

Д.Б. КАЦ

ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ ПЛОСКИМ КРИВЫМ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Аннотация. В обзоре обсуждаются две тесно связанные между собой проблемы: решение краевой задачи Римана для аналитических функций и некоторых их обобщений в областях комплексной плоскости с неспрямляемыми границами, и построение обобщения криволинейного интеграла на неспрямляемые кривые, сохраняющего важные для комплексного анализа свойства.

Данная работа отражает современное состояние вопроса, и многие приведенные в ней результаты получены совсем недавно. В конце статьи вниманию читателей предлагается ряд нерешенных проблем, каждая из которых может служить исходным пунктом научного исследования.

Ключевые слова: краевая задача Римана, неспрямляемая кривая, контурный интеграл.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-12-17-38

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа возникла по причине развития теории краевых задач комплексного анализа, в первую очередь, краевой задачи Римана. Решение этой задачи — одно из общеизвестных достижений советской математики. Классические результаты в этой области получены Ф.Д. Гаховым, Н.И. Мусхелишвили и участниками созданных ими научных школ. Посвященные краевой задаче Римана монографии [1] и [2] неоднократно переиздавались и переведены на многие языки; в этих фундаментальных трудах подробно описана первоначальная история данного раздела анализа. Различные аспекты теории краевой задачи Римана и ее приложений отражены в книгах [3]–[17] и др. Новые работы в этой области появляются ежегодно.

В качестве вводной части обзора приведем классическую постановку задачи Римана и схему ее решения.

Пусть простая замкнутая кривая Γ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ разбивает эту плоскость на области D^+ и D^- , причем бесконечно удаленная точка лежит внутри второй из них. Мы ищем аналитические в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которые имеют в точках $t \in \Gamma$ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ при z стремящемся к t из областей D^+ и D^- соответственно, и эти предельные значения связаны краевым условием

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (1)$$

Поступила в редакцию 14.12.2022, после доработки 14.12.2022. Принята к публикации 29.03.2023.

Благодарности. Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10094 (<https://rscf.ru/project/22-71-10094/>).

при любом $t \in \Gamma$. Здесь $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на Γ функции.

Схема решения.

Сначала задача решается для $G \equiv 1$. Это так называемая задача о скачке

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t). \quad (2)$$

Одно из ее решений дается интегралом типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma. \quad (3)$$

Хорошо известно, что если плотность $g(t)$ этого интеграла удовлетворяет условию Гёльдера

$$h_{\nu}(g; \Gamma) := \sup \left\{ \frac{|g(t) - g(t')|}{|t - t'|^{\nu}} : t, t' \in \Gamma, t' \neq t \right\} < \infty \quad (4)$$

с показателем $\nu \in (0, 1]$, то в точках гладкости кривой Γ и в ее угловых точках определяемая этим интегралом функция $\Phi(z)$ имеет предельные значения $\Phi^{\pm}$ с обеих сторон, и разность этих значений равна значению плотности g . Это доказывает существование решений задачи о скачке на кусочно-гладких кривых. Обозначим $H_{\nu}(\Gamma)$ множество функций, удовлетворяющих условию (4).

Единственность решения вытекает из следующего результата Пенлеве (Paul Penleве (1863–1933) был премьер-министром (дважды) и военным министром Франции.).

Теорема 1 (Пенлеве). *Если функция $\Phi(z)$ непрерывна в области D и голоморфна в $D \setminus \Gamma$, где $\Gamma \subset D$ — спрямляемая кривая, то она голоморфна во всей области D .*

Иными словами, спрямляемая кривая устранима в классе непрерывных на ней и голоморфных в ее окрестности функций.

Таким образом, если $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — два решения одной и той же задачи о скачке, то согласно этой теореме их разность голоморфна в замкнутой комплексной плоскости и равна нулю в бесконечно удаленной точке. Тогда эта разность есть тождественный нуль в силу теоремы Лиувилля.

Исходная задача Римана сводится к задаче о скачке с помощью так называемого метода факторизации. Допустим, что коэффициент $G(t)$ не обращается на Γ в нуль и удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда его можно представить в виде $G(t) = (t - z_0)^{\varkappa} \exp f(t)$, где функция $f(t)$ также удовлетворяет условию Гёльдера, z_0 — фиксированная точка области D^+ , а $\varkappa$ — целое число. В теории задачи Римана это число называют индексом, индексом Гахова или wind order; оно равно числу оборотов вокруг начала координат точки $G(t)$, в то время как точка t делает один оборот вокруг точки z_0 в положительном направлении. Положим функцию $X(z)$ равной

$$\exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z}$$

при $z \in D^+$ и

$$(z - z_0)^{-\varkappa} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z}$$

при $z \in D^-$. Тогда $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, и, подставив это представление коэффициента G в краевое условие (1), мы получаем задачу о скачке

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}. \quad (5)$$

Таким образом, метод факторизации сводит задачу Римана к задаче о скачке. Искомая функция этой задачи $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ должна иметь в бесконечно удаленной точке порядок ниже $\varkappa$. Поэтому при $\varkappa > 0$ имеем

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t-z} + P(z),$$

где $P(z)$ — произвольный многочлен степени ниже $\varkappa$, и отсюда

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t-z} + X(z)P(z),$$

при $\varkappa = 0$ задача имеет единственное решение

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t-z},$$

а при $\varkappa < 0$ эта функция является единственным решением при выполнении $-\varkappa$ условий

$$\int_{\Gamma} \frac{g(t)}{X^+(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1,$$

обеспечивающих выполнение равенства $\Phi(\infty) = 0$.

Итак, классический метод решения задачи Римана имеет три источника и три составные части: теорию граничных значений интеграла типа Коши, теоремы об устранении особенностей голоморфных функций и метод факторизации. При этом каждая из этих частей подразумевает спрямляемость границы Γ , в то время как граничные условия (1) и (2) сохраняют смысл и для неспрямляемых границ Γ . Одним из прямых путей преодоления этого противоречия является введение обобщенного криволинейного интеграла по неспрямляемым путям, позволяющего рассматривать на таких путях интеграл типа Коши и его версии, возникающие при факторизации. В данном обзоре обсуждаются результаты в этом направлении. Сначала мы рассмотрим понятие обобщенного интеграла, а затем его приложения. В конце работы приведены некоторые открытые вопросы.

2. ИНТЕГРАЛЫ ПО НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ ПУТЯМ

2.1. Замкнутые неспрямляемые кривые. Для спрямляемой замкнутой кривой Γ справедлива формула Грина

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (6)$$

где D^+ — ограниченная Γ конечная область комплексной плоскости, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — заданные в $\overline{D^+}$ непрерывные функции, имеющие внутри этой области частные производные первого порядка. Здесь предполагается, что эти производные интегрируемы в D^+ .

Допустим, что заданная на Γ функция $u(t)$ имеет продолжение $U(z)$ в область D^+ , имеющее в ней интегрируемые частные производные первого порядка. Если кривая Γ кусочно-гладкая, то по формуле Грина

$$\int_{\Gamma} u dz = \int_{\Gamma} u dx + i u dy = - \iint_{D^+} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z}.$$

Здесь используются обозначения Виттинера

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

а $dz d\bar{z} = -2i dx dy$. Если u имеет продолжение в D^- с аналогичными свойствами, то без ограничения общности можно считать носитель этого продолжения компактным, и те же преобразования дают

$$\int_{\Gamma} u dz = \iint_{D^-} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z}.$$

Отсюда

$$\int_{\Gamma} (U^+(z) - U^-(z)) dz = - \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z},$$

где $U^+(z)$ и $U^-(z)$ — предельные значения U в точке z при приближении к ней из областей D^+ и D^- соответственно. Для существования левой части этого равенства необходима спрямляемость кривой Γ , но правая часть имеет смысл, если эта кривая имеет плоскую меру нуль, а производная $\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}$ интегрируема. Это позволяет считать правую часть определением левой в случае, когда кривая Γ неспрямляема.

При аналогичных ограничениях на функцию $V(z)$ мы получаем равенство

$$\int_{\Gamma} (V^+(z) - V^-(z)) d\bar{z} = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial V}{\partial z} dz d\bar{z},$$

где $V^{\pm}(z)$ — предельные значения V . Если на кривой Γ имеют место равенства

$$U^+(z) - U^-(z) = u(z), \quad V^+(z) - V^-(z) = v(z),$$

то

$$\int_{\Gamma} u(z) dz + v(z) d\bar{z} = \iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) dz d\bar{z};$$

в левой части стоит интеграл от дифференциальной формы $udz + v d\bar{z}$, а правая часть может служить определением этого интеграла, если контур интегрирования неспрямляем.

