$ им соответствуют граничные кривые $\tilde{\Gamma}_{23}$ и $\tilde{\Gamma}_{13}$, которые выделяются уравнениями $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ соответственно. На исходной ткани W им отвечают граничные кривые Γ_{23} и Γ_{13}.

В силу (5) особой (непараболической) граничной точке $u_{1x} = 0, u_{1y} = 0$ соответствуют на поверхности V точки, в которых $F_1 = F_2 = 0$, но $F_3 \neq 0$. Вследствие (6) этим точкам на плоскости переменных u_1, u_2 отвечают равенства $f_{31} = f_{32} = 0$, т. е. особые точки слоя третьего слоения $u_3(u_1, u_2) = \mathrm{const}$ ткани $\bar{W}_3$.

Ткани, аналогичные $\bar{W}_3$, возникают в окрестности непараболических точек и в плоскостях переменных u_1, u_3 и u_2, u_3. На ткани $\bar{W}_1$, например, границы выделяются равенствами $f_{12} = 0$ и $f_{13} = 0$, соответствующие им граничные кривые на V выделяются уравнениями $F_3 = 0$ и $F_2 = 0$ и т. д. Таким образом, *в области $\bar{D}$ границы три-ткани характеризуются тем, что на них одна из частных производных функции ткани обращается в нуль.* (Напомним, что эти границы не являются вершинами!)

В окрестности параболической точки ранг отображения Φ меньше двух, и поэтому проведенные рассуждения невозможны.

В дальнейшем мы идентифицируем эквивалентные три-ткани W, $\widetilde{W}$, $\bar{W}_3$ и т. д. и говорим просто о три-ткани W.

1.3. Компоненты 2 рода границы Γ_{23} находятся с помощью следующего утверждения.

Теорема 1 ([11]). *Пусть существуют такие значения параметров $u_2 = u_2^0$ и $u_3 = u_3^0$, при которых уравнение* (4) *три-ткани W тождественно удовлетворяется относительно параметра u_1. Тогда либо*

a) *значениям u_2^0 и u_3^0 соответствуют совпавшие линии семейств* (*граница второго рода, входящая в состав* Γ_3), *либо*

b) *точка пересечения линий $u_1 = a_1$ и $u_2 = a_2$ является вершиной третьего семейства.*

Таким образом, если компонента 2 рода границы Γ_{23} представляет собой совпавшие линии с параметрами u_2^0 и u_3^0, то должно выполняться тождество $F(u_1, u_2^0, u_3^0) \equiv 0$ относительно u_1. Отсюда, в частности, вытекают тождества $F_1(u_1, u_2^0, u_3^0) \equiv 0$, $F_{11}(u_1, u_2^0, u_3^0) \equiv 0$ и т. д.

Пусть ℓ — компонента 1 рода границы Γ_{23}. Согласно вышеизложенному параметры линий ткани вдоль ℓ связаны (в области $\bar{D}$), помимо уравнения ткани (4), еще уравнением $F_1(u_1, u_2, u_3) = 0$. Исключая из этих уравнений параметр u_1, получим соотношение

$g(u_2, u_3) = 0$, связывающее параметры касающихся линий, будем называть его уравнением границы ℓ в пространстве параметров или, короче, уравнением границы ℓ.

Для других границ Γ_{ij} результаты аналогичны.

1.4. Как показано в [15], верна

Теорема 2 ([15]). *Три-ткань $\widetilde{W}$ является регулярной тогда и только тогда, когда частные поизводные функции F (с учетом уравнения ткани (4)) имеют вид*

$$\begin{aligned} F_1 &= \Theta(u_1, u_2, u_3)\gamma_1(u_1)\pi_2(u_2)\rho_1(u_3), \\ F_2 &= \Theta(u_1, u_2, u_3)\gamma_2(u_1)\pi_1(u_2)\rho_1(u_3), \\ F_3 &= \Theta(u_1, u_2, u_3)\gamma_2(u_1)\pi_2(u_2)\rho_2(u_3), \end{aligned} \tag{7}$$

причем функции в правой части могут быть постоянными.

Поскольку невырожденные границы выделяются условием $F_i = 0$, то отсюда следует, что *невырожденными границами регулярной ткани $\widetilde{W}$ могут быть только линии $u_i = \mathrm{const}$, т. е. линии этой ткани.*

Но границы 2 и 3 рода являются линиями ткани по определению. Поэтому предыдущий вывод имеет содержательный смысл применительно к границам 1 рода: *невырожденными границами 1 рода регулярной ткани $\widetilde{W}$ могут быть только линии этой ткани.*

Теорема 2 дает следующий способ выделить подкласс регулярных тканей в заданном классе тканей. Пусть каждое из однопараметрических семейств (1) входит в более широкое семейство, зависящее от некоторого числа параметров $\{a\}$ (например, все окружности образуют трехпараметрическое семейство). Эти параметры войдут в уравнение ткани (4). Пусть ℓ — компонента первого рода границы Γ_{23}. Если три-ткань является регулярной, то ℓ — линия 1 семейства, обозначим ее параметр u_1^0. Тогда выполняются уравнения $F(u_1^0, u_2, u_3) = 0$ и $F_1(u_1^0, u_2, u_3) = 0$, каждое из которых представляет собой уравнение границы ℓ. Эти уравнения должны быть функционально зависимыми, поскольку уравнение границы должно быть одно. Это требование приводит к системе уравнений на параметры $\{a\}$. Для других границ рассуждения аналогичны.

1.5. Напомним локальное геометрическое описание регулярной три-ткани W. Пусть ABC — достаточно малый треугольник, образованный линиями m_1^0, m_2^0, m_3^0 этой ткани (см. рис. 1). Возьмем, например, на линии m_2^0 точку P (достаточно близкую к A) и проведем последовательно линии ткани $m_1, m_2, m_3, m_1', m_2', m_3'$, как показано на рис. 1. При этом в силу регулярности ткани линия m_3' пройдет через точку P. Построенная на рис. 1 конфигурация из девяти линий называется фигурой T (Томсена). Для краткости, шесть линий: $m_1, m_2, m_3, m_1', m_2', m_3'$, входящих в конфигурацию Томсена, будем называть циклом.

Меняя положение точки P на линии m_2^0, получим все циклы регулярной ткани, построенные на линиях m_1^0, m_2^0, m_3^0; в них входят все линии ткани W вне треугольника ABC.

Чтобы получить линии ткани внутри треугольника ABC, надо взять на одной из его сторон точку D и построить из линий ткани W треугольник $A'B'C'$, как показано на рис. 2. Далее строим циклы вокруг треугольника $A'B'C'$ и т. д. Таким образом, исходя из тройки линий m_1^0, m_2^0, m_3^0, мы получим все линии регулярной три-ткани W.

Пусть теперь m_1^0, m_2^0, m_3^0 — граничные кривые 1 рода. Как и выше, исходя из точки P, построим линии ткани $m_1, m_2, m_3, m_1', m_2', m_3'$. По определению границ в вершинах этого цикла линии ткани касаются друг друга. Такие циклы будем называть особыми.

