Известия вузов. Математика
2023, №12, с. 3–16

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д.К. ДУРДИЕВ, А.А. БОЛТАЕВ, А.А. РАХМОНОВ

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ТИПА СВЕРТКИ В УРАВНЕНИИ МУРА–ГИБСОНА–ТОМСОНА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Исследуется обратная задача определения функции ядра $g(t)$ в уравнении Мура–Гибсона–Томсона (МГТ) третьего порядка. Во-первых, начально-краевая задача сводится к эквивалентной задаче. С помощью спектрального метода Фурье эквивалентная задача сводится к системе интегральных уравнений. Доказаны существование и единственность решения интегральных уравнений. Полученное решение интегральных уравнений типа Вольтерра является единственным решением эквивалентной задачи. На основе эквивалентности задач доказывается теорема существования и единственности классических решений исходной обратной задачи.

Ключевые слова: уравнение МГТ, начально-краевая задача, обратная задача, существование, единственность.

УДК: 517.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-12-3-16

Введение

Уравнение Мура–Гибсона–Томсона (МГТ) основано на технологии высокочастотного ультразвука, обусловливающего тепловую и молекулярную релаксацию. Модель МГТ имеет третий порядок по времени с малым параметром τ, отвечающим за релаксацию. Этот параметр релаксации отвечает за конечную скорость акустических волн для избежания парадокса бесконечной скорости распространения при моделировании акустических волн [1]. Эта модель используется в последнее время в широком спектре статей [2]–[4], изучающих данное направление. Абстрактная версия уравнения МГТ с памятью

$$\tau u_{ttt} + \tau_1 u_{tt} + \tau_2 \Upsilon u_t + \tau_3 \Upsilon u_t - \int_0^t g(t-s)\Upsilon \omega(s)ds = 0 \qquad (1)$$

зависит от положительных параметров τ, τ_1, τ_2, τ_3, где Υ — строго положительный самосопряженный линейный оператор, а $g(t)$ — выпуклое (неотрицательное) ядро памяти. В этом случае возникающие типичные виды памяти могут быть классифицированы как [5]: память типа 1, $\omega(t) = u(t)$; память типа 2, $\omega(t) = u_t(t)$; и память типа 3, $\omega(t) = \nu u(t) + u_t(t)$ с подходящей константой $\nu > 0$.

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 29.03.2023. Принята к печати 29.05.2023.

Благодарности. Работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2023-914.

Обратные задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных и интегро-дифференциальных уравнений тщательно изучались многими авторами с применением разнообразных методов. В работах [6]–[12] авторы исследовали обратные задачи нахождения ядер из гиперболических и параболических интегро-дифференциальных уравнений. Были изучены одно- и многомерные обратные задачи и получены теоремы о единственности решения. Обратные задачи для интегро-дифференциального уравнения можно найти в статьях [13]–[18], а рассмотренные в них задачи близки к задаче, изучаемой в данной статье. В вышеупомянутых статьях были доказаны теоремы о существовании и единственности решения задачи нахождения ядра при различных условиях переопределения.

Обратная задача нахождения ядер типа свертки интегральных членов системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка изучались в [19]. Были получены теоремы о локальном существовании и единственности. В работах [20], [21] метод из статьи [19] был применен к исследованию обратной задачи нахождения диагональной матрицы релаксации для системы интегро-дифференциальных уравнений.

Обратная задача для уравнения (1), где $\Upsilon = -\Delta$, $g = 0$, $\tau = 1$, τ_i, $i = 2, 3$, — константы, а τ_1 — функция от x, рассмотрена в [22], где была доказана единственность нахождения коэффициента, а также указаны оценки устойчивости по Карлеману.