Определение 1. Интегратором заданной на Γ функции $u(t)$ называется непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $U(z)$ с компактным носителем, имеющая в каждой точке $t \in \Gamma$ предельные значения $U^+(t)$ и $U^-(t)$ слева и справа соответственно, связанные соотношением

$$U^+(t) - U^-(t) = u(t). \quad (7)$$

Интегратор называется полным, если он и его первые частные производные интегрируемы.

Если у функции u есть полный интегратор U , то функционал

$$C^1(\mathbb{C}) \ni \phi \mapsto - \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial U \phi}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z} \quad (8)$$

называется интегрированием udz по Γ и обозначается $\int_{\Gamma} \phi(z) u(z) dz$.

Аналогичный функционал

$$C^1(\mathbb{C}) \ni \phi \mapsto \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial U \phi}{\partial z} dz d\bar{z}$$

мы называем интегрированием $u d\bar{z}$ по Γ и обозначаем $\int_{\Gamma} \phi(z) u(z) d\bar{z}$. Разумеется, это позволяет определить интегрирование по неспрямляемому пути Γ и для дифференциальных форм вида $u dz + v d\bar{z}$, если оба коэффициента u, v имеют полные интеграторы.

2.2. Неспрямляемые дуги. Пусть теперь Γ — простая дуга с началом a_1 и концом a_2 . В этих двух точках требование существования предельных значений $U^{\pm}$ и $V^{\pm}$ теряет смысл. Соотношение (7) также не может, вообще говоря, выполняться на концах Γ . Таким образом, для дуг определение интегратора и интегрирования приобретает следующий вид.

Определение 2. Интегратором заданной на дуге Γ с началом a_1 и концом a_2 функции $u(t)$ называется непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $U(z)$ с компактным носителем, имеющая в каждой точке $t \in \Gamma' := \Gamma \setminus \{a_{1,2}\}$ предельные значения $U^+(t)$ и $U^-(t)$ слева и справа соответственно, связанные соотношением (7). Интегратор называется полным, если он и его первые частные производные интегрируемы.

Если у функции u есть полный интегратор U , то функционал (8) называется интегрированием $u dz$ по Γ и обозначается $\int_{\Gamma} \phi(z) u(z) dz$. Обобщенный интеграл $\int_{\Gamma} \phi(z) u(z) d\bar{z}$ определяется аналогично.

2.3. Обобщенная интегрируемость. Обобщенная интегрируемость функции по неспрямляемому пути равносильна существованию у нее полного интегратора. Сначала мы опишем условия интегрируемости по замкнутой неспрямляемой кривой.

Если Γ есть замкнутая кривая, ограничивающая область D^+ , то естественными кандидатами в интеграторы служат функции U и V , непрерывно продолжающиеся u и v в D^+ и равные нулю в $D^- = \mathbb{C} \setminus D^+$. Возможность продолжения непрерывной функции с кривой на всю комплексную плоскость составляет содержание теоремы Уитни. Мы приводим эту теорему для случая плоских множеств, следуя монографиям [18], [19].

Теорема 2 (Х. Уитни). Пусть K есть непустое компактное множество на плоскости, и на нем определена непрерывная функция $f(x, y)$. Справедливы следующие утверждения.

i) Существует непрерывная во всей плоскости функция $F(x, y)$ такая, что $F|_K = f$ (т.е. F есть продолжение f на всю плоскость), причем функцию F можно выбрать так, чтобы в $\mathbb{R}^2 \setminus K$ она имела частные производные всех порядков.

ii) Если при этом $f \in H_{\nu}(K)$, то ее продолжение Уитни удовлетворяет условию Уитни с показателем ν на всей плоскости,

$$h_{\nu}(F; \mathbb{R}^2) \leq h_{\nu}(f; K),$$

и в любой точке $z = (x, y) \notin K$ выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \leq \frac{h_{\nu}(f; K)}{\text{dist}^{1-\nu}(z, K)}, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq \frac{h_{\nu}(f; K)}{\text{dist}^{1-\nu}(z, K)}.$$

Обозначим оператор продолжения Уитни $\mathcal{E}$. Тогда интегратором заданной на замкнутой кривой Γ непрерывной функции u может служить произведение $U(z) := \chi(z) \mathcal{E}u(z)$, где $\chi(z)$

— характеристическая функция ограниченной Γ области D^+ . Остается решить вопрос о его полноте.

Сначала это было сделано в терминах верхней размерности Минковского кривой Γ

$$\overline{\text{dm}} \Gamma := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(\Gamma, r)}{-\ln r},$$

где $N(\Gamma, r)$ — наименьшее число кругов радиуса r , необходимых для покрытия Γ (см., например, [20], [21]). Доказано [22], что если $u \in H_\nu(\Gamma)$, то вблизи Γ производная $\mathcal{E}u$ по $\bar{z}$ интегрируема в любой степени, меньшей величины

$$p(\nu, \Gamma) := \frac{2 - \overline{\text{dm}} \Gamma}{1 - \nu}.$$

Отсюда немедленно следует

Теорема 3. *Заданная на замкнутой кривой Γ функция $u \in H_\nu(\Gamma)$ интегрируема по этой кривой в смысле определения 1, если*

$$\nu > \overline{\text{dm}} \Gamma - 1. \quad (9)$$

Условие интегрируемости (9) неумлучшаемо в следующем смысле. Пусть заданы два числа: $d \in [1, 2)$, $\nu \in (0, 1)$, причем $\nu \leq d - 1$. Тогда найдутся замкнутая жорданова кривая Γ и заданная на ней функция $f \in H_\nu(\Gamma)$ такие, что интегралы $\int_\Gamma f dz$ и $\int_\Gamma f d\bar{z}$ расходятся.

Однако его можно улучшить в терминах иных метрических характеристик. С этой целью в работе [23] были введены так называемые показатели Марцинкевича.

Пусть, как и выше, Γ есть простая замкнутая кривая, разбивающая комплексную плоскость на две области: конечную D^+ и содержащую бесконечно удаленную точку область D^- . Будем считать, что Γ есть множество меры нуль. Обозначим

$$I_p^\pm(t; r) = \iint_{B^\pm(t; r)} \frac{dx dy}{\text{dist}^p(x + iy, \Gamma)},$$

где $r > 0$, $p > 0$, $B(t; r) := \{z : |z - t| < r\}$, $B^\pm(t; r) := B(t; r) \cap D^\pm$.

Определение 3. Внутренний и внешний показатели Марцинкевича кривой Γ в ее точке t определяются равенствами

$$\mathbf{m}^\pm(\Gamma; t) := \sup\{p : \lim_{r \rightarrow 0} I_p^\pm(t; r) < \infty\}.$$

Величина

$$\mathbf{m}(\Gamma; t) := \max\{\mathbf{m}^+(\Gamma; t), \mathbf{m}^-(\Gamma; t)\}$$

называется показателем Марцинкевича.

Условие интегрируемости в терминах этой характеристики таково.

Теорема 4. *Заданная на замкнутой кривой Γ функция $u \in H_\nu(\Gamma)$ интегрируема по этой кривой в смысле определения 1, если для любого $t \in \Gamma$*

$$\nu > 1 - \mathbf{m}(\Gamma; t). \quad (10)$$

Отметим, что показатели Марцинкевича любой замкнутой кривой в любой ее точке удовлетворяют неравенствам

$$2 - \overline{\text{dm}} \Gamma \leq \mathbf{m}^\pm(\Gamma; t) \leq 1,$$

причем существуют кривые, для которых оба эти неравенства строгие. Значит, условие (10) менее ограничительно, чем условие (9).

Условие (10) может быть локализовано. Если $u \in H_\nu(\Gamma)$, то локальным показателем этой функции можно назвать заданную на Γ вещественную функцию $\nu(t)$, что каждая точка $t \in \Gamma$ имеет окрестность, в которой u удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\nu(t)$. Постоянная ν является одним из локальных показателей, но функция u может иметь другие локальные показатели, в том числе превосходящие ν в отдельных точках. Условие (10) можно заменить условием существования такого локального показателя $\nu(t)$, что

$$\nu(t) > 1 - \mathfrak{m}(\Gamma; t), \quad t \in \Gamma,$$

и это локализованное условие может оказаться менее ограничительным, чем (10).