Теорема 3. *Особые циклы регулярной три-ткани, построенные на граничных кривых* 1 *рода m_1^0, m_2^0, m_3^0, замыкаются* (*т. е. линия m_3' пройдет через точку P* (*см. рис.* 1)).

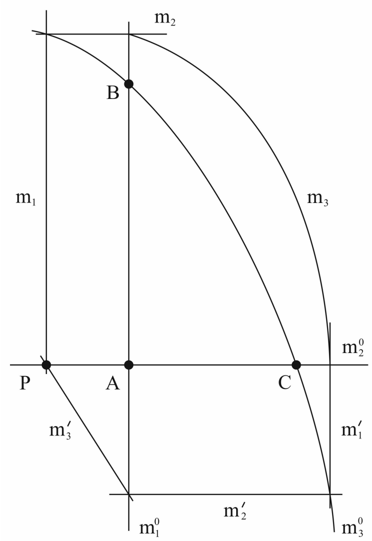

Рис. 1

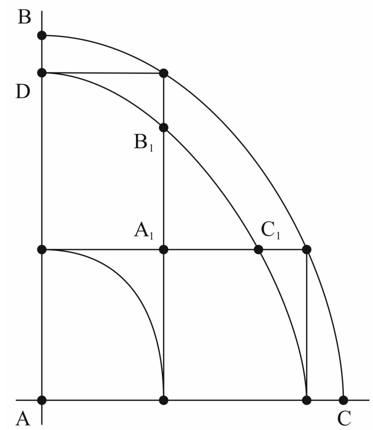

Рис. 2

Доказательство. Пусть, как и выше, u_i — параметры семейств линий ткани W и пусть граничным кривым m_1^0, m_2^0, m_3^0 отвечают параметры u_i^0. Рассмотрим в пространстве параметров путь $u_i(t), u_i(t^0) = u_i^0$. Так как граничные кривые не являются изолированными линиями семейств, то точке $u_i(t^0 + \triangle t)$ отвечает тройка $\tilde{m}_1^0, \tilde{m}_2^0, \tilde{m}_3^0$ линий ткани, близких к линиям m_1^0, m_2^0, m_3^0. При $\triangle t \to 0$ линии $\tilde{m}_1^0, \tilde{m}_2^0, \tilde{m}_3^0$ переходят в сответствующие линии m_1^0, m_2^0, m_3^0, замкнутые циклы, описанные около тройки линий $\tilde{m}_1^0, \tilde{m}_2^0, \tilde{m}_3^0$, — в особые циклы, описанные около тройки линий m_1^0, m_2^0, m_3^0, и это будет для любого пути через тройку m_1^0, m_2^0, m_3^0. Отсюда следует, что особые циклы также являются замкнутыми. □

Замечание 1. Из замыкания особых циклов не следует, вообще говоря, замыкания всех циклов, т. е. предложение 3 дает только необходимое условие регулярности.

Замечание 2. Особые циклы можно определить аналогичным образом и в случае, если некоторые из границ m_i^0 являются вырожденными, т. е. вершинами семейств. Но вершины семейств, вообще говоря, не являются линиями этих семейств, а если и являются таковыми, то не обязательно неизолированными. Поэтому доказательство теоремы 2 для них не проходит. Тем не менее, как мы увидим далее, утверждение теоремы 2 может оказаться верным и в случае изолированных вершин.

Рассмотрим три-ткань BW, описанную в п. 2. Обозначим через λ_i пучок с вершинами A_j, A_k. Выясним, что представляет собой особый цикл в случае, когда граничными кривыми m_1^0, m_2^0, m_3^0 являются вершины семейств λ_i.

Рассмотрим интерпретацию Дарбу многообразия окружностей в трехмерном проективном пространстве, в которой эллиптические пучки окружностей изображаются прямыми ℓ_i, не пересекающими овальную квадрику Дарбу — образ окружностей нулевого радиуса. Так как пучки λ_i имеют общую окружность S, проходящую через точки A_i, то прямые ℓ_i пересекаются в одной точке, обозначим ее также S. А так как окружности пучков λ_i и λ_j проходят через точку A_k, то плоскость, содержащая соответствующие прямые ℓ_i и ℓ_j, касается квадрики Дарбу, обозначим точку касания через m_k^0 (рис. 3).

Особому циклу на модели Дарбу соответствует следующая конфигурация. Берем на ℓ_1 произвольно точку m_1; через m_1 и m_3^0 проводим прямую, получаем на ℓ_2 точку m_2; через

m_2 и m_1^0 проводим прямую, получаем на ℓ_3 точку m_3, и далее аналогично получаем точки m_1', m_2', m_3' (т. е. прямая ℓ_i проектируется на прямую ℓ_j из точки m_k^0). При этом точки m_3', m_1, m_2^0 окажутся на одной прямой, т. е. конфигурация, соответствующая особому циклу, замыкается. Сам по себе этот факт в проективной геометрии известен и объясняется тем, что устанавливаемое таким образом соответствие между тремя прямыми ℓ_i является гомографией Годо (см., например, в [16]).

Выскажем предположение, что на всякой регулярной ткани замыкаются все особые циклы, в том числе и построенные на вырожденных границах.

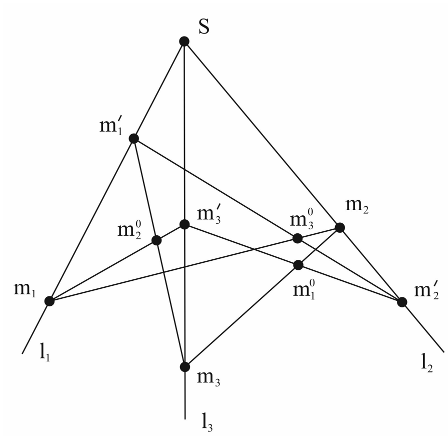

Рис. 3

2. Три-ткани CW

2.1. Окружность $S(a,b,c,d)$ будем задавать уравнением

$$S \equiv a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0.$$

Напомним, что билинейная форма

$$(S_1,S_2)=b_1b_2+c_1c_2-a_1d_2-a_2d_1 \tag{8}$$

называется скалярным произведением окружностей $S_1(a_1,b_1,c_1,d_1)$ и $S_2(a_2,b_2,c_2,d_2)$, причем угол между последними вычисляется по стандартной формуле

$$\cos\alpha=\frac{(S_1,S_2)}{\sqrt{(S_1,S_1)(S_2,S_2)}}. \tag{9}$$

Для определенности будем считать, что угол между окружностями есть угол между их радиусами, направленными из центров в общую точку этих окружностей.

Будем говорить, что окружности S_1 и S_2 находятся в отношении $R(S^0)$, если они a) касаются и b) точка касания лежит на третьей окружности S^0.

