Известия вузов. Математика
2023, №12, с. 39–52

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М. МИРСАБУРОВ, Р.Н. ТУРАЕВ

ЗАДАЧА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С КОМБИНИРОВАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРИКОМИ И ФРАНКЛЯ НА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Аннотация. В неограниченной области доказывается корректность задачи с комбинированными условиями Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике для одного класса уравнений смешанного типа.

Ключевые слова: неограниченная область, уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, комбинированное условие Трикоми и Франкля, сингулярное интегральное уравнение первого и второго рода.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-12-39-52

В данной работе в неограниченной области доказывается корректность задачи с комбинированными условиями Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике для одного класса уравнений смешанного типа.

Единственность решения задачи доказывается с помошью принципа экстремума, а существование решения — методом интегральных уравнений.

1. Постановка задачи Трикоми–Франкля (TF).

Пусть $D = D^+ U D^- U J$ — неограниченная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, D^+ — полуплоскость $y > 0$, D^- — конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \tag{1}$$

где $m = \mathrm{const} > 0$, исходящими из точек $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$, $J = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\}$.

Введем следующие обозначения: $J_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1,\ y = 0\}$; $J_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty\ , y = 0\}$; A_1 и A_2 — точки пересечения характеристики AC с характеристиками исходящих из точек $E_1(-c, 0)$ и $E_2(c, 0)$, где $c \in (0, 1)$.

В задаче Трикоми ([1], с. 29) во всех точках характеристики AC задается значение искомой функции. В данной работе в неограниченной области D исследуется корректность задачи, которая отличается от задачи Трикоми тем, что куски AA_1 и A_2C характеристики AC освождены от локального краевого условия и это недостающее условие Трикоми заменено аналогом условия Франкля [2]–[4] на $AA_1 \subset AC$ и $A_2C \subset AC$ и на сегментах AE_1 и E_2B отрезка AB оси $y = 0$. На промежутках $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ оси $y = 0$ задается условие Дирихле.

Поступила в редакцию 12.12.2022, после доработки 12.12.2022. Принята к публикации 29.03.2023.

Пусть D_R^+ — конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2,$$

$-R \leq x \leq R,\ \ 0 \leq y \leq ((m+2)/2)^{2/(m+2)}$ с концами в точках

$$A_R = A_R(-R,0),\ B_R = B_R(R,0),\ D_R = D_R^+ U D^- U J.$$

Задача TF. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти D_R неограниченной области D;

2) функция $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

3) функция $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 ([5]; [6], с. 35) в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следующее условие сопряжения:

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in J \setminus \{-c, c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to +\infty} u(x,y) = 0, \quad y > 0; \tag{3}$$

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,0) = \varphi_i(x), \quad x \in J_i, \quad i = 1,2, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{A_1A_2} = \psi(x), \qquad x \in [-(1+c)/2; -(1-c)/2], \tag{5}$$

$$u[\theta(x)] - u[\theta(-x)] = \rho(x), \quad x \in [-1,-c], \tag{6}$$

$$u(x,0) - u(-x,0) = f(x), \quad x \in [-1,-c], \tag{7}$$

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$\theta(x_0)$ — аффикс точки пересечения характеристики AC с характеристикой исходящей из точки $(x_0,0), x_0 \in [-1,-c]$ [7], [8]. Заданные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi(x), \rho(x), f(x)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $\varphi_1(-1) = 0$, $\varphi_2(1) = 0,\ \varphi_1(-\infty) = 0,\ \varphi_2(+\infty) = 0,\ f(-1) = 0,\ f(-c) = 0$.

Условия (6) и (7) являются аналогами условия Франкля, заданного на кусках AA_1 и A_2C, характеристики AC и на сегментах AE_1 и E_2B отрезка AB соответственно.

Заметим, что задача TF при значении параметра $c = 1$ переходит в задачу Трикоми, а при $c = 0$ — в задачу с аналогом условия Франкля на характеристике AC в неограниченной области.

2. Единственность решения задачи TF.

Теорема 1. *Решение задачи* TF *при однородных краевых условиях* $\varphi_1(x) \equiv 0,\ \ \varphi_2(x) \equiv 0,\ \ \psi(x) \equiv 0,\ \ \rho(x) \equiv 0,\ \ f(x) \equiv 0$ *своих наибольшего положительного значения* (НПЗ) *и наименьшего отрицательного значения* (НОЗ) *в замкнутой области* $\overline{D}_R^+$ *принимает только в точках кривой* σ_R.

Доказательство. Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in \overline{J}; \quad \lim_{y\to -0} (-y)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in J, \tag{8}$$

дается формулой Даламбера [9]

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right) + \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] -$$

$$-\frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu\left(x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)dt. \tag{9}$$

В силу (9) из краевого условия (6) нетрудно получить соотношение

$$\tau'(x) + \tau'(-x) - \nu(x) - \nu(-x) = 2\rho'(x), \quad x \in (-1,-c). \tag{10}$$

Согласно обозначению (8) аналог условия Франкля (6) запишем в виде

$$\tau(x) - \tau(-x) = f(x), \quad x \in (-1,-c). \tag{11}$$

С учетом (11) соотношение (10) преобразуем к виду

$$\nu(x) + \nu(-x) = f'(x) - 2\rho'(x), \quad x \in (-1,-c). \tag{12}$$

Теперь в силу краевого условия (5), с учетом (9) нетрудно получить следуюшее соотношение:

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'((x-1)/2), \quad x \in (-c,c). \tag{13}$$

Заметим, что соотношения (12) и (13) являются основными функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенными из области D^-, соответственно, на промежутки $(-1,-c)$ и $(-c,c)$ оси $y=0$.