Пусть теперь Γ — простая дуга с началом a_1 и концом a_2 . Показатели Марцинкевича в ее внутренних точках определяются точно так же, как для замкнутой кривой, а в концевых точках —

$$\mathfrak{m}(\Gamma; a_j) := \sup\{p : \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{B(a_j; r)} \frac{dx dy}{\text{dist}^p(x + iy, \Gamma)} < \infty\}.$$

Далее, обозначим

$$K(z) := \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1} \quad (11)$$

однозначную в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ ветвь логарифма, исчезающую в бесконечно удаленной точке. Эта функция имеет единичный скачок на Γ' , что делает ее аналогом использованной выше характеристической функции. Интегратором заданной на дуге Γ непрерывной функции u может служить произведение $U(z) := \psi(z)K(z)\mathcal{E}u(z)$, где $\psi(z)$ — гладкая функция с компактным носителем, равная единице на Γ и в ее окрестности. Отсюда следует

Теорема 5. *Заданная на дуге Γ функция $u \in H_\nu(\Gamma)$ интегрируема по этой дуге в смысле определения 2, если логарифмическое ядро $K(z)$ интегрируемо вблизи концов a_j дуги в степенях $p_j > 1, j = 1, 2$, во внутренних точках дуги выполнено условие (10), а на ее концах — условие*

$$\nu > 1 - \frac{p_j - 1}{p_j} \mathfrak{m}(\Gamma; a_j), \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Этот результат также допускает локализацию.

Заметим, что если логарифмическое ядро (11) не интегрируемо в окрестности одного или обоих концов дуги, то предложенный интегратор не является полным и обобщенный интеграл не определен. Примером может служить дуга

$$\Gamma := \{0\} \cup \{z = r \exp 2\pi i r^{-p} : 0 < r \leq 1\}, \quad p > 2.$$

Мы будем говорить, что такая дуга имеет сильное закручивание. Краевые задачи Римана на дугах сильного закручивания образуют новый, ранее не изученный класс задач.

2.4. Единственность обобщенного интеграла. Существенным отличием обобщенного криволинейного интеграла является его неединственность. Функция u имеет множество интеграторов. Но при определенных условиях различные интеграторы могут порождать одно и то же интегрирование. Приведем результаты такого рода, формулируемые в терминах размерности Хаусдорфа. Эта метрическая характеристика хорошо известна (см., например, [24], [20]), но мы приведем ее определение для полноты.

Пусть, как и выше, $B(z, r)$ означает круг радиуса r с центром z . Величина

$$\mathcal{H}_r^\lambda(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n r_k^\lambda : E \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r_k), x_k \in E, 0 < r_k \leq r \right\}$$

называется λ -мерным r -контентом Хаусдорфа компактного множества $E \subset \mathbf{C}$, а

$$\mathcal{H}^\lambda(E) = \lim_{r \downarrow 0} \mathcal{H}_r^\lambda(E)$$

— его λ -мерой. Размерность Хаусдорфа множества E есть

$$\text{dmh}(E) := \inf \{ \lambda \geq 0 : \mathcal{H}^\lambda(E) = 0 \}.$$

Теорема 6. Пусть Γ есть простая замкнутая неспрямляемая кривая. Если заданная на ней непрерывная функция u имеет два полных интегратора, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем

$$\nu > \text{dmh}(\Gamma) - 1 \quad (13)$$

в обеих односторонних окрестностях Γ , то эти интеграторы определяют одинаковые интегрирования $\int_\Gamma u dz$. То же относится к интегрированиям $\int_\Gamma v d\bar{z}$.

Теорема 7. Пусть Γ есть простая неспрямляемая дуга. Если заданная на ней непрерывная функция u имеет два полных интегратора, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем (13) в области $N \setminus \Gamma$, где N — окрестность Γ , то эти интеграторы определяют одинаковые интегрирования $\int_\Gamma u dz$. То же относится к интегрированиям $\int_\Gamma v d\bar{z}$.

Доказательства этих теорем сходны с доказательством теоремы Е.П. Долженко об устранении особенностей аналитических функций [25] (см. ниже).

Обе эти теоремы допускают локализацию: в условии (13) показатель ν можно заменить локальным показателем $\nu(t)$, а размерность $\text{dmh}(\Gamma)$ — размерностью Хаусдорфа окрестности точки t .

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Основные приложения обобщенного интеграла касаются краевой задачи Римана для аналитических функций. Как уже отмечалось во введении, важным инструментом здесь является интеграл типа Коши, определяющий проекторы заданных на Γ функций на пространства функций, продолжимых до аналитических по разные стороны от Γ .

3.1. Интеграл типа Коши. Чтобы определить интеграл типа Коши (3) по неспрямляемому пути, введем гладкий аналог ядра Коши. При фиксированном $z \in \mathbf{C} \setminus \Gamma$ обозначим через $\mathcal{C}a(w, z)$ функцию класса $C_0^\infty(\mathbf{C})$ (по переменной w), совпадающую с $(2\pi i(w - z))^{-1}$ на пути Γ и в его окрестности, и равную нулю в окрестности z . Тогда интеграл типа Коши с плотностью u по неспрямляемой дуге Γ — это функция

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \mathcal{C}a(w, z) u(w) dw, \quad (14)$$

т. е. результат применения к ядру $\mathcal{C}a(w, z)$ определенного в предыдущем разделе функционала $\int_\Gamma u dw$.

При условиях теорем 4 и 5 эта функция голоморфна в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке. Простые преобразования дают

$$\Phi(z) = U(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial U}{\partial \bar{w}} \frac{dw d\bar{w}}{w - z}, \quad (15)$$

где U — полный интегратор u .

Свойства входящего сюда двойного интеграла (потенциала Коши) хорошо известны (см., например, [26]). Если функция $\varphi(z)$ имеет компактный носитель и интегрируема в степени $p > 2$, то ее потенциал Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\varphi(w) dw d\bar{w}}{w - z}$$

непрерывен во всей комплексной плоскости и удовлетворяет там условию Гёльдера с любым показателем, не превосходящим величины $1 - \frac{2}{p}$. Если же $1 < p \leq 2$, то потенциал Коши интегрируем в некоторой степени, превосходящей два. Отсюда и из теорем 4 и 5 получаем следующие результаты о граничных свойствах обобщенного интеграла Коши по неспрямляемым путям.

Теорема 8. Пусть Γ есть замкнутая кривая, и для любого $t \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\nu > 1 - \frac{1}{2} \mathbf{m}(\Gamma; t). \quad (16)$$

Тогда для любой заданной на Γ функции $u \in H_\nu(\Gamma)$ существует полный интегратор $U(z)$ такой, что обобщенный интеграл типа Коши (14) определяет голоморфную в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ функцию, исчезающую в бесконечно удаленной точке и имеющую в каждой точке $t \in \Gamma$ непрерывные предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ из областей D^+ и D^- соответственно, разность которых равна $u(t)$. Кроме того, в областях D^+ и D^- эта функция удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем, меньшим

$$\min \left\{ t \in \Gamma : 1 - \frac{2(1 - \nu)}{\mathbf{m}(\Gamma; t)} \right\}. \quad (17)$$

Теорема 9. Пусть Γ есть простая дуга, во всех внутренних точках которой выполняется условие (16), а на концах — условие (12). Тогда для любой заданной на Γ функции $u \in H_\nu(\Gamma)$ существует полный интегратор $U(z)$ такой, что обобщенный интеграл типа Коши (14) определяет голоморфную в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ функцию, исчезающую в бесконечно удаленной точке и имеющую в каждой точке $t \in \Gamma'$ непрерывные предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ слева и справа соответственно, разность которых равна $u(t)$. Кроме того, в достаточно малых полукрестностях внутренних точек дуги эта функция удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем, меньшим (17), а в окрестностях концов дуги интегрируема в степени, большей двух.

3.2. Задача Римана на замкнутой кривой. Здесь мы опишем решение задачи (1) в предположении, что замкнутая кривая Γ неспрямляема.

Помимо неопределенности обычного криволинейного интеграла по такой кривой (мы заменим его обобщенным интегралом) в этой ситуации возникает проблема возможной неустранимости неспрямляемой кривой в классе непрерывных функций. Теорема Пенлеве теряет справедливость, и решение задачи о скачке перестает быть единственным. Но вместо этой теоремы можно использовать следующий результат Е.П. Долженко [25].