Лемма 1. *Окружности S_1 и S_2 находятся в отношении $R(S^0)$, если и только если выполнены соотношения*

$$(a_1d_2-a_2d_1)^2-4(b_1c_2-c_1b_2)^2=4(a_1b_2-b_1a_2)(b_1d_2-d_1b_2)+4(a_1c_2-c_1a_2)(c_1d_2-d_1c_2) \tag{10}$$

и

$$\begin{vmatrix} (S_1S_1) & (S_1S_2) & (S_1S^0) \\ (S_2S_1) & (S_2S_2) & (S_2S^0) \\ (S^0S_1) & (S^0S_2) & (S^0S^0) \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Доказательство. Соотношение (10) получается, например, из формул (9) и (8) при $\alpha = 0, \pi$.

Пусть точка касания окружностей S_1 и S_2 лежит на окружности S^0. Это означает, что окружности S_1, S_2 и S^0 принадлежат одной параболической связке, следовательно, равен нулю соответствующий определитель Грама (11). □

2.2. Семейства λ_i, $i = 1, 2, 3$, окружностей три-ткани CW зададим уравнениями

$$S_i(u_i) \equiv a_i(u_i)(x^2 + y^2) + 2b_i(u_i)x + 2c_1(u_i)y + d_i(u_i) = 0, \tag{12}$$

где u_i — параметр семейства λ_i.

Пусть три-ткань CW является регулярной, тогда согласно теории ее границы являются линиями этой ткани, т. е. окружностями. При этом каждая граница может распадаться на несколько компонент. Пусть $S^0_k, S^0_k \in \lambda_k$,

$$S^0_k \equiv a^0_k\big(x^2 + y^2\big) + 2b^0_k x + 2c^0_k y + d^0_k = 0 \tag{13}$$

— такие компоненты. Пусть, например, $S_1 \in \lambda_1$ и $S_2 \in \lambda_2$ — две окружности регулярной три-ткани CW, касающиеся в некоторой точке на граничной окружности S^0_3. Тогда окружности S_1 и S_2 находятся в отношении $R(S^0_3)$, и для них будут выполняться соответствующие соотношения (10) и (11).

Соотношения (10) и (11) устанавливают соотношение между параметрами u_1 и u_2 касающихся окружностей первых двух семейств. Поскольку такое соотношение должно быть одно, соотношения (10) и (11) должны быть функционально зависимыми, т. е. их якобиан тождественно равен нулю.

Таким образом, получается следующий подход к описанию регулярных тканей из окружностей, допускающих указанные три границы (13). Пусть семейства окружностей ткани записаны в виде (12).

1) Записываем для каждой из вершин цикла условия (10) и (11) и требуем замкнутости особых циклов.

2) Находим уравнение полученной три-ткани, частные производные функции ткани и требуем, чтобы последние в силу условий замкнутости a) имели указанный выше вид (7) и b) обращались в нуль на границах S^0_1, S^0_2, S^0_3. Как следует из вышеизложенного, перечисленные условия являются необходимыми для регулярности ткани.

Три-ткани CW можно рассматривать на конформной плоскости с точностью до круговых преобразований (которые являются локальными диффеоморфизмами). Тогда по крайней мере одну из граничных окружностей можно превратить в прямую, удалив одну из ее точек в бесконечность.

Отметим два простых случая.

A) *окружности всех трех семейств проходят через одну точку.* Удалим ее в бесконечность, тогда окружности всех трех семейств станут прямыми. Условие регулярности в этом случае дается, как известно, теоремой Графа-Зауэра: все три семейства прямых должны принадлежать одной кривой третьего класса.

B) *все три граничные окружности*: S^0_1, S^0_2, S^0_3 *являются вырожденными, т. е. будут вершинами семейств.* В этом случае окружности семейств λ_i и λ_j проходят через точку S^0_k, $i \neq j \neq k \neq i$. Таким образом, все окружности каждого из семейств проходят через две точки, т. е. образуют пучок — линейное семейство, и мы приходим к ткани BW.

3. Обобщение три-ткани BW

3.1. Рассмотрим более сложную ситуацию. Пусть три-ткань CW имеет в качестве одной из компонент границы Γ_{23} первого рода окружность S^0_1, а границы Γ_{13} и Γ_{12} имеют вырожденные компоненты первого рода — точки S_2^0 и S_3^0 соответственно. В дальнейшем символами Γ_{ij} обозначаются именно эти границы.

Поскольку окружности первого и третьего семейств ткани касаются в точке S_2^0, все окружности первого и третьего семейств проходят через S_2^0. Аналогично, все окружности первого и второго семейств проходят через S_3^0. Так как окружности первого семейств проходят через две точки, то они образуют линейное семейство — эллиптический пучок с вершинами S_2^0, S_3^0; точка S_3^0 (S_2^0) будет вершиной семейства λ_2 (λ_3).

По теореме о границах в случае регулярности граница S_1^0 должна быть линией первого семейства, следовательно, должна проходить через вершины S_2^0 и S_3^0 эллиптического пучка. Три-ткань, для которой это необходимое условие регулярности выполнено, обозначим CW'. Три-ткань CW' можно считать обобщением ткани BW, которая получится, если семейства λ_2 и λ_3 будут иметь общую вершину на S_1^0.

Выберем координаты следующим образом: S_1^0 — прямая $y = 0$, $S_2^0(0,0)$, $S_3^0(2b,0)$, тогда семейства λ_i три-ткани CW' задаются уравнениями

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 : S_1(u_1) \equiv x^2 + y^2 - 2bx + u_1 y = 0,\\
&\lambda_2 : S_2(u_2) \equiv a_2(u_2)(x^2 + y^2) + 2b_2(u_2)x + 2c_2(u_2)y - 4a_2(u_2)b^2 - 4bb_2(u_2) = 0,\\
&\lambda_3 : S_3(u_3) \equiv a_3(u_3)(x^2 + y^2) + 2b_3(u_3)x + 2c_3(u_3)y = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

(A) В случае $a_2(u_2) = 0$ и $a_3(u_3) = 0$ второе и третье семейства являются пучками прямых с вершинами в S_3^0 и S_2^0, в результате получается три-ткань, конформно эквивалентная ткани BW, у которой одна из вершин пучков удалена в бесконечность.

(B) В случае $a_3(u_3) = 0$, $a_2(u_2) \neq 0$ третье семейство ткани CW' есть пучок прямых, проходящих через точку S_2^0. Так как второе семейство состоит из окружностей, то из элементарных геометрических соображений ясно, что прямые пучка не могут касаться окружностей второго семейства в точках границы $y = 0$. Поэтому такой ткани CW не существует. (Исключение представляет случай, когда окружности второго семейства образуют параболический пучок с радикальной осью $y = 0$, тогда все они будут касаться этой оси; но границей Γ_{23} будет не вся прямая $y = 0$, а только одна точка — вершина параболического пучка $(2b, 0)$.)

(C) В случае $a_3(u_3) \neq 0$, $a_2(u_2) = 0$ с помощью аналогичных рассуждений приходим к такому же выводу.