Статья [23] посвящена изучению обратной задачи для уравнения МГТ, а именно восстановлению неизвестного, зависящего от пространственной координаты коэффициента $\tau(x)$ и члена фрикционного демпфирования по частичным данным решения и на некоторой части решения u на границе:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \text{ на } \Gamma_0 \times (0, T),$$

где $\Gamma_0 \subset \Gamma$ — относительно открытое подмножество границы, называемое наблюдаемой областью, а n — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Основной целью данной статьи является нахождение ядра типа свертки модели МГТ, используя метод разделения переменных и метод интегрального уравнения.

Рассмотрим одномерное уравнение МГТ (1) при $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$ и $\Upsilon = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\omega = u + u_t$;

$$u_{ttt} + u_{tt} - u_{xx} - u_{xxt} + \int\limits_0^t g(t-\tau)\left(u_{xx}(x,\tau) + u_{xx\tau}(x,\tau)\right) d\tau = 0 \tag{2}$$

в области

$$\Omega_T = (0,1) \times (0, T],$$

где $T > 0$ — произвольное фиксированное число.

Снабдим это уравнение МГТ начальными условиями

$$u(x,0) = \psi_1(x),\ u_t(x,0) = \psi_2(x),\ u_{tt}(x,0) = \psi_3(x),\ x \in [0,1], \tag{3}$$

граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{4}$$

и условием переопределения

$$\Lambda[u] := \int_0^1 \eta(x) u(x,t) dx = p(t),\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Чтобы решить задачу (2)–(5), наложим на ее данные следующие условия:

$(K1)$ $\psi_1, \psi_2, \eta \in C^3[0,1]$, $\psi_3 \in C^2[0,1]$ и $p \in C^6[0,T]$;

$(K2)$ $\Lambda[\psi_{i+1}] = p^{(i)}(0)$, $i = 0, 1, 2$.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 1 мы переписываем задачу (2)–(4) в эквивалентной форме и доказываем лемму. Раздел 2 посвящен формулировке и доказательству основных результатов работы — теорем о локальном существовании, глобальной единственности и условной устойчивости решения обратной задачи. Последний раздел представляет собой заключение.

1. Математическая формулировка основной задачи

Введем обозначение $\omega(x,t) = u_t(x,t) + u(x,t)$, тогда из уравнения (2) получим

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} = \int_0^t g(t-\tau)\omega_{xx} d\tau, \ (x,t) \in \Omega_T. \tag{6}$$

Аналогично этому начальные и граничные условия примут вид

$$\omega(x,0) = \varphi_1(x), \quad \omega_t(x,0) = \varphi_2(x), \ x \in [0,1], \tag{7}$$

$$\omega(0,t) = \omega(1,t) = 0, \ t \in [0,T], \tag{8}$$

$$\int_0^1 \eta(x)\omega(x,t)dx = h(t), \ t \in [0,T], \tag{9}$$

где $\varphi_i(x) = \psi_i(x) + \psi_{i+1}(x)$, $i = 1, 2$, $h(t) = p'(t) + p(t)$.

Обратная задача. Найти $\omega(x,t) \in C^{2,3}_{x,t}(\Omega_T) \cap C^{0,2}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ и $g(t) \in C^2[0,T]$, удовлетворяющие (6)–(8) и условию переопределения (9).

Сделаем следующие предположения:

$(K3)$ $\varphi_1(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_1''(0) = \varphi_1''(1) = 0$,

$(K4)$ $\varphi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi_2(0) = \varphi_2(1) = 0$,

$(K5)$ $h(t) \in C^5[0,T]$, $\int\limits_0^1 \eta(x)\varphi_1(x)dx = h(0)$, $\int\limits_0^1 \eta(x)\varphi_2(x)dx = h'(0)$.

Для изучения задачи (6)–(9) рассмотрим вспомогательную обратную краевую задачу: необходимо найти пару функций $\omega(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, $g(t) \in C^2[0,T]$ из уравнений (6)–(8) и уравнения

$$h''(t) - \int\limits_0^1 \eta(x)\omega_{xx}(x,t)dx = \int\limits_0^t g(t-\tau)\int\limits_0^1 \eta(x)\omega_{xx}(x,\tau)dxd\tau \tag{10}$$

для $0 < t < T$, где $\varphi_0 = \int\limits_0^1 \eta(x)\varphi_1''(x)dx$.