Теорема 10 (Е.П. Долженко). Пусть Γ — компактное подмножество области D . Если функция $u(z) \in H_\mu(D)$ голоморфна в $D \setminus \Gamma$ и

$$\mu > \text{dmh } \Gamma - 1, \quad (18)$$

то эта функция голоморфна в D .

Согласно теореме Геринга, Хеймана и Хинканена [27] всякая голоморфная в области D функция, удовлетворяющая на границе D условию Гёльдера, удовлетворяет этому условию (и с тем же показателем) в замыкании D . Поэтому в теореме Е.П. Долженко можно заменить условие $u(z) \in H_\mu(D)$ на $u(z) \in H_\mu(\Gamma)$. Включив это условие устранимости в постановку краевой задачи Римана на замкнутой неспрямляемой кривой, мы добьемся единственности решения задачи о скачке. В итоге постановка задачи Римана приобретает следующий вид.

Пусть простая неспрямляемая замкнутая кривая Γ разбивает плоскость $\mathbf{C}$ на области D^+ и D^- , причем бесконечно удаленная точка ∞ лежит внутри второй из них. Мы ищем исчезающие в этой точке и голоморфные в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которые имеют на дуге Γ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ из областей D^+ и D^- соответственно, связанные краевым условием (1), а также удовлетворяют на Γ условию Гёльдера с показателем, удовлетворяющим условию (18).

Рассмотрим сначала задачу о скачке, т.е. положим $G(t) \equiv 1$. Если $g \in H_\nu(\Gamma)$ и выполнено условие (16), то решение этой задачи дается обобщенным интегралом типа Коши

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \mathcal{C}a(w, z) g(w) dw, \quad (19)$$

и при

$$\mu := \min\{t \in \Gamma : 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma; t)}\} > \text{dmh } \Gamma - 1 \quad (20)$$

это решение единственно в силу теоремы Е.П. Долженко.

Перейдем к однородной задаче Римана, т.е. к случаю $g(t) \equiv 0$, предполагая при этом, что $G(t)$ не обращается на Γ в нуль. Пусть $G \in H_\nu(\Gamma)$. Тогда эту функцию можно представить в виде $G(t) = (t - z_0)^\varkappa \exp f(t)$, где z_0 — произвольно фиксированная точка области D^+ , $f \in H_\nu(\Gamma)$, а $\varkappa$ — не зависящее от z_0 целое число, называемое нередко индексом Гахова. Положим

$$\Psi(z) = \int_{\Gamma} \mathcal{C}a(w, z) f(w) dw$$

и рассмотрим функцию $X(z)$, равную

$$\exp \Psi(z) \text{ при } z \in D^+ \text{ и } (z - z_0)^{-\varkappa} \exp \Psi(z) \text{ при } z \in D^-.$$

При условии (16) эта функция имеет на Γ предельные значения с обеих сторон, связанные равенством

$$X^+(t) = G(t)X^-(t), \quad t \in \Gamma.$$

Поэтому для показателя (20) однородная задача при $\varkappa \leq 0$ имеет только нулевое решение, а при $\varkappa \leq 0$ ее общее решение есть произведение $X(z)P(z)$, где $P(z)$ — произвольный полином степени ниже $\varkappa$.

Наконец, обратимся к неоднородной задаче (1). Если $G, g \in H_\nu(\Gamma)$, $G(t)$ не обращается в нуль, выполнено условие (16), то факторизация сводит ее к задаче о скачке (5), и нам

остается построить полный интегратор ее скачка $\frac{g(t)}{X^+(t)}$. При выполнении условия (16) таковым является произведение $\chi(z)X^{-1}(z)\mathcal{E}g(z)$, и мы получаем такой результат.

Теорема 11. Пусть Γ — простая замкнутая неспрямляемая кривая, коэффициенты G, g принадлежат пространству $H_\nu(\Gamma)$, причем $G(t)$ не обращается в нуль и выполнено условие (16). Если показатель μ в приведенной в этом разделе постановке задачи Римана удовлетворяет условию (20), то картина ее разрешимости такова:

- при $\varkappa > 0$ задача имеет общее решение $\Phi(z) = \Phi_0(z) + X(z)P(z)$, где $\Phi_0(z) := X(z) \int_{\Gamma} \text{Ca}(w, z) \frac{g(w)}{X^+(w)} dw$, а $P(z)$ — произвольный полином степени ниже $\varkappa$;
- при $\varkappa = 0$ задача имеет единственное решение $\Phi_0(z)$;
- при $\varkappa < 0$ задача имеет единственное решение $\Phi_0(z)$ при выполнении $-\varkappa$ условий разрешимости.

Таким образом, задача Римана на неспрямляемой кривой имеет ту же качественную картину разрешимости, что и на кусочно-гладкой. Но на дугах это не так.

3.3. Задача Римана на неспрямляемой дуге I. Пусть теперь Γ — ориентированная простая дуга с началом в точке a_1 и концом a_2 , $\Gamma' := \Gamma \setminus \{a_{1,2}\}$ — множество ее внутренних точек. Мы рассмотрим краевую задачу Римана на ней в следующей постановке.

Отыскиваются исчезающие в бесконечно удаленной точке и голоморфные в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которые имеют в точках $t \in \Gamma'$ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ слева и справа соответственно, и эти предельные значения связаны краевым условием (1), а также удовлетворяют в достаточно малых окрестностях точек $t \in \Gamma'$ условию Гёльдера с показателем μ , превосходящим $\text{dmh } \Gamma - 1$. Кроме того, в окрестностях концов Γ искомые функции $\Phi(z)$ интегрируемы в квадрате.

Мы увидим, что картина разрешимости такой задачи сильно зависит от скорости закручивания дуги Γ на концах. В этом разделе рассматривается случай умеренного закручивания. Мы будем говорить, что дуга Γ имеет умеренное закручивание на концах, если для ее логарифмического ядра имеют место оценки

$$|K(z)| = O(\ln |z - a_j|^{-1}), \quad z \rightarrow a_j, \quad j = 1, 2.$$

Очевидно, решение задачи о скачке на дуге умеренного кручения дается обобщенным интегралом типа Коши (14). Поскольку вблизи концов дуги умеренного кручения функция $K_\Gamma(z)$ интегрируема в сколь угодно высокой степени, то условие (12) приобретает вид

$$\nu \geq 1 - \mathbf{m}(\Gamma; a_j). \quad (21)$$

Итак, если на дуге Γ умеренного закручивания $G \equiv 1$, $g \in H_\nu(\Gamma)$, во внутренних точках выполняется условие (16), а на концах — условие (21), то решение задачи о скачке дается обобщенным интегралом типа Коши (19), и при выполнении (20) это решение единственно. Кроме того, если условие (16) выполняется во всех точках Γ , включая концы, то из представления (15) и формулы $U(z) := \psi(z)K(z)\mathcal{E}g(z)$ следует оценка

$$\Phi(z) = g(a_j)K_\Gamma(z) + O(1), \quad z \rightarrow a_j, \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь однородную задачу, т.е. пусть $g(t) \equiv 0$, а $G \in H_\nu(\Gamma)$ не обращается на Γ в нуль. Тогда $G(t) = \exp f(t)$, где $f \in H_\nu(\Gamma)$. Положим

$$\Psi(z) = \int_{\Gamma} \text{Ca}(w, z)f(w) dw, \quad X(z) = \exp \Psi(z),$$

и обозначим

$$K_{\Gamma}(z) = A_{\Gamma}(z) + \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{z - a_2}{z - a_1} \right|,$$

где

$$A_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{z - a_2}{z - a_1},$$

а ветвь аргумента выделена посредством разреза по дуге Γ и условия $A_{\Gamma}(\infty) = 0$. Для дуги умеренного закручивания конечны пределы

$$\Delta_j := \limsup_{z \rightarrow a_j} \frac{A_{\Gamma}(z)}{\ln |z - a_j|}, \quad \delta_j := \liminf_{z \rightarrow a_j} \frac{A_{\Gamma}(z)}{\ln |z - a_j|}, \quad j = 1, 2.$$

Далее, пусть $f(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ — вещественные функции. Тогда для экспоненты $X(z) = \exp \Psi(z)$ справедливы оценки

$$\ln |X(z)| = u(a_j)A_{\Gamma}(z) + \frac{v(a_j)}{2\pi} \ln \left| \frac{z - a_2}{z - a_1} \right| + O(1), \quad j = 1, 2.$$

Обозначим

$$v_j^* := \limsup_{z \rightarrow a_j} \frac{\ln |X(z)|}{\ln |z - a_j|} = \frac{(-1)^j v(a_j)}{2\pi} + u_j^{\sup},$$

$$v_j := \liminf_{z \rightarrow a_j} \frac{\ln |X(z)|}{\ln |z - a_j|} = \frac{(-1)^j v(a_j)}{2\pi} + u_j^{\inf}, \quad j = 1, 2,$$

$$u_j^{\sup} = \max\{u(a_j)\Delta_j, u(a_j)\delta_j\}, \quad u_j^{\inf} = \min\{u(a_j)\Delta_j, u(a_j)\delta_j\}.$$

Введем произведение

$$Y(z) = (z - a_1)^{-]v_1^*[(z - a_2)^{-]v_2^*[} X(z)$$

и положим

$$\varkappa =]v_1^*[+]v_2^*[,$$

где $]x[$ означает наименьшее из целых чисел, больших или равных x . Тогда общее решение однородной задачи при $\varkappa > 0$ равно $Y(z)P(z)$, где P — произвольный полином степени ниже $\varkappa$, а при $\varkappa \leq 0$ эта задача имеет лишь нулевое решение.