Пусть теперь линии второго и третьего семейства не являются прямыми, т. е. $a_2(u_2) \neq 0$, $a_3(u_3) \neq 0$.

(D) Если при этом $b_3(u_3) = 0$, то уравнение третьего семейства принимает вид $x^2 + y^2 + u_3 y = 0$ — параболический пучок окружностей с радикальной осью $y = 0$ и линией центров — осью y. Очевидно, окружности этого пучка не могут касаться окружностей второго семейства в точках оси x, а это противоречит условию, что ось x — граница 1 рода второго и третьего семейств. Следовательно, такой регулярной ткани не существует.

(E) Если $b_2(u_2) = 0$, то уравнение второго семейства принимает вид $x^2+y^2+u_2y-4b^2 = 0$ — эллиптический пучок окружностей с вершинами $(\pm 2b, 0)$. Очевидно, окружности этого пучка не могут касаться окружностей третьего семейства в точках оси x, так как все окружности третьего семейства проходят через точку $(0, 0)$, которая находится между вершинами пучка λ_2. Опять получилось противоречие с условием, что ось x — граница 1 рода 2 и 3 семейств. Поэтому далее будем полагать $b_2(u_2) \neq 0$, $b_3(u_3) \neq 0$.

(F) Предположим, что $b_3/a_3 = c = \mathrm{const}$, тогда уравнение третьего семейства принимает вид $x^2 + y^2 + 2cx + u_3 y = 0$ — эллиптический пучок с вершинами $(0, 0)$, $(-2c, 0)$. По условию линии второго и третьего семейств должны касаться друг друга в точках оси x, поэтому окружности второго семейства могут касаться окружностей эллиптического пучка только в его вершинах. А значит, окружности второго семейства проходят, кроме точки $(2b, 0)$, еще и через одну из точек $(0, 0)$, $(-2c, 0)$. Те окружности, которые проходят через $(0, 0)$, являются одновременно и окружностями первого семейства, следовательно, во второе семейство входят только окружности, проходящие через точки $(2b, 0)$ и $(-2c, 0)$. Таким образом, и второе семейство должно быть пучком. В результате ткань образована тремя пучками окружностей с попарно совпадающими вершинами, и мы приходим к ткани BW.

(G) В случае $b_2/a_2 = c = \mathrm{const}$ рассуждаем аналогично. В этом случае уравнение второго семейства принимает вид $x^2 + y^2 + 2cx + u_2 y - 4b^2 - 4bc = 0$ — эллиптический пучок с вершинами $(2b, 0)$, $(-2(b + c), 0)$. Следовательно, окружности третьего семейства могут касаться окружностей второго (пучка) только в его вершинах. А значит, окружности третьего семейства проходят, кроме точки $(0, 0)$, еще и через одну из точек $(2b, 0)$, $(-2(b+c), 0)$. Те окружности, которые проходят через $(2b, 0)$, являются одновременно и окружностями первого семейства, следовательно, в силу гладкости рассматриваемых функций и локальности рассмотрения в третье семейство входят только окружности, проходящие через точки $(0, 0)$ и $(-2(b+c), 0)$. Таким образом, и третье семейство должно быть пучком. В результате ткань образована тремя пучками окружностей с попарно совпадающими вершинами, и мы приходим к ткани BW.

3.2. Рассмотрим наиболее общий случай: $a_2(u_2)$, $a_3(u_3)$, b_2/a_2 и b_3/a_3 отличны от нуля и не являются постоянными. Введем для второго и третьего семейств новые параметры $b_2/a_2 = u_2$ и $b_3/a_3 = u_3$, тогда уравнения (14) семейств рассматриваемой ткани CW' примут вид

$$\begin{aligned} &\lambda_1 : S_1(u_1) \equiv x^2 + y^2 - 2bx + u_1 y = 0, \\ &\lambda_2 : S_2(u_2) \equiv x^2 + y^2 + 2u_2 x + 2f_2(u_2)y - 4b^2 - 4bu_2 = 0, \\ &\lambda_3 : S_3(u_3) \equiv x^2 + y^2 + 2u_3 x + 2f_3(u_3)y = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Наша ближайшая цель — выяснить, замыкаются или нет особые циклы, описанные около границ S_i^0.

Предварительно найдем условие касания окружностей S_1 и S_3 в точке $S_2^0(0, 0)$ (условие "окружности S_1 и S_3 находятся в отношении $S_2^0(0, 0)$" (см. п. 2.1)): нормали к окружностям $N_1(2x - 2b, 2y + u_1)$ и $N_3(x + u_3, y + f_3(u_3))$ в этой точке должны быть коллинеарны, что дает соотношение

$$u_1 u_3 + 2bf_3(u_3) = 0. \tag{16}$$

Соотношение (16) связывает параметры окружностей семейств λ_1 и λ_3, касающихся в границе Γ_{13} — точке $S_2^0(0, 0)$. Мы назвали его уравнением границы Γ_{13}.

Аналогично находим условие касания окружностей S_1 и S_2 в точке $S_3^0(2b, 0)$:

$$u_1 u_2 - 2b(f_2(u_2) - u_1) = 0. \tag{17}$$

Условие (17) — уравнение границы Γ_{12} — связывает параметры окружностей семейств λ_1 и λ_2, касающихся в точке $S_3^0(2b, 0)$.

Для окружностей S_2 и S_3 найдем сначала условие их пересечения на границе S_1^0 $(y = 0)$. Пусть $(x_0, 0)$ — точка пересечения, тогда в силу (15)

$$x_0^2 + 2u_3 x_0 = 0, \quad x_0^2 + 2u_2 x_0 - 4b^2 - 4bu_2 = 0. \tag{18}$$

Значению $x_0 = 0$ соответствует во втором семействе окружность с параметром $u_2 = -b$, обозначим ее

$$S_{21} \equiv S_2(-b) \equiv x^2 + y^2 - 2bx + 2f_2(-b)y = 0.$$

Эта окружность проходит через точки S_2^0 и S_3^0, следовательно, принадлежит и первому семейству: $S_{21} \equiv S_1(2f_2(-b))$. Таким образом, окружность S_{21} является границей 2 рода — общей окружностью первого и второго семейств.