В конце этого раздела мы приводим лемму об эквивалентности обратных задач.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия $(K3)$–$(K5)$. Тогда задача нахождения классического решения (6)–(9) эквивалентна задаче определения функций $\omega(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, $g(t) \in C^2[0,T]$, удовлетворяющих (6)–(8) и условию (10).*

Доказательство. Очевидно, решение $\{\omega(x,t), g(t)\}$ обратной задачи (6)–(8), (10) также является решением задачи (6)–(9) в $C^2(\Omega_T) \times C^2[0,T]$. Поэтому достаточно показать (10).

Умножая обе части уравнения (6) на функцию $\eta(x)$, интегрируя по x от 0 до 1 и дифференцируя по t, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^1 \eta(x)\omega(x,t)dx - \int\limits_0^1 \eta(x)\omega_{xx}(x,t)dx = \int\limits_0^t g(t-\tau)\int\limits_0^1 \eta(x)\omega_{xx}(x,\tau)dxd\tau \tag{11}$$

для всех $0 < t < T$. Учитывая условие $(K3)$ и дифференцируя (9) дважды, получим

$$\int\limits_0^1 \eta(x)\omega_{tt}(x,t)dx = h''(t),\ 0 < t < T. \tag{12}$$

Из (11) с учетом (9) и (12) следует (10).

Теперь пусть $\{\omega(x,t), g(t)\}$ — решение задачи (6)–(8) и (10). Для доказательства того, что $\{\omega, g\}$ является также и решением (6)–(9), достаточно проверить, что $\{\omega, g\}$ удовлетворяет (9). Из (11), учитывая (10), находим

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int\limits_0^1 \eta(x)\omega(x,t)dx - h(t)\right) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{13}$$

Используя начальные условия (7) и условие $(K5)$, можем записать

$$\int\limits_0^1 \eta(x)\omega(x,0)dx - h(0) = 0,\ \int\limits_0^1 \eta(x)\omega_t(x,0)dx - h'(0) = 0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что условие (10) выполнено. □

2. Теоремы о существовании и единственности для обратной задачи

Воспользуемся методом разделения переменных. Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0 \text{ в } (0,1),$$
$$X_n(0) = 0,\ X_n(1) = 0,\ n = 1, 2, \dots .$$

Известно, что

$$\lambda_n = \pi n$$

и множество $X_n = \sin\lambda_n x,\ n = 1, 2, \dots$, является базисом $L_2(0,1)$.

Будучи единственным глобальным решением, функция $\omega(x,t)$ может быть записана в виде

$$\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t)\sin\lambda_n x, \tag{15}$$

где

$$\omega_n(t) = 2\int\limits_0^1 \omega(x,t)X_n(x)dx. \tag{16}$$

Используя (6), (7) и (16), получим

$$\omega_n''(t) + \lambda_n^2\omega_n(t) = F_n(t), \tag{17}$$

$$\omega_n(0) = \varphi_{1n}\ \ \omega_n'(0) = \varphi_{2n}, \tag{18}$$

где

$$F_n(t) := \lambda_n^2 \int_0^t g(t-\tau)\omega_n(t)d\tau,$$

$$\varphi_{1n} = 2\int\limits_0^1 \varphi_1(x)\sin\lambda_n x dx,\ \ \varphi_{2n} = 2\int\limits_0^1 \varphi_2(x)\sin\lambda_n x dx.$$