Неоднородная задача на дугах умеренного закручивания решена при дополнительных условиях.

Теорема 12. Пусть Γ — дуга умеренного закручивания, коэффициенты $G(t), g(t)$ принадлежат пространству $H_{\nu}(\Gamma)$ и $G(t)$ не обращается в нуль, на каждом конце либо $\Delta_j = \delta_j$, либо $|G(t_j)| = 1$, и во внутренних точках дуги выполняется условие (16), а на концах — условие (21). Пусть, кроме того, выполнено условие (20). Тогда при $\varkappa > 0$ неоднородная задача имеет семейство решений, содержащее произвольный многочлен степени ниже $\varkappa$, при $\varkappa = 0$ решение существует и единственно, а при $\varkappa < 0$ задача имеет единственное решение при выполнении $-\varkappa$ условий.

Эта картина разрешимости упрощается на замыкаемых дугах, т.е. на дугах Γ , концы которых можно соединить гладкой дугой, не имеющей с Γ общих точек, отличных от концов. В этом случае величина $\varkappa$ совпадает с индексом Гахова (см., например, [1]), и картины разрешимости задачи Римана на гладкой и на замыкаемой неспрямляемой дугах совпадают [28].

3.4. Задача Римана на неспрямляемой дуге II. Рассмотрим теперь дуги, логарифмические ядра которых имеют на концах дуги особенности более высоких порядков.

Пусть неспрямляемая дуга Γ с началом в точке 0 и концом в точке 1 задается уравнением

$$\Gamma = \{z = r \exp i\theta(r) : 0 < r \leq 1\} \cup \{0\}, \quad (22)$$

где $\theta(r)$ есть заданная при $0 < r \leq 1$ непрерывная вещественная функция, причем $\theta(1) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, предел $\lim_{r \rightarrow 0} \theta(r)$ равен $+\infty$ или $-\infty$, а вблизи нуля эта функция монотонна.

Для простоты будем считать, что на конце 1 эта дуга гладкая. Если при $r \rightarrow 0$ функция $|\theta(r)|$ растет достаточно быстро (скажем, $\theta(r) \asymp r^{-p}$, $p \geq 2$), то логарифмическое ядро $K(z)$ этой дуги может быть неинтегрируемо в начале координат, т. е. не всякая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 5 на ее гладкость, имеет обобщенный интеграл по этой дуге. Введем класс функций $H_\nu^m(\Gamma)$, состоящий из функций вида

$$f(t) = P_f(t, \bar{t}) + t^m f_0(t), \quad f_0 \in H_\nu(\Gamma),$$

где m — натуральное число, а многочлен $P_f(t, \bar{t})$ (многочлен Тейлора) имеет степень ниже m .

Теорема 13. Пусть в уравнении дуги (22) $|\theta(r)| = O(r^{-m})$. Функция $u \in H_\nu^m(\Gamma)$ интегрируема по этой дуге в смысле определения 2, если во всех точках дуги выполнено условие (10), а многочлен Тейлора $P_u(t, \bar{t})$ голоморфен.

Обобщенное интегрирование позволяет получить, в частности, следующий результат.

Теорема 14. Пусть дуга Γ и заданная на ней функция $u(t)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и, кроме того, выполняется условие (16), а многочлен Тейлора имеет вид

$$P_u(t, \bar{t}) = \sum_{k \leq j < m} c_j t^j, \quad c_k \neq 0, \quad k > \frac{m}{2}.$$

Тогда однородная задача Римана на дуге Γ с коэффициентом $G(t) = \exp u(t)$ не имеет нетривиальных решений.

Многие вопросы, касающиеся задачи Римана на дугах сильного закручивания, не решены.

3.5. Задача Римана для би-аналитических функций. Функция $\phi(z)$ называется би-аналитической в области D , если она дважды непрерывно дифференцируема там и

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad z \in D.$$

Теория таких функций изложена в [29] (см. также [1]). Здесь мы рассматриваем следующую версию краевой задачи Римана.

Пусть Γ — простая замкнутая, вообще говоря, неспрямляемая кривая, разбивающая комплексную плоскость на области D^+ и D^- . Отыскиваются би-аналитические в D^+ и D^- функции $\phi(z)$ такие, что эти функции и их производные $\phi_1 := \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}$ имеют предельные значения $\phi^\pm(t)$, $\phi_1^\pm(t)$ из $D^\pm$ в каждой точке $t \in \Gamma$, удовлетворяющие условиям

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$\phi_1^+(t) = G_1(t)\phi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in \Gamma.$$

В бесконечно удаленной точке искомая функция предполагается ограниченной, а ее производная по $\bar{z}$ равной нулю. Для обеспечения единственности решения потребуем также, чтобы функции $\phi_1^\pm$ удовлетворяли условию Гёльдера с показателем $\mu > \text{dmh } \Gamma - 1$.

Обобщенное интегрирование приводит к следующему результату, доказательство которого содержится в работе [30].

Теорема 15. Пусть $g, g_1, G, G_1 \in H_\nu(\Gamma)$, коэффициенты G, G_1 не обращаются на Γ в нуль, и выполняются условия (16) и (20). Если κ и κ' означают индексы Гахова коэффициентов G и G_1 , т. е. поделенные на 2π приращения их аргументов при однократном обходе Γ в положительном направлении, то справедливы такие утверждения:

- если $\kappa' \leq 0, \kappa < 0$, то задача разрешима при выполнении $1 - \kappa - \kappa'$ условий, и ее решение единственно;
- если $\kappa' \leq 0, \kappa \geq 0$, то задача разрешима при выполнении $1 - \kappa'$ условий, и ее общее решение линейно зависит от κ параметров;
- если $\kappa' > 0, \kappa \geq 0$, то задача безусловно разрешима, и ее общее решение линейно зависит от $\kappa + \kappa' - 1$ параметров;
- если $\kappa' > 0, \kappa < 0$, то число произвольных параметров в общем решении равно $\kappa' - r$, где r — ранг матрицы размера $(-\kappa) \times \kappa'$, составленной из обобщенных интегралов по Γ от функций вида $U(t)t^{j+m}, j = 0, \dots, \kappa' - 1, m = 0, \dots, -\kappa - 1$, а $U(t)$ — явно выражаемая через данные задачи функция.

Аналогично решается краевая задача Римана для полианалитических функций на замкнутой неспрямляемой кривой.

3.6. Представление решений уравнений Бельтрами. Дифференциальные уравнения Бельтрами представляют собою одно из наиболее естественных обобщений уравнений Коши–Римана комплексного анализа. Соответственно их решения являются близким обобщением голоморфных функций. В общем случае уравнение Бельтрами имеет вид

$$\bar{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1.$$

Это уравнение хорошо известно и имеет множество приложений (см., например, [26], [31], [32]).

Рассмотрим следующий частный случай этого уравнения. Пусть в области Δ комплексной плоскости задана аналитическая функция $f(z)$, отличная от постоянной, и

$$\bar{\partial}\phi = \beta \frac{f}{\bar{f}} \frac{\bar{f}'}{f'} \partial\phi, \quad \beta := \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (23)$$

При $f(z) \equiv z$ это уравнение рассматривал А.Б. Тунгатаров [33]. Приведем два результата, полученных с помощью обобщенного интегрирования.