В случае $x_0 \neq 0$ после исключения x_0 из уравнений (18) придем к равенству

$$(u_3 + b)(u_3 - u_2 - b) = 0.$$

Значению $u_3 = -b$ отвечает общая окружность первого и третьего семейств, т. е. граница Γ_{13} 2 рода, обозначим эту окружность

$$S_{31} \equiv S_3(-b) \equiv S_3(2f_3(-b)) \equiv x^2 + y^2 - 2bx + 2f_3(-b)y = 0.$$

Таким образом, условие, связывающее параметры окружностей второго и третьего семейств, пересекающихся в точке на границе S_1^0, — уравнение границы Γ_{23} — будет (Условие (19) легко получается также из геометрических соображений.)

$$u_3 - u_2 - b = 0. \tag{19}$$

При этом, как видно из первого уравнения (18), точка пересечения имеет координату $x_0 = -2u_3$. В этой точке нормали

$$N_3(-u_3, f_3(u_2)), \quad N_2(-2u_3 + u_2, f_2(u_2))$$

к окружностям S_3 и S_2 должны быть коллинеарны, так что условие касания запишется в виде

$$u_3 f_2(u_2) = (2u_3 - u_2)f_3(u_3). \tag{20}$$

В силу (19) соотношение (20) должно удовлетворяться тождественно, что дает

$$(u_2 + b)f_2(u_2) \equiv (u_2 + 2b)f_3(u_2 + b). \tag{21}$$

При $u_2 + b = 0$ отсюда получаем $f_3(0) = 0$, поэтому введем функцию φ равенством

$$f_3(x) = x\varphi(x). \tag{22}$$

Из (21) находим

$$f_2(u_2) = (u_2 + 2b)\varphi(u_2 + b), \tag{23}$$

в результате уравнения (15) семейств три-ткани примут вид

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 : S_1(u_1) \equiv x^2 + y^2 - 2bx + u_1 y = 0,\\
&\lambda_2 : S_2(u_2) \equiv x^2 + y^2 + 2u_2 x + 2(u_2 + 2b)\varphi(u_2 + b)y - 4b^2 - 4bu_2 = 0,\\
&\lambda_3 : S_3(u_3) \equiv x^2 + y^2 + 2u_3 x + 2u_3\varphi(u_3)y = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Как видно, второе семейство содержит точку $S_3^0(2b, 0)$ как окружность $S_2(-2b) \equiv (x-2b)^2 + y^2 = 0$; третье семейство содержит точку $S_2^0(0, 0)$ как окружность $S_3(0) \equiv x^2 + y^2 = 0$. В соответствии с вышеизложенным, эти окружности являются особыми граничными точками (см. раздел 1, п. 1).

В результате замены (23) уравнения окружностей

$$\begin{aligned}
S_{21} &\equiv x^2 + y^2 - 2bx + 2b\varphi(0)y = 0,\\
S_{31} &\equiv x^2 + y^2 - 2bx - 2b\varphi(-b)y = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

В силу (22) и (23) условия касания (16) и (17) примут вид

$$u_3(u_1 + 2b\varphi(u_3)) = 0, \quad (u_2 + 2b)(u_1 - 2b\varphi(u_2 + b)) = 0.$$

Уравнения $u_3 = 0$ и $u_2 + 2b = 0$, как только что показано, выделяют точки $S_2^0(0, 0)$ и $S_3^0(2b, 0)$ как особые граничные точки. С другой стороны, если рассматривать $S_2^0(0, 0)$ и $S_3^0(2b, 0)$

как вершинные граничные точки, то соответствующие им границы Γ_{13} и Γ_{12} выделяются уравнениями

$$u_1 + 2b\varphi(u_3) = 0,\ u_1 - 2b\varphi(u_2 + b) = 0 \tag{26}$$

соответственно.

3.3. Теперь найдем условия замыкания особого цикла, описанного около границ S_i^0 окружностями $S_1, S_2, S_3, S_1', S_2', S_3'$ с параметрами $u_1, u_2, u_3, u_1', u_2', u_3'$ соответственно. В силу (19) и (26) получаем систему

$$\begin{aligned}
&u_1 + 2b\varphi(u_3) = 0,\\
&u_3 - u_2 - b = 0,\\
&u_1' - 2b\varphi(u_2 + b) = 0,\\
&u_1' + 2b\varphi(u_3') = 0,\\
&u_3' - u_2' - b = 0,\\
&u_1 - 2b\varphi(u_2' + b) = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Исключая переменные u_1 и u_1', получим равенства

$$\varphi(u_3) + \varphi(u_2' + b) = 0,\ \varphi(u_3') + \varphi(u_2 + b) = 0.$$

В силу остальных соотношений (27) эти равенства примут одинаковый вид $\varphi(u_3)+\varphi(u_3') = 0$. Таким образом, в системе (27) всего пять независимых соотношений, а это означает, что *рассматриваемый особый цикл замыкается.*

Хотя это необходимое условие регулярности выполнено, рассматриваемая три-ткань CW', тем не менее, регулярной может не оказаться. Дело в том, что в области $\bar{D}$, помимо заданных границ Γ_{ij}, могут быть и другие компоненты границы.

Сначала найдем уравнение ткани CW', исключая из уравнений (24) переменные x и y. После вычислений придем к уравнению

$$F \equiv u_1^2(v_2 - u_3) - 2u_1u_3(v_2 + b)(\varphi(u_3) - \varphi(v_2)) + 4b(u_3 + b)v_2 + 4bu_3(v_2 + b)\varphi(u_3)\varphi(v_2) = 0, \tag{28}$$

где $v_2 = u_2 + b$. Запишем уравнение (28) в виде

$$Au_1^2 + 2Bu_1 + C = 0, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
&A = v_2 - u_3,\ B = -u_3(v_2 + b)(\varphi(u_3) - \varphi(v_2)),\\
&C = 4b(u_3 + b)v_2 + 4bu_3(v_2 + b)\varphi(u_3)\varphi(v_2).
\end{aligned} \tag{30}$$

3.4. Найдем *все* границы Γ_{13}.

По теореме 1 границы 2 рода удовлетворяют уравнениям $F(u_1, u_2, u_3) = 0$ и $F_2 = \dfrac{\partial F}{\partial u_2} = 0$, $F_{22} = 0$ и т. д. Из (28) находим

$$F_2 \equiv u_1^2 - 2u_1u_3(\varphi(u_3) - \varphi(v_2)) + 2u_1u_3(v_2 + b)\varphi'(v_2) +$$

$$+ 4b(u_3 + b) + 4bu_3\varphi(u_3)\varphi(v_2) + 4bu_3(v_2 + b)\varphi(u_3)\varphi'(v_2) = 0,$$

$$F_{22} \equiv 4u_1u_3\varphi'(v_2) + 2u_1u_3(v_2 + b)\varphi''(v_2) + 8bu_3\varphi(u_3)\varphi'(v_2)) + 4bu_3(v_2 + b)\varphi(u_3)\varphi''(v_2) = 0.$$

После преобразований в последнем уравнении получим

$$u_3(u_1 + 2b\varphi(u_3))(2\varphi'(v_2) + (v_2 + b)\varphi''(v_2)) = 0.$$

В случае $u_1+2b\varphi(u_3)=0$ получаем границу S_{31} (см. (26)). В случае $2\varphi'(v_2)+(v_2+b)\varphi''(v_2))=0$ интегрирование дает дробно-линейную функцию

$$\varphi(v_2)=\frac{gv_2+h}{v_2+b}.$$

Подставляя в (28), получим уравнение вида $P(u_1,u_3)v_2+Q(u_1,u_3)=0$, где $P(u_1,u_3)$ и $Q(u_1,u_3)$ — многочлены (существенно!) третьей и четвертой степени, причем $P(u_1,u_3)=u_1^2u_3+\ldots,\ \ Q(u_1,u_3)=-u_1^2u_3^2+\ldots$ (указаны старшие члены). Поэтому переменная v_2 постоянной быть не может, следовательно, других границ 2 рода нет.