Рассмотрим (17) как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью в виде $\lambda_n^2 \int\limits_0^t g(t-\tau)\omega_n(\tau)d\tau$ и данными Коши (18). Решая эту задачу для каждого фиксированного $n \geq 1$, можно легко заключить, что она эквивалентна следующему интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$\omega_n(t) = \varphi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\varphi_{2n}\sin\lambda_n t - \int\limits_0^t g(t-\tau)\omega_n(\tau)d\tau +$$

$$+g(0)\int\limits_0^t \omega_n(\tau)\cos\lambda_n(t-\tau)d\tau + \int\limits_0^t \omega_n(s)\int\limits_s^t g'(\tau-s)\cos\lambda_n(t-\tau)d\tau ds, \tag{19}$$

где

$$(K6)\ g(0) = -\frac{1}{M}h'''(0) - \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\eta_n\varphi_{2n},\ \ \eta_n = 2\int\limits_0^1 \eta(x)\sin\lambda_n x dx,\ \ M = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\eta_n\varphi_{1n}.$$

Дифференцируя (19), получим

$$\omega_n'(t) = \Phi_1(t) + \int\limits_0^t G_1(\tau,\omega,\omega')\cos\lambda_n(t-\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_2(\tau,g,g')\omega_n(t-\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_s^t \omega_n(s)G_3\left(s,\tau,t,g',g''\right)dsd\tau, \tag{20}$$

где

$(K7)\ g'(0) = -\dfrac{1}{M}h^{(4)}(0) + \dfrac{1}{M}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lambda_n^4\varphi_{1n}\eta_n,$

$$\Phi_1(t) = -\lambda_n\varphi_{1n}\sin\lambda_n t + \left(\cos\lambda_n t - \frac{g(0)}{\lambda_n}\sin\lambda_n t\right)\varphi_{2n},\ \ G_2(t) = g(0)g(t) + g'(t),$$

$$G_1(t) = -g^2(0)\omega_n(t) + g(0)\omega_n'(t) - g'(0)\omega_n(t),\ \ G_3(t) = g''(t)\cos\lambda_n t - g(0)g'(t)\cos\lambda_n t.$$

Теперь из (6) и (15) с учетом (9) получаем

$$h''(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\omega_n(t)\eta_n + \lambda_n^2\int\limits_0^t g(t-\tau)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\omega_n(\tau)\eta_n d\tau. \tag{21}$$

Дифференцируя (21), после простых преобразований приходим к интегральному уравнению относительно $g(t)$:

$$g(t) = \Phi_2(t) + \int\limits_0^t \widetilde{G}_1(\tau, t, \omega_n, \omega_n') \cos\lambda_n(\tau) d\tau + \int\limits_0^t \widetilde{G}_2(\tau, t, g, g', \omega_n, \omega_n') d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_s^t g'(\tau - s) \widetilde{G}_3(s, \tau, t, \omega_n) d\tau ds - \frac{1}{g(0)} \int\limits_0^t \int\limits_s^t g''(\tau - s) \widetilde{G}_3(s, \tau, t, \omega_n) d\tau ds, \tag{22}$$

где

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{M} h'''(t) + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \eta_n \varphi_{1n} \sin\lambda_n t - \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \eta_n \varphi_{2n} \cos\lambda_n t +$$

$$+ \frac{g(0)}{M^2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \eta_n \varphi_{2n} \sin\lambda_n t; \quad \widetilde{G_1}(t) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \eta_n \Big[g^2(0) \omega_n(t) - g(0) \omega_n'(t) + g'(0) \omega_n(t) \Big],$$

$$\widetilde{G_2}(t) = \frac{1}{M} g(t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \eta_n \Big[g(0) \omega_n(t) - \omega_n'(t) \Big]; \quad \widetilde{G}_3(t) = \frac{g(0)}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \eta_n \omega_n(t) \cos\lambda_n t.$$