Теорема 16. Пусть $D \subset \Delta$ есть конечная область с жордановой (вообще говоря, неспрямляемой) границей Γ , а заданная в Δ непостоянная голоморфная функция $f(z)$ не обращается в нуль на Γ . Тогда для любого решения $\phi(z)$ уравнения Бельтрами (23) при $z \in D$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta \in E} \phi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i(1 - \beta)} \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)f'(t)dt}{f(t) - f(z) |f(z)/f(t)|^{2\alpha}} + \\ &+ \frac{\beta}{2\pi i(1 - \beta)} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\phi(t)\overline{f'(t)}dt}{\overline{f(t)}(f(t) - f(z) |f(z)/f(t)|^{2\alpha})}. \end{aligned}$$

В левой части суммирование ведется по множеству E всех f -конгруэнтных z точек области D , включая саму точку z , т. е.

$$E := \{w \in D : f(w) = f(z)\}.$$

Теорема 17. Если область $D \subset \Delta$ ограничена замкнутой кривой Γ (вообще говоря, неспрямляемой), $\phi(t) \in H_\nu(\Gamma)$ и выполнено условие (10), то функция

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} \frac{\phi(t)f'(t)dt}{f(t) - f(z)|f(z)/f(t)|^{2\alpha}} + \beta \int_{\Gamma} \frac{f(t)\phi(t)\overline{f'(t)}dt}{\overline{f(t)}(f(t) - f(z)|f(z)/f(t)|^{2\alpha})}$$

удовлетворяет уравнению Бельтрами (23) в области D .

Эти результаты получены в статьях [34] и [35].

4. ИЗ ИСТОРИИ ВОПРОСА

4.1. Обобщения контурного интеграла. Существует ряд публикаций, касающихся различных подходов к определению контурного интеграла по неспрямляемым контурам.

Так, в работах [36], [37] он понимается как интеграл Стильтьеса

$$\int_{\Gamma} f(t)dt = \int_0^1 f(\phi(x))d\phi(x), \quad \phi(x) : [0, 1] \mapsto \Gamma.$$

Обычно при рассмотрении интеграла Римана–Стилтьеса полагают, что стоящая под знаком дифференциала функция $\phi(x)$ имеет ограниченную вариацию (см. [38], [39]). Это значит, что образ $\Gamma = \phi([0, 1])$ спрямляем. Но такой интеграл существует и для более обширного класса функций ограниченной обобщенной вариации (см., например, [40]), для которых образы отрезка неспрямляемы. Обобщенная вариация определяется следующим образом. Пусть при $x \geq 0$ задана возрастающая функция $\Theta(x)$, имеющая нулевой предел в начале координат. Θ -вариацией заданной на отрезке $I = [0, 1]$ функции $f(x)$ называется точная верхняя грань сумм

$$\sum_{j=1}^n \Theta(|f(t_j) - f(t_{j-1})|),$$

где $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ — любой конечный набор точек отрезка, занумерованных в порядке возрастания. Если эта величина конечна, то говорят, что f есть функция ограниченной Θ -вариации.

Р. Лесневич и В. Орлич [40] доказали, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют ограниченные Φ -вариацию и Ψ -вариацию соответственно, то интеграл Стильтьеса $\int_0^1 f(x) dg(x)$ сходится при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \psi\left(\frac{1}{n}\right) < \infty; \quad (24)$$

здесь φ и ψ — обратные функции к Φ и Ψ соответственно. В случае, когда f и g удовлетворяют условию Гёльдера с показателями α и β , это условие приобретает вид $\alpha + \beta > 1$; этот критерий интегрируемости был получен В. Кондурарем [41].

В работах [36], [37] эти результаты используются для исследования интегралов по неспрямляемым кривым, удовлетворяющим условию вида

$$\sup \sum_{j=1}^n \Phi(|t_j - t_{j-1}|) < \infty,$$

где супремум берется по всем конечным наборам точек кривой, занумерованным в порядке следования. Такие кривые названы там Φ -спрямляемыми. Согласно приведенной выше теореме Лесневича–Орлича интеграл $\int_{\Gamma} f(t)dt$ по Φ -спрямляемой кривой Γ существует как интеграл Стильеса, если функция $f(t)$ имеет ограниченную Ψ -вариацию, т. е. ограничены в совокупности все суммы

$$\sum_{j=1}^n \Psi(|f(t_j) - f(t_{j-1})|),$$

где $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ — любой конечный набор точек дуги Γ , занумерованных в порядке следования, и выполнено условие (24). В частности, интеграл $\int_{\Gamma} f(t)dt$ по $x^{1/\nu}$ -спрямляемой кривой Γ от функции $f \in H_{\mu}(\Gamma)$ существует при условии $\mu\nu + \nu > 1$.

Отметим, что при выполнении этих условий произведение f на след функции $\omega \in C_0^1(\mathbb{C})$ на кривой Γ также интегрируемо. Это позволяет определить отображение

$$\omega \mapsto \int_{\Gamma} f(t)\omega(t) dt,$$

правая часть которого понимается как интеграл Стильеса.

Вероятно, заметка [42] является первой публикацией, в которой контурный интеграл по замкнутой неспрямляемой кривой определяется через формулу Грина (6).

Дж. Харрисон и А. Нортон [43]–[45] первоначально исходили, по-видимому, из той же формулы, но затем они развили теорию интегрирования по неспрямляемым контурам, основанную на аппроксимации неспрямляемого контура ломаными. В работе [45] ломаные заменяются симплексами, и результаты переносятся в евклидовы пространства высших размерностей.

В работах [46] и [47] развивается двойственный подход. Если Γ — простая неспрямляемая дуга с началом и концом в точках a и b соответственно, то для любого многочлена $p(z)$ можно положить

$$\int_{\Gamma} p(t)dt := P(b) - P(a),$$

где $P(z)$ — его первообразная. Как известно (см., например, [48]), любую непрерывную на Γ функцию можно аппроксимировать многочленами, и это создает возможность дать определение интеграла по неспрямляемой дуге, основанное на полиномиальной аппроксимации интегранда. Здесь также возникают проблемы сравнения полученной операции с введенными выше интегрированиями.

Е. Гусейнов [49]–[51] построил интеграл и доказал формулу Племели–Сохоцкого для функций, суммируемых на неспрямляемых и фрактальных кривых. Он строит обобщенный криволинейный интеграл на основе интеграла Пэли–Винера–Зигмунда (см. [52]).

В работах [53], [54] используется определение интегрирования как обобщенной функции (распределения). Там же упоминается его связь с понятием потока, т. е. непрерывного функционала на пространстве дифференциальных форм (см., например, [55], с. 250–256).

Оригинальное определение интеграла по неспрямляемой кривой через интеграл Коши предложил Х. Лью [56]. Это еще одна иллюстрация связи между проблемой интегрирования по неспрямляемым контурам и краевой задачей Римана на таких контурах.

В ряде работ для исследования этих проблем используются квазиконформные отображения. Вероятно, впервые это было сделано С.Н. Антонцевым, В.Н. Монаховым [57] и В.А. Селезевым [58], [59]. Упомянем также книгу И.М. Батчаева [60], где для определения некоторых интегралов по неспрямляемым кривым применяется техника конформных модулей. Ряд глубоких результатов по комплексному анализу в квазидисках получен в недавней статье [61]; их можно истолковать и как вклад в теорию обобщенного интегрирования по квазиокружностям.

4.2. Ограничения на контур в задаче Римана. Как уже отмечалось, если контур Γ кусочно-гладкий, а плотность $g(t)$ интеграла типа Коши удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем, то этот интеграл имеет граничные значения слева и справа в каждой точке Γ (за возможным исключением концов Γ , если это дуга), и разность этих значений равна $g(t)$. Почти с самого начала исследований задачи Римана вызывал большой интерес вопрос о расширении этого класса контуров. Ему посвящена обширная литература. Здесь мы остановимся вкратце на двух недавних результатах.

Для негладких спрямляемых контуров этот вопрос решили в 1979 году независимо друг от друга Е.М. Дынькин [62] и Т.С. Салимов [63]. Приведем их результат.

Пусть Γ — простая замкнутая спрямляемая кривая, обходимая в положительном направлении, а функция $g(t)$ задана на ней и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ν . В вышеупомянутых работах установлено, что при условии

$$\nu > \frac{1}{2}$$

интеграл типа Коши имеет предельные значения с обеих сторон во всех точках Γ , и эти предельные значения удовлетворяют на Γ условию Гёльдера с любым показателем, меньшим величины

$$\mu = 2\nu - 1. \quad (25)$$

Оба эти утверждения неулучшаемы. Это значит, что:

– для любого $\nu \in (0, 1/2]$ можно найти простую замкнутую спрямляемую кривую Γ и заданную на ней функцию $g \in H_\nu(\Gamma)$ такие, что интеграл типа Коши (3) не имеет предельного значения хотя бы в одной точке кривой Γ ;

– при $\nu > \frac{1}{2}$ можно найти простую замкнутую спрямляемую кривую Γ и заданную на ней функцию $g \in H_\nu(\Gamma)$ такие, что хотя бы одно из предельных значений $\Phi^\pm$ интеграла типа Коши (3) не удовлетворяет на Γ условию Гёльдера с показателем (25).