Пусть искомая функция $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{D}_R^+$ достигает в точке (x_0,y_0), в силу принципа Хопфа ([10], с. 25) эта точка не находится внутри области D_R^+, т. е. $(x_0,y_0) \notin D_R^+$. Теперь допустим, что искомая функция $u(x,y)$ своего НПЗ достигает в точке $M(x_0,0)$ промежутка $[-R,R]$ оси $y=0$, т. е. $x_0 \in [-R,R]$.

Здесь ввиду однородных краевых условий (4) (при $\varphi_1(x) \equiv 0, \varphi_2(x) \equiv 0$) $x_0 \notin [-R,-1] \cup [1,R]$, тогда $x_0 \in (-1,1)$. Рассмотрим три случая возможого расположения точки x_0 на интервале $(-1,1)$.

1. Пусть $x_0 \in (-1,-c)$. Тогда в силу соответствующего однородного условия (11) (при $f(x) \equiv 0$) искомое решение своего НПЗ достигает и в точке $M(-x_0,0)$, т. е. $-x_0 \in (c,1)$, значит, в силу принципа Заремба–Жиро ([10], с. 26) в этих точках $\nu(x_0) < 0$, $\nu(-x_0) < 0$, следовательно,

$$\nu(x_0) + \nu(-x_0) < 0.$$

Это неравенство согласно (2) противоречит соответствующему однородному равенству (12) (при $f'(x) \equiv 0, \rho'(x) \equiv 0$), в силу которого должно быть $\nu(x_0) + \nu(-x) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает, что $x_0 \notin (-1,-c)$, следовательно, ввиду (11) (при $f(x) \equiv 0$) эта точка не находится и на интервале $(c,1)$.

2. Пусть $x_0 \in (-c,c)$, тогда в этой точке в силу соответствуюшего однородного соотношения (13) (при $\psi'((x-1)/2) = 0$) $\nu(x_0) = 0$, а это согласно (2) противоречит известному принципу Заремба–Жиро, в силу которого $\nu(x_0) < 0$ ([10], с. 26). Следовательно, $x_0 \notin (-c,c)$.

3. Пусть $x_0 = \pm c$, в этом случае аналогичным методом, изложенным в книге ([11], с. 202), можно показать, что искомое решение $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\bar{D}_R^+$ в точках $E_1(-c,0)$ и $E_2(c,0)$ не достигает.

Таким образом, решение $u(x,y)$ задачи TF, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своего НПЗ в области $\bar{D}_R^+$ достигает в точках нормальной кривой σ_R.

Аналогичным методом, как и выше, можно показать, что решение $u(x,y)$ задачи TF, удовлетворяющее условиям теоремы 1, своего НОЗ также достигает в точках нормальной кривой σ_R. □

Следствие. Задача TF имеет не более одного решения.

Доказательство. В силу условия (3) для $\forall\varepsilon > 0$ существует такое $R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|u(x,y)| < \varepsilon, \quad (x,y) \in \sigma_R.$$

Согласно теореме 1 это неравенство имеет место для $\forall(x,y) \in \bar{D}_R : |u(x,y)| < \varepsilon$. Следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ при $R \longrightarrow +\infty$ заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $D^+ \cup J_1 \cup J \cup J_2$. Тогда

$$\lim_{y\longrightarrow+0} u(x,y) = 0, \quad x \in (-\infty,+\infty); \quad \lim_{y\longrightarrow+0} y^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x \in (-\infty,+\infty).$$

Отсюда ввиду непрерывности искомого решения $u(x,y)$ и условия сопряжения (2) имеем

$$\lim_{y\longrightarrow-0} u(x,y) \equiv 0 \quad \forall x \in J; \quad \lim_{y\longrightarrow-0} (-y)^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x \in J.$$

Теперь, восстанавливая решение $u(x,y)$ с помощью формулы Даламбера (9) с нулевыми данными, получим $u(x,y) \equiv 0$ и в области D^-. □

3. Существование решения задачи TF.

Теорема 2. *Решение задачи* TF *существует.*

Доказательство. В неограниченной области D^+ решение задачи Дирихле с данным

$$u(x,0) = \tau(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

задается формулой [12]

$$u(x,y) = k_2 y^{\frac{m+2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1} dt, \tag{14}$$

где $k_2 = 2/\pi(m+2)$.