Для нахождения границ 1 рода рассмотрим систему $F=0, F_2=0$:

$$\begin{gathered}u_1^2(v_2-u_3)-2u_1u_3(v_2+b)(\varphi(u_3)-\varphi(v_2))+4b(u_3+b)v_2+4bu_3(v_2+b)\varphi(u_3)\varphi(v_2)=0,\\ u_1^2-2u_1u_3(\varphi(u_3)-\varphi(v_2))+2u_1u_3(v_2+b)\varphi'(v_2)+\\ +4b(u_3+b)+4bu_3\varphi(u_3)\varphi(v_2)+4bu_3(v_2+b)\varphi(u_3)\varphi'(v_2)=0.\end{gathered}\tag{31}$$

В случае регулярности граница Γ_{13} должна быть линией второго семейства ткани, пусть $v_2=v_2^0$. При этом значении параметра каждое из уравнений (31) должно давать одно и то же уравнение границы. Поскольку каждое из этих уравнений квадратное относительно u_1, их эквивалентность сводится к равенству соответствующих коэффициентов:

$$\begin{gathered}u_3(v_2^0+b)(\varphi(u_3)-\varphi(v_2^0))=(v_2^0-u_3)(u_3(\varphi(u_3)-\varphi(v_2^0))-u_3(v_2^0+b)\varphi'(v_2^0)),\\ (u_3+b)v_2^0+u_3(v_2^0+b)\varphi(u_3)\varphi(v_2^0)=(v_2^0-u_3)((u_3+b)+u_3\varphi(u_3)\varphi(v_2^0)+u_3(v_2^0+b)\varphi(u_3)\varphi'(v_2^0)).\end{gathered}$$

После преобразований получим систему

$$\begin{aligned}&(u_3+b)(\varphi(u_3)-\varphi(v_2^0))+(v_2^0-u_3)(v_2^0+b)\varphi'(v_2^0)=0,\\ &(u_3+b)+(u_3+b)\varphi(u_3)\varphi(v_2^0)+(u_3-v_2^0)(v_2^0+b)\varphi(u_3)\varphi'(v_2^0)=0.\end{aligned}$$

С учетом первого равенства второе преобразуется к виду $1+\varphi(u_3)^2=0$. Таким образом, решений нет, следовательно, других компонент границы Γ_{13}, помимо найденных ранее, не существует.

3.5. С помощью аналогичных рассуждений найдем *все* границы Γ_{12}. Границы 2 рода удовлетворяют уравнениям $F=0$ и $F_3=\dfrac{\partial F}{\partial u_3}=0$, $F_{33}=0$ и т. д. Из (28) находим

$$\begin{aligned}&F_3\equiv -u_1^2-2u_1(v_2+b)(\varphi(u_3)-\varphi(v_2))-2u_1u_3(v_2+b)\varphi'(u_3)+\\ &+4bv_2+4b(v_2+b)\varphi(u_3)\varphi(v_2)+4b(v_2+b)u_3\varphi'(u_3)\varphi(v_2)=0,\\ &F_{33}\equiv -4u_1(v_2+b)\varphi'(u_3)-2u_1u_3(v_2+b)\varphi''(u_3)+\\ &+8b(v_2+b)\varphi'(u_3)\varphi(v_2)+4b(v_2+b)u_3\varphi''(u_3)\varphi(v_2)=0.\end{aligned}$$

После преобразований в последнем уравнении получим

$$(v_2+b)(-u_1+2b\varphi(v_2))(2\varphi'(u_3)+u_3\varphi''(u_3))=0.$$

В случае $-u_1+2b\varphi(v_2)=0$ получаем границу S_{21} (см. (26)). В случае $2\varphi'(u_3)+u_3\varphi''(u_3)=0$ интегрирование дает дробно-линейную функцию

$$\varphi(u_3)=\frac{gu_3+h}{u_3}.$$

Подставляя в (28), получим уравнение вида $P(u_1,v_2)u_3+Q(u_1,v_2)=0$, где $P(u_1,v_2)$ и $Q(u_1,v_2)$— многочлены (существенно!) третьей и четвертой степени, причем $P(u_1,v_2)=-u_1^2v_2+\ldots$, $Q(u_1,v_2)=u_1^2v_2^2+\ldots$. Поэтому переменная v_2 постоянной быть не может, следовательно, других границ второго рода нет.

Для нахождения границ 1 рода рассмотрим систему $F=0, F_3=0$:

$$\begin{aligned}
&u_1^2(v_2-u_3)-2u_1u_3(v_2+b)(\varphi(u_3)-\varphi(v_2))+\\
&+4b(u_3+b)v_2+4bu_3(v_2+b)\varphi(u_3)\varphi(v_2)=0,\\
&-u_1^2-2u_1(v_2+b)(\varphi(u_3)-\varphi(v_2))-2u_1u_3(v_2+b)\varphi'(u_3)+\\
&+4bv_2+4b(v_2+b)\varphi(u_3)\varphi(v_2)+4b(v_2+b)u_3\varphi'(u_3)\varphi(v_2)=0.
\end{aligned}\tag{32}$$

В случае регулярности граница Γ_{12} должна быть линией третьего семейства ткани, пусть $u_3=u_3^0$. При этом значении параметра каждое из уравнений (32) должно давать одно и то же уравнение границы. Поскольку каждое из этих уравнений квадратное относительно u_1, их эквивалентность сводится к равенству соответствующих коэффициентов:

$$-u_3^0(v_2+b)(\varphi(u_3^0)-\varphi(v_2))=(v_2-u_3^0)((v_2+b)(\varphi(u_3^0)-\varphi(v_2))+(v_2-u_3^0)u_3^0(v_2+b)\varphi'(u_3)),$$
$$(u_3^0+b)v_2+u_3^0(v_2+b)\varphi(u_3^0)\varphi(v_2)=(v_2-u_3^0)(-v_2-(v_2+b)\varphi(u_3^0)\varphi(v_2)-(v_2+b)u_3^0\varphi'(u_3^0)\varphi(v_2)).$$

После преобразований получим систему

$$\begin{aligned}
&v_2(\varphi(u_3^0)-\varphi(v_2))+(v_2-u_3^0)u_3^0\varphi'(u_3^0)=0,\\
&v_2+v_2\varphi(u_3^0)\varphi(v_2)+(v_2-u_3^0)u_3^0\varphi'(u_3^0)\varphi(v_2)=0.
\end{aligned}$$

С учетом первого равенства второе преобразуется к виду $1+\varphi(v_2)^2=0$. Таким образом, других компонент первого рода границы Γ_{13}, помимо найденных ранее, не существует.