Кроме того, проекторы

$$g \mapsto \Phi^\pm$$

при любом $\nu \in (0, 1)$ отображают пространство Гёльдера $H_\nu(\Gamma)$ в себя тогда и только тогда, когда Γ — кривая Карлесона, т. е. суммарная длина ее дуг, лежащих в любом круге радиуса r с центром на кривой, соизмерима с r .

Эти утверждения позволяют дать полную картину разрешимости краевой задачи Римана на замкнутых негладких спрямляемых кривых.

Задачу Римана на неспрямляемых кривых решил в 1982 году Б.А. Кац [64], [22], [28]. Первоначальное решение было основано на так называемом методе регуляризации квазирешений (см. [65]), т. е. без использования обобщенных криволинейных интегралов.

В 2013 году Д.Б. Кац [23] ввел понятие показателей Марцинкевича, позволившее улучшить эти результаты.

Начиная с 1998 года, концепция обобщенного криволинейного интеграла становится одним из основных инструментов решения краевой задачи Римана на неспрямляемых кривых; см., например, работы [66], [54], [67].

5. НЕКОТОРЫЕ ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Существует немало открытых проблем, связанных с решением краевой задачи Римана на неспрямляемых контурах. Здесь мы приводим лишь несколько вопросов, касающихся обобщенного интеграла.

5.1. Ряд Хавина–Лорана. В.П. Хавин получил [68], [69] следующий результат.

Пусть Γ — ограниченное, замкнутое и связное множество (континуум) на комплексной плоскости, μ — существенная мера (которая называется существенной, если из $E \subset \Gamma$, $\mu(E) = 0$ следует $\Gamma \setminus E = \Gamma$), заданная на подмножествах Γ , $G = \mathbf{C} \setminus \Gamma$. Тогда любая аналитическая в G функция $\Phi(z)$ представима в виде

$$\Phi(z) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{Y_k(t) d\mu}{(t-z)^{k+1}}, \quad (26)$$

где функции Y_k таковы, что $\|Y_k\|^2 := \int_{\Gamma} |Y_k(t)|^2 d\mu < \infty$ при любом k , и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|Y_k\|} = 0$.

Было бы интересно получить такое представление для интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}$$

по неспрямляемому контуру Γ , т. е. выразить функции $Y_1, Y_2, \dots$ через характеристики контура Γ , меру μ и функцию $f(t)$.

В.П. Хавин получил также критерий конечности числа слагаемых в представлении (26). Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция Φ порождала μ -распределение на Γ . Это означает следующее. Пусть класс $\mathcal{A}(\Gamma)$ состоит из функций, каждая из которых аналитична внутри некоторой окрестности Γ . С каждой аналитической в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ функцией $\Phi(z)$ свяжем функционал

$$\widehat{\Phi}(\varphi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\varphi}} \Phi(z) \varphi(z) dz, \quad \varphi \in \mathcal{A}(\Gamma),$$

где C_{φ} — конечная система спрямляемых простых замкнутых кривых, лежащая в области аналитичности φ и ограничивающая область, содержащую внутри себя Γ . Функция $\Phi(z)$ называется порождающей μ -распределение на Γ , если при $\varphi_p \in \mathcal{A}(\Gamma)$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} |\varphi_p^{(k)}(t)|^2 d\mu = 0, k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \widehat{\Phi}(\varphi_p) = 0.$$

Хотелось бы выяснить, при каких условиях интеграл типа Коши по неспрямляемому контуру порождает μ -распределение.

5.2. Носитель интегрирования. При каких условиях можно утверждать, что значения интегрирования определяются значениями ω лишь на самом контуре, а не в его окрестности?

5.3. Обобщенный интеграл и емкость. Интересно выяснить, что происходит, если

$$f \in H_\nu(\Gamma), \quad \frac{1}{2} \overline{\text{dm}} \Gamma \geq \nu > \overline{\text{dm}} \Gamma - 1$$

или

$$f \in H_\nu(\Gamma), \quad 1 - \frac{1}{2} \mathbf{m}(\Gamma; t) \geq \nu > 1 - \mathbf{m}(\Gamma; t).$$

Из наших результатов следует, что при этом интеграл типа Коши существует, но предельных значений во всех точках кривой, вообще говоря, не имеет. Автор предполагает, что при этом такие предельные значения существуют квазिवсюду, т.е. всюду за исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$ нулевой емкости (см., например, [70]); при этом размерность этой емкости может зависеть от ν и метрических характеристик кривой. Хотелось бы проверить это.

5.4. Φ —спрямляемость. Какие ограничения условие Φ -спрямляемости кривой накладывает на ее размерности Хаусдорфа, Минковского, показатели Марцинкевича, а также на другие метрические характеристики, такие как размерности Д. Ассуада [71], [72], Х. Аикавы [73], [74], спектр Фрезера–Ю [75] и т.п.?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).
- [2] Мухелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*, 2-е изд. (Физматлит, М., 1962).
- [3] Гахов Ф.В., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки* (Наука, М., 1978).
- [4] Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом* (Наука, М., 1986).
- [5] Данилюк И.И. *Нерегулярные граничные задачи на плоскости* (Наука, М., 1975).
- [6] Коэн Дж., Боксма О. *Граничные задачи в теории массового обслуживания* (Мир, М., 1987).
- [7] Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом* (Наука, М., 1977).
- [8] Литвинчук Г.С., Спитковский И.М. *Факторизация матриц-функций*, 1984, Деп. № 2410–84 в ВИНТИИ, М., 1984.
- [9] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения* (Изд. центр КГУ, Казань, 2005).
- [10] Солдатов А.П. *Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций* (Выш. шк., М., 1991).
- [11] Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1977).
- [12] Cai Hai-Tao and Lu Jian-Ke *Mathematical theory in periodic plane elasticity*, V. 4. Asian Math. Ser. Singapore: Overseas Publ. Association (2010).
- [13] Deift P. *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach*, Courant Lecture Notes, V. 3, New York Univ., 1999.
- [14] Fokas A.S., Its A.R., Караев А.А., Novokshenov V.Y. *Painlevé Transcendents: The Riemann–Hilbert Approach* **128** (AMS, Providence R.I., 2006).
- [15] Lu Jian-Ke *Boundary Value Problems for Analytic Functions* (World Scientific, 1993).
- [16] Su Weiyi *Harmonic Analysis and Fractal Analysis over Fields and Applications* (New Jersey, World Scientific, 2016).
- [17] Trogdon T., Olver S.R. *Riemann–Hilbert Problems, Their Numerical Solution, and the Computation of Nonlinear Special Functions* (Philadelphia, SIAM, 2016).
- [18] Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными I. Теория распределений и анализ Фурье* (Мир, М., 1986).
- [19] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* (Мир, М., 1973).
- [20] Falconer K.J. *Fractal geometry* (Wiley and Sons, 3rd ed., 2014).