Уравнение (22) содержит неизвестные функции $g'(t)$ и $g''(t)$. Относительно них получаем интегральные уравнения

$$g'(t) = \Phi_3(t) + \int\limits_0^t \widehat{G}_1(\tau, t, \omega_n) d\tau + \int\limits_0^t g(t - \tau) \widehat{G}_2(\tau, t, \omega_n') d\tau -$$

$$- \frac{1}{g(0)} \int\limits_0^t \int\limits_s^t g'(\tau - s) \widehat{G}_1(s, \tau, t, \omega_n) d\tau ds, \tag{23}$$

$$g''(t) = \Phi_4(t) + \int\limits_0^t \overline{G}_1(\tau, t, \omega_n, \omega_n') \cos\lambda_n(\tau) d\tau + \int\limits_0^t \overline{G}_2(\tau, t, g, g', \omega_n, \omega_n') d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_s^t g'(\tau - s) \overline{G}_3(s, \tau, t, \omega_n) d\tau ds - \frac{1}{g(0)} \int\limits_0^t \int\limits_s^t g''(\tau - s) \overline{G}_4(s, \tau, t, \omega_n) d\tau ds, \tag{24}$$

где

$$\Phi_3(t) = -\frac{1}{M} h^{\mathrm{IV}}(t) + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \varphi_{1n} \eta_n \cos\lambda_n t + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \varphi_{2n} \eta_n \sin\lambda_n t,$$

$$\Phi_4(t) = -\frac{1}{M} h^{\mathrm{V}}(t) + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\lambda_n^5 \sin\lambda_n t + g(0) \lambda_n^4 \cos\lambda_n t + g(0) \lambda_n^3 \sin\lambda_n t \right] \eta_n \varphi_{1n} +$$

$$+ \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^4 \cos\lambda_n t - g(0) \lambda_n^2 \cos\lambda_n t + g^2(0) \lambda_n \sin\lambda_n t \right] \eta_n \varphi_{2n},$$

$$\widehat{G}_1(t) = \frac{g(0)}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \eta_n \omega_n(t) \cos\lambda_n t, \widehat{G}_2(t) = -\frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \eta_n \omega_n'(t),$$

$$\overline{G}_1(t) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\eta_n\Big[g(0)\lambda_n^2\omega_n'(t) + g'(0)\lambda_n^2\omega_n(t) + g^3(0)\omega_n(t) - g^2(0)\omega_n'(t)\Big],$$

$$\overline{G}_2(t) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\eta_n\Big[g^2(0)g(t)\omega_n(t) + g(0)g'(t)\omega_n(t) - g'(t)\omega_n'(t)\Big],$$

$$\overline{G}_3(t) = \frac{g^2(0)}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\eta_n\omega_n(t)\cos\lambda_n t,\ \overline{G}_4(t) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\omega_n(t)\sin\lambda_n t - g^2(0)\lambda_n^2\eta_n\omega_n'(t)\Big].$$

Следующая лемма играет важную роль в изучении единственности решения задачи (6)–(8), (10).

Лемма 2. *Если* $\{\omega(x,t), g(t)\}$ *— произвольное решение задачи* (6)–(8), (10), *то функции*

$$\omega_n(t) = 2\int_0^1 \omega(x,t)\sin\lambda_n x dx, \quad n = 1,2,\dots,$$

удовлетворяют системе (17) *на интервале* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\{\omega(x,t), g(t)\}$ — произвольное решение задачи (6)–(8), (10). Умножая обе части уравнения (6) на собственные функции $2\sin\lambda_n x$ ($n = 1,2,\dots$), интегрируя по x от 0 до 1 и используя соотношения

$$2\int_0^1 \omega_{tt}(x,t)\sin\lambda_n x dx = \frac{d^2}{dt^2}\left(2\int_0^1 \omega(x,t)\sin\lambda_n x dx\right) = \omega_n''(t),\ n = 1,2,\dots,$$

$$2\int_0^1 \omega_{xx}(x,t)\sin\lambda_n x dx = -\lambda_n^2\left(2\int_0^1 \omega(x,t)\sin\lambda_n x dx\right) = -\lambda_n^2\omega_n(t),\ n = 1,2,\dots,$$

получим уравнение (17).