В (14) значения для $\tau(x)$ в промежутках $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ в силу данных (4) — известные величины, с учетом этого замечания формулу (14) запишем в виде

$$u(x,y) = k_2 y^{\frac{m+2}{2}} \int_{-1}^{1} \tau(t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1} dt + \Phi(x,y), \quad x \in (-1,1), \tag{15}$$

$$\Phi(x,y) = k_2 y^{\frac{m+2}{2}} \int_{-\infty}^{-1} \varphi_1(t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1} dt +$$
$$+ k_2 y^{\frac{m+2}{2}} \int_{1}^{+\infty} \varphi_2(t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1} dt.$$

Дифференцируя (15) по y, с учетом тождества

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{y^{\frac{m+2}{2}}\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1}\right\} =$$
$$= \frac{m+2}{2} y^{\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{(x-t)\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{-1}\right\}$$

имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = k_2 \frac{m+2}{2} y^{\frac{m}{2}} \int_{-1}^{1} \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (x-t) \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{-1} \right\} dt + \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}. \tag{16}$$

Умножив обе части равенства (16) на $y^{-\frac{m}{2}}$, переходим к пределу при $y \to +0$. Далее, выполнив операцию интегрирования по частям, с учетом $\tau(-1) = 0, \quad \tau(1) = 0$ и равенства $k_2(m+2)/2 = \dfrac{1}{\pi}$ приходим к соотношению

$$\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\tau'(t)}{t-x} dt + F(x), \quad x \in (-1,1), \tag{17}$$

где

$$F(x) = \lim_{y \to +0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}, \qquad x \in (-1,1).$$

Заметим, что соотношение (17), привнесенное на промежуток $(-1,1)$ оси $y = 0$ из области D^+, является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, и оно справедливо для всего промежутка $(-1,1)$.

Из соотношений (12) и (17), исключая $\nu(x)$, получим

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau'(t) dt = F(x), \quad x \in (-1,-c), \tag{18}$$

где

$$F(x) = \pi(f'(x) - 2\rho'(x) - f(x) - f(-x)).$$

Так как в (18) $x \in (-1,-c)$, то интегральный оператор в (18) имеет сингулярную особенность только в интервале $(-1,-c)$. С целью выделения сингулярной части в (18), разлагая промежуток интегрирования $(-1,1)$ на интервалы $(-1,-c)$, $(-c,c)$ и $(c,1)$, запишем (18) в виде

$$\int_{-1}^{-c} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau'(t) dt + \int_{-c}^{c} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau'(t) dt +$$
$$+ \int_{c}^{1} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau'(t) dt = F(x), \quad x \in (-1,-c). \tag{19}$$

В третьем интеграле (19), поменяв переменную интегрирования t на $-t$, с учетом аналога условия Франкля (7) : $\tau'(-x) = -\tau'(x) + f'(x)$ получим

$$2\int_{-1}^{-c} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau'(t) dt + \int_{-c}^{c} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau'(t) dt = F_1(x), \quad x \in (-1,-c), \tag{20}$$

где

$$F_1(x) = F(x) + \int_{-1}^{-c} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) f'(t) dt.$$

Интегрируя соотношение (20) в пределах от -1 до $x \in (-1,-c)$, получим

$$2\int_{-1}^{x} ds \int_{-1}^{-c} \left(\frac{1}{t-s} + \frac{1}{t+s} \right) \tau'(t) dt + \int_{-1}^{x} ds \int_{-c}^{c} \left(\frac{1}{t-s} + \frac{1}{t+s} \right) \tau'(t) dt =$$
$$= \int_{-1}^{x} F(s) ds, \quad x \in (-1,-c). \tag{21}$$

Преобразуем двойные интегралы в (21).

Вычислим

$$J(x)=\int_{-1}^{x}ds\int_{-1}^{-c}\frac{\tau'(t)dt}{t-s}=-\lim_{\substack{\delta\to0\\ \varepsilon\to0}}\int_{-1}^{x}ds\left[\int_{-1}^{s-\varepsilon}\frac{\tau'(t)dt}{(s-t)^{1-\delta}}-\int_{s+\varepsilon}^{-c}\frac{\tau'(t)dt}{(t-s)^{1-\delta}}\right],\quad x\in(-1,-c).$$

Здесь во внутренних интегралах, выполнив операцию интегрирования по частям, имеем

$$J(x)=-\lim_{\substack{\delta\to0\\ \varepsilon\to0}}\int_{-1}^{x}\Big[\varepsilon^{\delta-1}\tau(s-\varepsilon)-(1+s)^{\delta-1}\tau(-1)+$$

$$+(\delta-1)\int_{-1}^{s-\varepsilon}(s-t)^{\delta-2}\tau(t)dt-(-c-s)^{\delta-1}\tau(-c)+$$

$$+\varepsilon^{\delta-1}\tau(s+\varepsilon)+(\delta-1)\int_{s+\varepsilon}^{-c}(t-s)^{\delta-2}\tau(t)dt\Big]ds.$$

В силу тождеств

$$(\delta-1)\int_{-1}^{s-\varepsilon}(s-t)^{\delta-2}\tau(t)dt=\frac{d}{ds}\int_{-1}^{s-\varepsilon}(s-t)^{\delta-1}\tau(t)dt-\varepsilon^{\delta-1}\tau(s-\varepsilon),$$

$$(\delta-1)\int_{s+\varepsilon}^{-c}(t-c)^{\delta-2}\tau(t)dt=-\frac{d}{ds}\int_{s+\varepsilon}^{-c}(t-s)^{\delta-1}\tau(t)dt-\varepsilon^{\delta-1}\tau(s+\varepsilon)$$