3.6. Найдем *все* границы Γ_{23}. Компоненты второго рода границы Γ_{23} найдем из условия $A=B=C=0$ (см. (29)), что приведет либо к соотношениям $u_3=0$, $v_2=0\,(u_2=-b)$, либо к $v_2+b=0$, $u_3+b=0$.

В первом случае через общие точки окружностей $S_3(0)$ и $S_2(-b)$ проходят все линии первого семейства. Но $S_3(0)$ — точка $S_2^0(0,0)$, а $S_2(-b)$ — общая окружность первого и второго семейств S_{21} (см. (25)), которая проходит через точку $S_2^0(0,0)$. Через эту точку проходят все окружности первого семейства, так что ее можно считать вырожденной границей 2 рода, обозначим ее Γ'_{23}.

В случае $v_2+b=0$, $u_3+b=0$ через общие точки окружностей $S_3(-b)$ и $S_2(-2b)$ проходят все линии первого семейства. Но $S_2(-2b)$ — окружность $(x-2b)^2+y^2=0$, т. е. точка $S_3^0(2b,0)$, а

$$x^2+y^2-2bx-4b\varphi(-b)y=0$$

— уравнение окружности $S_3(-b)$. Точка $S_3^0(2b,0)$ лежит на окружности $S_3(-b)$, и через нее проходят все окружности первого семейства. Следовательно, эту точку можно считать вырожденной границей 2 рода, обозначим ее Γ''_{23}.

Найдем компоненты 1 рода границы Γ_{23}. Согласно п. 1.2 компоненты 1 и 2 рода удовлетворяют равенствам $F=0$ и $F_1=0$. Дифференцируя (29), получим

$$Au_1+B=0,\tag{33}$$

что вместе с (29) дает

$$Bu_1+C=0.$$

Исключая u_1, получим уравнение границы Γ_{23}

$$AC-B^2\equiv 0.\tag{34}$$

(Напомним, что уравнение границы связывает параметры линий ткани, касающихся в точках границы.)

Как видно, граница Γ_{23} представляет собой довольно сложную кривую на поверхности V. Рассмотрим, например, самый простой нетривиальный случай: функция φ является линейной, тогда второе и третье семейства будут квадратичными. Пусть

$$\varphi(x) = 3 + 2x$$

и пусть $b = 1$. Тогда равенство (34) примет вид

$$(u_3+1)v_2 + u_3(v_2+1)(3+2v_2)(3+2u_3) = u_3^2(v_2+1)^2(v_2-u_3).$$

Определяемая этим уравнением кривая на плоскости переменных v_2, u_3 изображена на рис. 4.

Если $A = v_2 - u_3 = 0$, то $B = 0$ (см. (30)) и

$$C = v_2(v_2+b)(\varphi^2(v_2)+1)).$$

Условие $C = 0$ приводит к границам 2 рода, рассмотренным выше. В случае $C \neq 0$ уравнение (29) имеет корень $1/u_1 = 0$. Этому значению параметра в первом семействе отвечает граница 1 рода — ось x (радикальная ось пучка λ_1 (см. начало п. 3.1)).

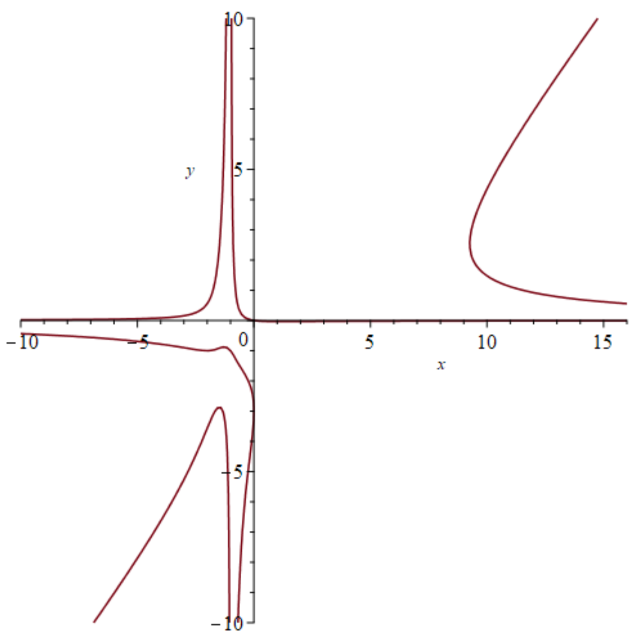

Рис. 4

Пусть теперь $A = v_2 - u_3 \neq 0$, тогда из (33) находим

$$u_1 = -\frac{B}{A} = u_3(v_2+b)\frac{\varphi(u_3)-\varphi(v_2)}{v_2-u_3}. \tag{35}$$

Обозначим

$$S(u_3, v_2) = \frac{\varphi(u_3)-\varphi(v_2)}{u_3-v_2}.$$

Лемма 2. 1) $S(u_3, v_2) = S(v_2, u_3)$; 2) $S(u_3, u_3) = \varphi'(u_3)$.

Доказательство. 1) очевидно; 2) можно доказать непосредственно, разложив φ в ряд Лорана. □

В силу леммы равенство (35) примет вид

$$u_1 = -u_3(v_2 + b)S(u_3, v_2). \tag{36}$$

3.7. Укажем еще некоторые компоненты 1 рода границы Γ_{23} — решения уравнения (34).

Полагая в (34) $v_2 = 0$, придем к равенству $\varphi(u_3) = -\varphi(0)$. Обозначив решение этого уравнения через u_3^0, имеем

$$\varphi(u_3^0) = -\varphi(0). \tag{37}$$

Значению $v_2 = 0$ во втором семействе отвечает окружность

$$S_{21} \equiv S_2(-b) \equiv x^2 + y^2 - 2b(x - \varphi(0)y) = 0,$$

а значению u_3^0 в третьем семействе — окружность

$$S_3(u_3^0) \equiv x^2 + y^2 + 2u_3^0(x - \varphi(0)y) = 0.$$

Как видно, эти окружности принадлежат одному параболическому пучку с вершиной $S_2^0(0,0)$ и радикальной осью $x - \varphi(0)y = 0$ и, следовательно, имеют радикальную ось общей касательной в этой вершине.

Пользуясь формулами (36) и (37), найдем параметр окружности первого семейства, соответствующей значениям $v_2 = 0, u_3^0$:

$$u_1 = -u_3^0 bS(u_3^0, 0) = -u_3^0 b\frac{\varphi(u_3^0) - \varphi(0)}{u_3^0 - 0} = -b(\varphi(u_3^0) - \varphi(0)) = 2b\varphi(0).$$

Этому значению параметра соответствует окружность S_{21}.