- [21] Tricot C. *Curves and Fractal Dimension* (Springer-Verlag, New York, 1995).
- [22] Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой эсдордановой кривой*, Изв. вуз. Матем. (4), 68–80 (1983).
- [23] Кац Д.Б. *О некоторых новых метрических характеристиках неспрямляемых кривых и их приложениях*, Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского **46**, 235–236 (2013).
- [24] Маркушевич А.И. *Избранные главы теории аналитических функций* (Наука, М., 1976).
- [25] Долженко Е.П., *О «стирании» особенностей аналитических функций*, Успехи матем. наук **18** (4) 135–142 (1963).
- [26] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).
- [27] Gehring F.W., Hayman W.K. and Hinkkanen A. *Analytic functions satisfying Hölder conditions on the boundary*, J. Approx. Theory **35** (3), 243–249 (1982).
- [28] Кац Б.А. *Задача Римана на разомкнутой эсдордановой кривой*, Изв. вузов. Матем. (12), 30–38 (1983).
- [29] Балк М.Б. *Полианалитические функции и их обобщения*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления **85**, ВИНТИ, М., 187–246 (1991).
- [30] Katz D.B. and Kats B.A. *Non-rectifiable Riemann boundary value problem for bi-analytic functions*, Complex Variables and Elliptic Equat., **66** (5), 843–852 (2021).
- [31] Bojarski B. *Old and New on Beltrami Equations*, In: Functional analytic methods in complex analysis and applications to partial differential equations (Proceedings of the ICTP, Trieste, Italy, Feb, 8–19, 1988).
- [32] Iwaniec T. and Martin G. *What's new for the Beltrami equation?* In: Geometric Analysis and Applications. Proc. Centre Math. Appl. **39**, 132–148 (2001).
- [33] Тунгатаров А.Б. *О приложениях некоторых интегральных операторов в теории обобщенных аналитических функций*, Изв. АН Казахской ССР. Сер. физ.-матем. **134** (1), 51–54 (1987).
- [34] Katz D.B. and Kats B.A. *Riemann boundary value problem on nonrectifiable curves for certain Beltrami equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **41** (6), 2507–2514 (2018).
- [35] Кац Д.Б., Кац Б.А. *Аналог формулы Коши для некоторых уравнений Бельтрами*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **161** (4) (2019).
- [36] Kats B.A. *The Cauchy integral over non-rectifiable paths*, Contemporary Math. **455**, 183–196 (2008).
- [37] Kats B.A. *The Cauchy integral along Φ -rectifiable curves*, Lobachevskii J. Math. **7**, 15–29 (2000).
- [38] Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной*, 3-е изд. (Наука, М., 1974).
- [39] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. III (Наука, М., 1960).
- [40] Lesniewicz R., Orlicz W. *On generalized variation II*, Studia Math. **45** (1), 71–109 (1973).
- [41] Kondurar V. *Sur l'integrale de Stieltjes*, Rec. Math., **2(44)** (2), 361–366 (1937).
- [42] Кац Б.А. *Об интегрировании по неспрямляемой кривой*, Московский инженерно-строительный институт. Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве. Сб. научн. тр. М., МИСИ, 63–69 (1982).
- [43] Harrison J. and Norton A. *Geometric integration on fractal curves in the plane*, Indiana Univ. Math. J. **40** (2), 567–594 (1991).
- [44] Harrison J. and Norton A. *The Gauss-Green theorem for fractal boundaries*, Duke Math. J. **67** (3), 575–588 (1992).
- [45] Harrison J. *Lectures on chainlet geometry – new topological methods in geometric measure theory*, arXiv:math-ph/0505063v1 24 May 2005; Proceedings of Ravello Summer School for Mathematical Physics, (2005).
- [46] Кац Б.А. *О некоторых обобщениях понятия длины*, Матем. заметки **70** (6), 875–881 (2001).
- [47] Kats B.A. *The Inequalities for Polynomials and Integration over Fractal Arcs*, Canadian Math. Bull. **44** (1), 61–69 (2001).
- [48] Гамелин Т.В. *Равномерные алгебры* (Мир, М., 1973).
- [49] Guseynov Y. *Integrable boundaries and fractals for Hölder classes; the Gauss-Green theorem*, Calculus Variations and Partial Diff. Equat. **55** (4), 1–27 (2016).
- [50] Guseynov Y., Seif R., *Contour Integrals, Plemelj-Privalov Theorem on Non-rectifiable Jordan Curves and Applications*, Integral and Differential Operators and Their Applications, An International Conference in Honour of Professor Stefan Samko on the occasion of his 70th birthday, University of Aveiro, Portugal, 30 June - 2 July, 2011.
- [51] Guseynov Y. *Summability on non-rectifiable Jordan curves* (Georgian Math. J., 2018, February).
- [52] Paley R.E.A.C., Wiener N. and Zygmund A. *Notes on random functions*, Math. Z. **37** (1), 647–668 (1933).
- [53] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A. *Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems*, J. Math. Anal. and Appl. **380** (1), 177–187 (2011).

- [54] Kats B.A. and Katz D.B. *Marcinkiewicz exponents and integrals over non-rectifiable paths*, Math. Meth. Appl. Sci. **39** (12), 3402–3410 (2016).
- [55] Чирка Е.М. *Комплексные аналитические множества* (Наука, М., 1985).
- [56] Liu H. *A note about Riemann boundary value problems on non-rectifiable curves*, Complex Var. Elliptic Equ. **52** (10–11), 877–882 (2007).
- [57] Антонцев С.Н., Монахов В.Н. *Краевые задачи сопряжения со сдвигом в многосвязных областях для квазилинейных эллиптических систем уравнений первого порядка*, Тр. симпоз. по механ. сплош. среды и родств. пробл. анализа. Т.2, Тбилиси, Мецниерба, 20–35 (1871).
- [58] Селезнев В.А. *Краевая задача Газемана на римановых поверхностях в классах квазиконформных контуров и сдвигов*, Динамика сплошной среды, Новосибирск (13), 99–113 (1973).
- [59] Селезнев В.А. *Сингулярные уравнения на квазиконформных контурах*, Методич. вопросы теории функций и отображений, вып. 7, 130–147 (Наукова думка, Киев, 1975).
- [60] Батчаев И.М. *Теория интеграла Коши и сингулярных интегральных уравнений на компактах комплексной плоскости* (Изд-во ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2012).
- [61] Schippers E., Staubach W. *Riemann Boundary Value Problem on Quasidisks. Faber Isomorphism and Grunsky Operator*, Complex Anal. Oper. Theory **12**, 325–354 (2018).
- [62] Дынькин Е.М. *Гладкость интегралов типа Коши*, Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР (92), 115–133 (1979).
- [63] Салимов Т.С. *Прямая оценка для сингулярного интеграла Коши по замкнутой кривой*, Научн. тр. МВ и ССО Азерб. ССР (5), 59–75 (1979).
- [64] Кац Б.А. *Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой*, ДАН СССР, **267** (4), 789–792 (1982).
- [65] Кац Б.А. *Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности*, Алгебра и Анализ **6** (1), 172–202 (1994).
- [66] Kats B.A. *The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions*, Complex Variables and Elliptic Equat. **59** (8), 1053–1069 (2014).
- [67] Katz D.B., Kats B.A. *Interactions of germs with applications*, Math. Meth. Appl. Sci. 22 February 2017 DOI: 10.1002/mma.4362
- [68] Хавин В.П. *О выделении особенностей аналитических функций*, ДАН СССР **121** (2), 239–242 (1958).
- [69] Хавин В.П. *Один аналог ряда Лорана*, В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Сб. статей / под ред. А.И. Маркушевича, 121–131 (Физматлит, М., 1961).
- [70] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения* (Наука, М., 1983).
- [71] Assouad P. *Espaces métriques, plongements, facteurs*, These de doctorat d'Etat, In: Publ. Math. Orsay, Univ. Paris XI, Orsay, 223–7769 (1977).
- [72] Assouad P. *Étude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans $\mathbb{R}^n$* , C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B **288**, 731–734 (1979).
- [73] Aikawa H., *Quasiadditivity of Riesz capacity*, Math. Scand. **69**, 15–30 (1991).
- [74] Käenmäki A., Lehto J., Vuorinen M. *Dimension, Whitney covers, and tubular neighborhoods*, Indiana Univ. Math. J. **62** (6), 1861–1889 (2013).
- [75] Fraser J.M., Yu Han, *New dimension spectra: Finer information on scaling and homogeneity*, Advances in Math. **329**, 273–328 (2018).

Давид Борисович Кац

Московский политехнический университет,

ул. Большая Семеновская, д. 38, г. Москва, 107023, Россия,

e-mail: katzdavid89@gmail.com

*D.B. Katz***Generalized integration over non-rectifiable flat curves and boundary value problems**

Abstract. The review discusses two closely related problems: the solution of the Riemann boundary value problem for analytic functions and some of their generalizations in areas of the complex plane with non-rectifiable boundaries, and the construction of a generalization of the curvilinear integral to non-rectifiable curves that preserves properties important for complex analysis. This work reflects the current state of the issue, and many of the results presented in it were obtained quite recently. At the end of the article, readers are offered a number of unsolved problems, each of which can serve as a starting point for scientific research.

Keywords: Riemann boundary-value problem, non-rectifiable curve, curvilinear integral.

David Borisovich Katz

*Moscow Polytechnical University,
38 Bolshaya Semenovskaya str., Moscow, 107023 Russia,*

e-mail: katzdavid89@gmail.com