и с учетом значений $\tau(-1)=0$ имеем

$$J(x)=-\lim_{\substack{\delta\to0\\ \varepsilon\to0}}\int_{-1}^{x}ds\left[\frac{d}{ds}\int_{-1}^{s-\varepsilon}\frac{\tau(t)dt}{(s-t)^{1-\delta}}-\frac{d}{ds}\int_{s+\varepsilon}^{-c}\frac{\tau(t)dt}{(t-s)^{1-\delta}}-\frac{\tau(-c)}{(-c-s)^{1-\delta}}\right].$$

В последнем равенстве, переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим

$$J(x)=-\lim_{\delta\to0}\int_{-1}^{x}ds\left[\frac{d}{ds}\int_{-1}^{s}\frac{\tau(t)dt}{(s-t)^{1-\delta}}-\frac{d}{ds}\int_{s}^{-c}\frac{\tau(t)dt}{(t-s)^{1-\delta}}-\frac{\tau(-c)}{(-c-s)^{1-\delta}}\right],\quad x\in(-1,-c).\tag{22}$$

Вычислив в (22) первые два интеграла, имеем

$$J(x)=-\lim_{\delta\to0}\left[\int_{-1}^{x}\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-\delta}}-\int_{x}^{-c}\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-\delta}}+\int_{-1}^{-c}\frac{\tau(t)dt}{(1+t)^{1-\delta}}-\int_{-1}^{x}\frac{\tau(-c)ds}{(-c-s)^{1-\delta}}\right].$$

Здесь, переходя к пределу при $\delta\to0$, окончательно получим равенство

$$J(x)=\int_{-1}^{x}ds\int_{-1}^{-c}\frac{\tau'(t)dt}{t-s}=\int_{-1}^{-c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t-x}-\tau(-c)\ln\left(\frac{c+x}{1-c}\right),\quad x\in(-1,-c).\tag{23}$$

Так же, как и выше, можно доказать

$$\int_{-1}^{x}ds\int_{-1}^{-c}\frac{\tau'(t)dt}{t+s}=-\int_{-1}^{-c}\left(\frac{1+x}{1-t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t+x}-\tau(-c)\ln\left(\frac{1+c}{c-x}\right),\quad x\in(-1,-c),\tag{24}$$

$$\int_{-1}^{x}ds\int_{-c}^{c}\left(\frac{1}{t-s}+\frac{1}{t+s}\right)\tau'(t)dt=\int_{-c}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t-x}-\int_{-c}^{c}\left(\frac{1+x}{1-t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t+x}+$$

$$+\left(\tau(c)+\tau(-c)\right)\ln\frac{(c+x)(1+c)}{(c-x)(1-c)},\ x\in(-1,-c).\tag{25}$$

В (25) учитывая, что $\tau(-c)=\tau(c)$, которое следует из (11) (с $f(-c)=0$) при $x=-c$, в силу равенств (23)–(25) уравнение (21) запишем в виде

$$2\int_{-1}^{-c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t-x}-2\int_{-1}^{-c}\left(\frac{1+x}{1-t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t+x}+\int_{-c}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t-x}-$$

$$-\int_{-c}^{c}\left(\frac{1+x}{1-t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t+x}=\int_{-1}^{x}F(s)ds,\quad x\in(-1,-c). \tag{26}$$

Заметим, что в (26) промежутки интегрирования разные: $(-1,-c)$ и $(-c,c)$, с целью рассмотрения их в одном промежутке $(-1,c)$ в интегралах по промежутку $(-1,-c)$ сделаем замену переменных интегрирования $t=p(s)=as-b$ (где $t\in(-1,-c)$, $s\in(-1,c)$), а в интегралах по промежутку $(-c,c)$ сделаем замену переменных $t=q(s)=-ac-bs$ (где $t\in(-c,c)$, $s\in(-1,c)$), затем, поменяв переменную $x\in(-1,-c)$ на $p(x)=ax-b$ (где $p(x)\in(-1,-c)$, $x\in(-1,c)$); здесь $a=(1-c)/(1+c)$, $b=2c/(1+c)$, причем $p(-1)=-1$, $p(c)=-c$, $q(-1)=c$, $q(c)=-c$, $a+b=1$, получим

$$\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+s}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{s-x}=-\frac{ab}{2}\int_{-1}^{c}\frac{1+x}{1-ac-bs}\frac{\tau_1(s)ds}{c-ax-bs}+R_0[\tau_0]+R_1[\tau_1]+F_1(x),\quad x\in(-1,c), \tag{27}$$

где $\tau_0(x)=\tau(p(x))$, $\tau_1(x)=\tau(q(x))$,

$$R_0[\tau_0]=a\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+p(x)}{1-p(s)}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{p(s)+p(x)},$$

$$R_1[\tau_1]=\frac{b}{2}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+p(x)}{1-q(s)}\right)\frac{\tau_1(s)ds}{q(s)+p(x)}$$

— регулярные операторы, $F_1(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{p(x)}F(s)ds$ — известная функция.

Уравнение (27) является сингулярным интегральным уравнением с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, так как ядро первого интегрального оператора правой части (27) имеет изолированную особенность первого порядка в точке $(x,s)=(c,c)$, поэтому этот оператор выделен отдельно.