Полагая в (34) $u_3 = -b$, придем к равенству $\varphi(v_2) = -\varphi(-b)$. Обозначив решение этого уравнения v_2^1, имеем

$$\varphi(v_2^1) = -\varphi(-b). \tag{38}$$

Значению $u_3 = -b$ в третьем семействе отвечает окружность

$$S_{31} \equiv S_3(-b) \equiv x^2 + y^2 - 2bx - 2b\varphi(-b)y = 0,$$

уравнение которой можно записать в виде

$$S_3(-b) \equiv (x - 2b)^2 + 2b(x - \varphi(-b)y - 2b) = 0.$$

Значению v_2^1 во втором семействе отвечает окружность

$$S_2(v_2^1) \equiv x^2 + y^2 + 2(v_2^0 - b)x - 2(v_2^0 + b)(\varphi(-b)y - 4bv_2^0 = 0,$$

уравнение которой можно записать в виде

$$S_2(v_2^1) \equiv (x - 2b)^2 + y^2 - 2(v_2^0 + b)(x - \varphi(-b)y - 2b) = 0.$$

Как видно, эти окружности принадлежат одному параболическому пучку с вершиной $S_2^0(2b, 0)$ и радикальной осью $x - \varphi(-b)y - 2b = 0$ и, следовательно, имеют радикальную ось общей касательной в этой вершине.

Пользуясь формулой (36) и учитывая (38), найдем параметр окружности первого семейства, соответствующей значениям $v_2^1, u_3 = -b$:

$$u_1 = b(v_2^1 + b)S(v_2^1, -b) = b(v_2^1 + b)\frac{\varphi(v_2^1) - \varphi(-b)}{v_2^1 + b} = -2b\varphi(-b).$$

Этому значению параметра отвечает окружность S_{31}.

В частности, если $\varphi(0) = -\varphi(-b)$, то окружности S_{31} и S_{21} совпадают, и мы получаем общую окружность трех семейств — параболическую границу 2 рода.

3.8. В случае регулярности граница ℓ должна быть линией первого семейства, обозначим ее параметр $u_1 = c = \text{const}$. Тогда на ℓ будут выполняться соотношения $Ac + B = 0$, $Bc + C = 0$, каждое из которых представляет собой уравнение границы ℓ. Но если граница представляет собой гладкую континуальную кривую, то эти уравнения должны быть эквивалентны, т. е. *равенство* (33) *должно выполняться тождественно.* Итак, требование регулярности приводит к существованию функции φ такой, что равенство (34) выполняется тождествено. Покажем, что это невозможно.

В силу локальности рассмотрения функцию φ можно считать аналитической. Рассмотрим более общую ситуацию, полагая, что φ имеет в области определения конечное число полюсов. Положим

$$\varphi(x) = x^{-m}\big(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots\big),$$

причем будем считаем, что $q_0 \neq 0$, иначе степень m можно понизить.

Подставляя в тождество (34), получим (по модулю $u_3^m v_2^m$, вне полюса) тождество

$$(v_2 - u_3)4bu_3(v_2 + b)(q_0 - q_1 u_3 + q_2 u_3^2 + \dots)(q_0 - q_1 v_2 + q_2 v_2^2 + \dots) \equiv u_3^2(v_2 + b)^2(-2q_0 + \dots).$$

Слагаемое наименьшей степени слева $4b^2 q_0^2 u_3(v_2 - u_3)$, справа $-2b^2 q_0^2 u_3^2$. Так как $q_0 \neq 0$, то тождество невозможно.

Следствие. Регулярных тканей CW', помимо перечисленных в разделе 3 случаев A, F и G $\sim$ F, не существует.

Суммируя результаты, приходим к утверждению.

Теорема 4. *Пусть каждая из трех границ Γ_{ij} некоторой три-ткани CW имеет по крайней мере одну компоненту 1 рода, причем две из этих компонент вырожденные, т. е. точки. Такая три-ткань CW является регулярной тогда и только тогда, когда она эквивалентна ткани BW (из трех эллиптических пучков окружностей с попарно совпадающими вершинами).*

Литература

[1] Blaschke W. *Einführung in die Geometrie der Waben* (Birkhäuser-Verlag, 1955).

[2] Blaschke W., Bol G. *Geometrie der Gewebe* (Springer, Berlin, 1938).

[3] Pottmann H., Shi L., Skopenkov M. *Darboux cyclides and webs from circles*, Comput. Aided Geom. Design **29** (1) 77–97 (2012).

[4] Strubecker K. *Über eine Klasse spezieller Dreiecksnetze aus Kreisen*, Monaths. Math. Phys. **39**, 395–398 (1932).

[5] Wunderlich W. *Über ein besonderes Dreiecksnetz aus Kreisen* Sitzungsber, Akad. Wiss. Wien **147**, 385–399 (1938).

[6] Nilov F. *New examples of hexagonal webs from circles,* arXiv:1309.5029v1 [math.MG] 19 Sep 2013.

[7] Нилов Ф.К. *О новых конструкциях в проблеме Бляшке-Бола*, Матем. сб. **205** (11), 125–144 (2014).

[8] Лазарева В.Б. *Параллелизуемые три-ткани, образованные пучками окружностей*, Ткани и квазигруппы, Калининский гос. ун-т, Калинин, 74–77 (1988).

[9] Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О триангуляциях плоскости пучками коник,* Матем. сб. **198** (11), 107–134 (2007).

[10] Лазарева В.Б. *Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований*, Фундамент. и прикл. матем. **16** (1), ч. 1, 95–107 (2010).

[11] Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. *Криволинейные три-ткани* (Твер. гос. ун-т, Тверь, 2013).

[12] Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О триангуляциях плоскости пучками коник* II, Матем. сб. **204** (6), 93–134 (2013).

[13] Шелехов А.М. *О три-тканях, образованных семействами окружностей*, Тр. междунар. геом. центра, **5** (2), 6–16 (2012).

[14] Шелехов А.М. *О шестиугольных три-тканях, образованных декартовой сетью и семейством окружностей*, Изв. вузов. Матем. (10), 79–93 (2018).

[15] Шелехов А.М. *Обобщенная теорема о границах криволинейной три-ткани и ее приложения*, Матем. сб. **211** (3), 124–157 (2020).

[16] Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О геометрической интерпретации инвариантного оснащения точечного соответствия трех прямых*, Изв. вузов. Матем. (9), 43–47 (1984).

Александр Михайлович Шелехов

Московский педагогический государственный университет,
ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1, г. Москва, 119991, Россия,

e-mail: amshelekhov@yandex.ru

A.M. Shelekhov

Three-webs from circles

Abstract. A new geometric necessary condition for regularity of a curved tree-web is found. A class of tree-webs from circles generalizing the regular tree-web of W. Blaschke from three elliptic bundles of circles with pairwise coinciding vertices is considered, and it is shown that only webs equivalent to the Blaschke web are regular in this class.

Keywords: curvilinear three-web, regular 3-web, three-webs from circles, three-web from pencils of circles, boundary curve of the 3-web, singular cycle of the three-web.

Alexander Mikhailovich Shelekhov

Moscow Pedagogical State University,
1 Malaya Pirogovskaya str., bdg. 1, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: amshelekhov@yandex.ru