Аналогичным образом из (7) вытекает выполнение условия (18).

Таким образом, система функций $\omega_n(t)$ ($n = 1,2,\dots$) является решением задачи (17) и (18). Из этого факта непосредственно следует, что функции $\omega_n(t)$ ($n = 1,2,\dots$) также удовлетворяют системе (19) на $[0,T]$. □

Из леммы 2 получаем

Следствие. Предположим, что система (19), (20), (22)–(24) имеет единственное решение. Тогда задача (6)–(8) и (10) имеет не более одного решения, т. е. (6)–(8) и (10) имеет решение, причем единственное.

Рассмотрим функциональное пространство B_T^α, введенное в работах [24], [25], состоящее из всех функций вида

$$\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\sin\lambda_n(x),$$

заданных в Ω_T. Более того, функции $\omega_n(t)$, $n = 1,2,\dots$, участвующие в сумме, являются непрерывно дифференцируемыми на $[0,T]$ и

$$J_T(\omega) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha\|\omega_n'\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Норма на множестве $J_T(\omega)$ вводится следующим образом:

$$\|\omega\|_{B_T^\alpha} = J_T(\omega).$$

Пусть E_T^α обозначает пространство, являющееся топологическим произведением $B_T^\alpha \times C^2[0,T]$, норма его элемента $z = \{\omega, g, g', g''\}$ задается формулой

$$\|z\|_{E_T^\alpha} = \|\omega\|_{B_T^\alpha} + \|g\|_{C^2[0,T]}.$$

Известно [26], что пространства E_T^α и B_T^α являются банаховыми.

Рассмотрим оператор

$$\Psi(\omega, g, g', g'') = \Big\{\Psi_1(\omega, g, g', g''), \ldots, \Psi_4(\omega, g, g', g'')\Big\}$$

в пространстве E_T^α, где

$$\Psi_1(\omega, g, g', g'') = \widetilde{\omega}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\omega}_n(t) \sin\lambda_n(x),\ \ \Psi_2(\omega, g, g', g'') = \widetilde{g}(t),$$

$$\Psi_3(\omega, g, g', g'') = \widetilde{g}'(t),\ \ \Psi_4(\omega, g, g', g'') = \widetilde{g}''(t),$$

а функции $\widetilde{\omega}_n(x,t)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\widetilde{g}(t)$, $\widetilde{g}'(t)$ и $\widetilde{g}''(t)$ равны правым частям (19), (22), (23) и (24) соответственно. Очевидно, что $\widetilde{\omega}'_n(x,t)$, $n = 1, 2, \ldots$, задаются правой частью (20). Имеем неравенства

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\widetilde{\omega}_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{5}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha |\varphi_{1n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{5}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha-1} |\varphi_{2n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5}\,\|g\|_{C[0,T]}\, T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{5}g(0)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5}\,\|g'\|_{C[0,T]}\,\frac{T^2}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\widetilde{\omega}'_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{7}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha+1} |\varphi_{1n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{7}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha\left(1 + \frac{g(0)}{\lambda_n}\right)|\varphi_{2n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{7}g(0)\,\|g\|_{C[0,T]}\, T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{7}\left(g^2(0) + g'(0)\right)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{7}g(0)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega'_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{7}\left(g(0)\frac{T^2}{2} + T\right)\|g'\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{7}\,\|g''\|_{C[0,T]}\,\frac{T^2}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^\alpha \|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

$$\|\widetilde{g}\|_{C[0,T]} \le \frac{1}{M}\,\|h'''\|_{C[0,T]} + \frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3 |\varphi_{1n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\left|\varphi_{2n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{g(0)}{M^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n\left|\varphi_{2n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{g(0)}{M}\left(\|g\|_{C[0,T]}+g(0)\right)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}\left(1+g(0)\right)\|g'\|_{C[0,T]}T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}\left(\|g\|_{C[0,T]}+g(0)\right)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n'\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}\left(\|g''\|_{C[0,T]}\frac{T}{2}+g'(0)\right)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