Справедлива

Теорема 3. *Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $-1<x<c$ и $g_0(x)\in L_p(-1,c)$, $p>1$, то решение сингулярного интегрального уравнения первого рода (27) в классе функций H, в котором функция $(1+x)^{-1}\tau_0(x)$ ограничена на правом конце и может быть неограниченной на левом конце интервала $(-1,c)$, выражается формулой*

$$\tau_0(x)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{c}\sqrt{\frac{(c-x)(1+x)}{(c-t)(1+t)}}\frac{g_0(t)dt}{t-x},\quad x\in(-1,c), \tag{28}$$

где

$$g_0(x)=-\frac{b}{2}\int_{-1}^{c}\frac{\tau_1(s)ds}{c-ax-bs}+R_0[\tau_0]+R_1^*[\tau_1]+F_1(x), \tag{29}$$

$$R_1^*[\tau_1]=R_1[\tau_1]-\frac{ab}{2}\int_{-1}^{c}\left[\frac{1+x}{1-as-bs}-\frac{1}{a}\right]\frac{\tau_1(s)ds}{c-ax-bs}.$$

Метод доказательства теоремы 3 идентичен методу, изложенному в книге ([11], с. 42). Далее, подставляя в (28) выражение для $g_0(x)$ из (29), имеем

$$\tau_0(x)=-\frac{b}{2\pi^2}\int_{-1}^{c}\tau_1(s)ds\int_{-1}^{c}\sqrt{\frac{(c-x)(1+x)}{(c-t)(1+t)}}\frac{dt}{(c-at-bs)(t-x)}+$$
$$+R_0^*[\tau_0]+R_1^{**}[\tau_1]+F_1^*(t),\quad x\in(-1,c), \tag{30}$$

где $R_0^*[\tau_0], R_1^{**}[\tau_1]$ — регулярные операторы, $F^*(x)$ — известная функция. Вычислив в (30) внутренний интеграл с помощью интегрального представления гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b,c;x)$ ([11], с. 6), имеем

$$\int_{-1}^{c}\sqrt{\frac{(c-x)(1+x)}{(c-t)(1+t)}}\frac{dt}{(c-at-bs)(t-x)}=$$

$$=\frac{\pi}{c-ax-bs}\left[\left(\frac{c-x}{1+c}\right)^{1/2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{c-x}{1+c}\right)+\frac{a}{b^{1/2}}\left(\frac{1+x}{c+a-bs}\right)^{1/2}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{1/2}\right]. \quad (31)$$

В силу (31) уравнение (30) запишем в виде

$$\tau_0(x)=-\frac{ab^{1/2}}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{c+a-bs}\right)^{1/2}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{1/2}\frac{\tau_1(s)ds}{c-ax-bs}+$$
$$+R_0^*[\tau_0]+R_2[\tau_1]+F_2(x), \quad x\in(-1,c), \quad (32)$$

где

$$R_2[\tau_1]=R_1^{**}[\tau_1]-\frac{b}{2\pi}\left(\frac{c-x}{1+c}\right)^{1/2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{c-x}{1+c}\right)\int_{-1}^{c}\frac{\tau_1(s)ds}{c-ax-bs}$$

— регулярный оператор.

Соотношение (32) является первым уравнением между неизвестными функциями $\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$.

Вывод второго соотношения между неизвестными функциями $\tau_0(x)$ *и* $\tau_1(x)$. Вернемся к соотношению (13), которое имеет место только для $x\in(-c,c)$. Исключив $\nu(x)$ из соотношений (13) и (17), получим следуюшее уравнение для промежутка $(-c,c)$:

$$\tau'(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tau'(t)dt}{t-x}=\Psi_1(x), \quad x\in(-c,c), \quad (33)$$

где

$$\Psi_1(x)=\psi'((x-1)/2)+F(x).$$

Разлагая в (33) промежуток интегрирования $(-1,1)$ на три интервала: $(-1,-c),(-c,c)$, $(c,1)$, запишем его в виде

$$\tau'(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-c}\frac{\tau'(t)dt}{t-x}-\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\tau'(t)dt}{t-x}-\frac{1}{\pi}\int_{c}^{1}\frac{\tau'(t)dt}{t-x}=\Psi_1(x), \quad x\in(-c,c).$$

В третьем интеграле переменную интегрирования t поменяв на $-t$ с учетом аналога условия Франкля (11): $\tau'(-t)=-\tau'(t)+f'(t)$, получим

$$\tau'(t)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-c}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)\tau'(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\tau'(t)dt}{t-x}=\Psi_2(x), \quad x\in(-c,c), \quad (34)$$

где

$$\Psi_2(x)=\Psi_1(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-c}\frac{f'(t)dt}{t-x}.$$

Интегрируя соотношение (34) в пределах от $-c$ до $x\in(-c,c)$ и выполнив соответствующие вычисления, получим сингулярное интегральное уравнение

$$\tau(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-c}\left[\left(\frac{c+x}{c+t}\right)\frac{1}{t-x}-\left(\frac{c+x}{c+t}\right)\frac{1}{t+x}\right]\tau(t)dt-\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\left(\frac{c+x}{c+t}\right)\frac{\tau(t)dt}{t-x}=\Psi_3(x),\ x\in(-c,c), \quad (35)$$

где
$$\Psi_3(x) = \int_{-c}^{x} \Psi_2(s)ds.$$

Здесь, как и выше при выводе первого функционального соотношения (32) между неизвестными функциями $\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$, отметим, что в уравнении (35) промежутки интегрирования разные: $(-1,-c)$ и $(-c,c)$, и с целью рассмотрения их в одном промежутке $(-1,c)$ в интеграле по промежутку $(-1,c)$ сделаем замену переменного интегрирования $t = p(s) = as-b$ (где $t \in (-1,-c),\ s \in (-1,c)$), а в интеграле по промежутку $(-c,c)$ сделаем замену переменного интегрирования $t = q(s) = -ac-bs$ (где $t \in (-c,c),\ s \in (-1,c)$), затем, поменяв переменную $x \in (-c,c)$ на $q(x) = -ac-bx$ (здесь $x \in (-1,c)$), где $a = (1-c)/(1+c),\ b = 2c/(1+c)$, причем $p(-1) = -1,\ p(c) = -c,\ q(-1) = c,\ q(c) = -c$, получим
$$\tau(q(x)) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\left[\left(\frac{c+q(x)}{c+p(s)}\right)\frac{1}{p(s)-q(x)} - \left(\frac{c+q(x)}{c-p(s)}\right)\frac{1}{p(s)+q(x)}\right]\tau(p(s))ads-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c+q(x)}{c+q(s)}\right)\frac{\tau(q(s))bds}{q(s)-q(x)} = \Psi_3(q(x)),\ x \in (-1,c). \qquad (36)$$

В силу введенных обозначений $\tau_0(x) = \tau(p(x))$ и $\tau_1(x) = \tau(q(x))$, с учетом свойств функций $p(x)$ и $q(x)$ соотношение (36) запишем в виде
$$\tau_1(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)\frac{\tau_1(s)ds}{s-x} = -\frac{b}{a\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c+b-as}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as+bx-c}-$$
$$-\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c+b-as}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as-bx-ac-b} + \Psi_4(x), \quad x \in (-1,c),$$
где
$$\Psi_4(x) = \Psi_3(q(x)). \qquad (37)$$

Уравнение (37) является сингулярным интегральным уравнением относительно неизвестной функции $\tau_1(x)$ с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, так как ядра первого и второго интегральных операторов правой части (37), соответственно, в точках $(x,s) = (c,c)$ и $(x,s) = (-1,c)$ (в (37) $a+b=1$) имеют изолированные особенности первого порядка.

Временно считая правую часть уравнения (37) известной функцией и введя обозначения
$$g_0(x) = -\frac{b}{a\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as+bx-c}-$$
$$-\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c+b-as}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as-bx-ac-b} + \Psi_4(x), \quad x \in (-1,c), \qquad (38)$$
уравнение (37) запишем в виде
$$\tau_1(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)\frac{\tau_1(s)ds}{s-x} = g_0(x), \quad x \in (-1,c). \qquad (39)$$

Справедлива

Теорема 4. *Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in (-1,c)$ и $g_0(x) \in L_p(-1,c)$, $p > 1$, то решение уравнения (39) в классе функций H, в котором $(c-x)^{-1}\tau_1(x)$ ограничена на левом конце и может быть не ограничена на правом конце интервала $(-1,c)$, выражается формулой*
$$\tau_1(x) = \frac{g_0(x)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\alpha}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1-\alpha}\frac{g_0(t)dt}{t-x}, \quad x \in (-1,c), \qquad (40)$$

где $\alpha = 1/4$.

Метод доказательства теоремы 4 идентичен методу, изложенному в книге ([11], с. 42).

Продолжим исследование соотношения (40). Подставляя в (40) выражение для $g_0(x)$ из (38), имеем

$$\tau_1(x) = -\frac{b}{2a\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as+bx-c} - \frac{b}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c+b-as}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as-bx-ac-b}+$$
$$+\frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{1-\alpha}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{\tau_0(s)ds}{c-s}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(as+bt-c)(t-x)}+$$
$$+\frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{1-\alpha}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{\tau_0(s)ds}{(c+b-as)}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(as-bt-ac-b)(t-x)}+\Psi_4(x),\ x\in(-1,c), \tag{41}$$

где

$$\Psi_4(x) = \frac{\Psi_3(x)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{\alpha}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1-\alpha}\frac{\Psi_3(t)dt}{t-x}.$$

Вычислим внутренние интегралы в двойных интегралах (41)

$$A(x,s) = \int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(as+bt-c)(t-x)},\quad x\in(-1,c),$$
$$B(x,s) = \int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(as-bt-ac-b)(t-x)},\quad x\in(-1,c).$$

Вычислим $A(x,s)$. Разлагая рациональную часть подинтегрального выражения на простые дроби, получим

$$A(x,s) = \frac{1}{ac+bx-c}\left[\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{bdt}{(as+bt-c)} - \int_{-1}^{c}\left(\frac{c-t}{1+t}\right)^{\alpha}\frac{dt}{(t-x)}\right]. \tag{42}$$

В (42) для первого интеграла выполнив замену переменного интегрирования $t = -1 + (1+c)\sigma$ и используя интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса, а для второго интеграла используя формулу ([13], с. 301)

$$\int_{a}^{b}\left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\left[\cos(\alpha\pi)\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1}+1\right],$$

получим

$$A(x,s) = \frac{1}{ac+bx-c}\left[\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)\left(\frac{c-x}{1+x}\right)^{\alpha-1} + A_3(s)\right], \tag{43}$$

где

$$A_3(s) = \frac{b(1+c)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{as-b-c}F\left(1-\alpha,1,2;\frac{b(1+c)}{(b+c-as)}\right) + \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{44}$$

причем $A_3(c) = 0$.

Аналогично, как и выше, вычислим

$$B(x,s) = \frac{1}{as-bx-ac-b}\left[-\pi\operatorname{ctg}(\alpha\pi)\left(\frac{c-x}{1+x}\right)^{\alpha} + B_3(s)\right], \tag{45}$$

где

$$B_3(s) = \frac{b(1+c)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{as-c-b}F\left(1+\alpha,1,2;\frac{b(1+c)}{(b+c-as)}\right) - \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)},$$

причем $B_3(c) = 0$.

Таким образом, на основании (43) и (45) уравнение (41) запишем в виде

$$\tau_1(x) = -\frac{b(1-\mathrm{ctg}(\alpha\pi))}{2a\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as-bx-c}-$$
$$-\frac{b(1-\mathrm{ctg}(\alpha\pi))}{2a\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c+b-as}\right)\frac{\tau_0(s)ds}{as-bx-ac-b}+$$
$$+\frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{1-\alpha}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{A_3(s)}{c-s}\frac{\tau_0(s)ds}{as+bx-c}+$$
$$+\frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{1-\alpha}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{B_3(s)}{(c+b-as)}\frac{\tau_0(s)ds}{as-bx-ac-b}+\Psi_4(x), \quad x\in(-1,c). \tag{46}$$

С учетом тождества $1-\mathrm{tg}(\alpha\pi)=0$, где $\alpha=1/4$, уравнение (46) запишем в виде

$$\tau_1(x) = \frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{1-\alpha}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{A_3(s)}{c-s}\frac{\tau_0(s)ds}{as+bx-c}+$$
$$+\frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{1-\alpha}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{B_3(s)}{(c+b-as)}\frac{\tau_0(s)ds}{as-bx-ac-b}+\Psi_4(x), \quad x\in(-1,c). \tag{47}$$

Согласно равенству $A_3(c)=0$ вычислим порядок бесконечности в окрестности точки $s=c$ дроби $A_3(s)/(c-s)$, которое является множителем первого интегрального оператора правой части (47). В силу тождества

$$\frac{b(1+c)}{as-b-c} = \frac{a(c-s)}{b+c-as}-1$$

равенство (44) запишем в виде

$$A_3(s) = \frac{a\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}\frac{c-s}{b+c-as}F\left(1-\alpha,1,2,\frac{b(1+c)}{b+c-as}\right)+A_4(s), \tag{48}$$

где

$$A_4(s) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\left[1-\alpha F\left(1-\alpha,1,2,\frac{b(1+c)}{b+c-as}\right)\right].$$

Легко вычислить, что

$$\lim_{s\to c}\frac{A_4(s)}{(c-s)^{\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha\sin(\alpha\pi)}\left(\frac{2c}{a}\right)^{1-\alpha}. \tag{49}$$

В силу (49) равенство (48) преобразуем к виду

$$\frac{A_3(s)}{c-s} = \frac{\pi}{\alpha\sin(\alpha\pi)}\left(\frac{2c}{a}\right)^{1-\alpha}\frac{1}{(c-s)^{1-\alpha}}+A_5(s), \tag{50}$$

где

$$A_5(s) = \frac{a\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}\frac{1}{b+c-as}F\left(1-\alpha,1,2,\frac{b(1+c)}{b+c-as}\right)+$$
$$+\frac{1}{(c-s)^{1-\alpha}}\left[\frac{A_4(s)}{(c-s)^{\alpha}}-\frac{\pi}{\alpha\sin(\alpha\pi)}\left(\frac{2c}{a}\right)^{1-\alpha}\right], \tag{51}$$

с учетом (49) из (51) следует $A_5(s)=O\left(\frac{1}{(c-s)^{1-\alpha-\delta}}\right)$, где δ — некоторое число: $0<\delta<1-\alpha$.

Таким образом, $A_5(s)$ имеет интегрируемую особенность порядка меньше $1-\alpha$.

Согласно (50) уравнение (47) запишем в виде

$$\tau_1(x) = -\frac{bc^{1-\alpha}(1+x)^{\alpha}}{2^{\alpha}a^{2-\alpha}\alpha\pi\sin(\alpha\pi)}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1-\alpha}\frac{\tau_0(t)dt}{c-bx-at} + T[\tau_0] + \Psi_4(x), \quad x\in(-1,c). \quad (52)$$

где

$$T[\tau_0] = \frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{\alpha-1}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{A_5(s)\tau_0(s)ds}{as+bx-c} +$$
$$+\frac{b(1+x)^{\alpha}(c-x)^{\alpha-1}}{2a\pi^2}\int_{-1}^{c}\frac{B_3(s)}{(c+b-as)}\frac{\tau_0(s)\tau_0(s)ds}{as-bx-ac-b}$$

— регулярный оператор,$\Psi_4(x)$ — известная функция.

Соотношение (52) является вторым уравнением между неизвестными функциями $\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$. Таким образом, задача TF эквивалентно сведена к решению системы интегральных уравнений (32) и (52).

Уравнение (52) характерно тем, что оно разрешено относительно $\tau_1(x)$, что позволяет из уравнения (32) исключить $\tau_1(x)$.

Подставляя выражение для $\tau_1(x)$ из (52) в (32) и выделив характеристическую часть уравнения, получим

$$\tau_0(x) = k_3\int_{-1}^{c}\tau_0(t)dt\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{1/2}\left(\frac{c-s}{c-t}\right)^{1-\alpha}\frac{ds}{(c-bs-at)(c-ax-bs)} +$$
$$+R_3[\tau_0] + F_3(x), \quad x\in(-1,c), \quad (53)$$

где

$$k_3 = \frac{b^{3/2}c^{1-\alpha}}{2^{1+\alpha}a^{3/2-\alpha}\pi^2\alpha\sin(\alpha\pi)}$$

$$R_3[\tau_0] = K_3\int_{-1}^{c}\tau_0(t)dt\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{1/2}\left(\frac{c-s}{c-t}\right)^{1-\alpha}\left[\left(\frac{1+x}{c+a-bs}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{a}\right)^{1/2}\right]\times$$
$$\times\frac{ds}{(c-bs-at)(c-ax-bs)} - \frac{ab^{1/2}}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{c+a-bs}\right)^{1/2}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{1/2}\frac{T[\tau_0]ds}{c-ax-bs} +$$
$$+R_0^*[\tau_0] + R_2^*[\tau_0] + F_3(x), \quad x\in(-1,c),$$

— регулярный оператор,

$$F_3(x) = F_2(x) - \int_{-1}^{c}\frac{ab^{1/2}}{2\pi}\left(\frac{1+x}{c+a-bs}\right)^{1/2}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{1/2}\frac{\Psi_4(s)ds}{c-ax-bs}$$

— известная функция. $R_2^*[\tau_0]$ получается из $R_2[\tau_1]$ заменой здесь $\tau_1(x)$ его представлением через $\tau_0(x)$ (52). Подставляя в (53) для числового параметра α его численное значение $\alpha = 1/4$, вычислим внутренний интеграл. Для этого, разлагая рациональную часть подынтегрального выражения на простые дроби, затем используя интегральное представление гипергеометрической функции Гаусса и равенство

$$A(t) = \int_{-1}^{c}\left(\frac{1}{c-s}\right)^{1/4}\frac{ds}{c-bs-at} = \frac{3}{4}\frac{(1+c)^{3/4}a^{-1/4}}{(c+b-at)^{3/4}}\frac{1}{(c-t)^{1/4}}F\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{7}{4};\frac{b(1+c)}{c+b-at}\right),$$

где $A(t)\in C^1(-1,c)$, уравнение (53) запишем в виде

$$\tau_0(x) = \frac{k_3}{a}\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-t}\right)^{1/4}\frac{(A(t)-A(x))}{t-x}\tau_0(t)dt + R_3[\tau_0] + F_3(x), \quad x\in(-1,c).$$

Уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $\tau_0(x)$, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи TF. Теорема 2 доказана. □

Литература

[1] Трикоми Ф. *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа* (Гостехиздат, М.–Л., 1947).

[2] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения,* Прикл. матем. и механ. **20** (2), 196–202 (1956).

[3] Девенгталь Ю.В. *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля,* Изв. вузов. Матем. (2), 39–51 (1958).

[4] Линь Цзянь-бин *О некоторых задачах Франкля,* Вестн. ЛГУ. Матем. механ. и астрономия **3** (13), 28–39 (1961).

[5] Бабенко К.И. *К теории уравнений смешанного типа,* Дисс. ... докт. физ.-матем. наук (Рос. нац. биб-ка, 1952).

[6] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (Univ., Ташкент, 2005).

[7] Жегалов В.И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и разрывными на переходной линии,* Учен. зап. Казан. ун-та **122** (3), 3–16 (1962).

[8] Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа,* Дифференц. уравнения **5** (1), 44–59 (1969).

[9] Мирсабурова Г.М. *Задача с аналогом условия Бицадзе–Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений,* Изв. вузов. Матем. (6), 54–59 (2022).

[10] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).

[11] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Высш. школа, М., 1985).

[12] Мирсабурова У.М. *Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом*, Изв. вузов. Матем. (9), 70–82 (2022).

[13] Прудников А.П, Брычков Ю.А. *Интегралы и ряды* (Наука, М., 1981).

Мирахмат Мирсабуров

Термезский государственный университет,
ул. Баркамол авлод, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,

e-mail: mirsaburov@mail.ru

Расул Нортожиевич Тураев

Термезский государственный университет,
ул. Баркамол авлод, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,

e-mail: rasul.turaev@mail.ru

M. Mirsaburov and R.N. Turaev

A problem in an unbounded domain with combined Tricomi and Frankl conditions on one boundary characteristic for one class of mixed type equations

Abstract. In this work, in an unbounded domain, we prove the cof the problem with combined Tricomi and Frankl conditions on one boundary characteristic for one class of equations of mixed type.

Keywords: unbounded domain, equation of mixed type, singular coefficient, combined Tricomi and Frankl condition, singular integral equation of the first and second kind.

Mirakhmat Mirsaburov

Termez State University,
43 Barkamol avlod str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,

e-mail: mirsaburov@mail.ru

Rasul Nortojievich Turaev

Termez State University,
43 Barkamol avlod str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,

e-mail: rasul.turaev@mail.ru