$$\|\widetilde{g}'\|_{C[0,T]}\le\frac{1}{M}\left\|h^{(4)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3\left|\varphi_{1n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\left|\varphi_{2n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}\left(\|g'\|_{C[0,T]}\frac{T}{2}+g(0)\right)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{4-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}\|g\|_{C[0,T]}T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n'\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{28}$$

$$\|\widetilde{g}''\|_{C[0,T]}\le\frac{1}{M}\left\|h^{(5)}\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3\left|\varphi_{1n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{g(0)}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3\left|\varphi_{1n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{g(0)}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3\left|\varphi_{1n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\left|\varphi_{2n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{g(0)}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^2\left|\varphi_{2n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{g^2(0)}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n\left|\varphi_{2n}\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{g(0)}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{4-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n'\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{g'(0)}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{4-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{g(0)}{M}G\left(T,\|g\|_{C^2[0,T]}\right)T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}\left(g^2(0)\frac{T}{2}+1\right)\|g'\|_{C[0,T]}T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\eta_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega'_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (29)$$

где $G=g(0)\|g\|_{C[0,T]}+g^2(0)+g(0)\|g'\|_{C[0,T]}\dfrac{T}{2}+\|g'\|_{C[0,T]}+g'(0)+\|g''\|_{C[0,T]}\dfrac{T}{2}$.

Наложим на число α и функцию $\eta(x)$ следующие условия:

$(K8)$ $\alpha=1,\ \eta(x)\in C^3[0,1]$ или $\alpha=2,\ \eta(x)\in C^2[0,1]$.

Тогда из (25)–(29) находим, что

$$\|\widetilde{\omega}\|_{B_T^\alpha}:=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega'_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le A_1(T)+B_1(T)\|\omega\|_{B_T^\alpha}+C_1(T)\|g\|_{C^2[0,T]}\|\omega\|_{B_T^\alpha}, \quad (30)$$

$$\|\widetilde{g}\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\|\omega\|_{B_T^\alpha}+C_2(T)\|g\|_{C^2[0,T]}\|\omega\|_{B_T^\alpha}, \quad (31)$$

$$\|\widetilde{g}'\|_{C[0,T]}\le A_3(T)+B_3(T)\|\omega(x,t)\|_{B_T^\alpha}+C_3(T)\|g\|_{C^2[0,T]}\|\omega\|_{B_T^\alpha}, \quad (32)$$

$$\|\widetilde{g}''\|_{C[0,T]}\le A_4(T)+B_4(T)\|\omega\|_{B_T^\alpha}+C_4(T)\|g\|_{C^2[0,T]}\|\omega\|_{B_T^\alpha}, \quad (33)$$

где

$$A_1(T)=\sqrt{5}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}|\varphi_{1n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\sqrt{5}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha-1}|\varphi_{2n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sqrt{7}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha+1}|\varphi_{1n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\sqrt{7}\left(1+g(0)\right)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}|\varphi_{2n}|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$A_2(T)=\frac{1}{M}\|h'''\|_{C[0,T]}+$$

$$+\frac{1}{M}\|\eta\|_{L_2[0,1]}\left(\|\varphi_1'''\|_{L_2[0,1]}+\|\varphi_2''\|_{L_2[0,1]}+g(0)\|\varphi_2'\|_{L_2[0,1]}\right),$$

$$A_3(T)=\frac{1}{M}\left\|h^{(4)}\right\|_{C[0,T]}+\frac{1}{M}\|\eta'\|_{L_2[0,1]}\left(\|\varphi_1'''\|_{L_2[0,1]}+\|\varphi_2''\|_{L_2[0,1]}\right),$$

$$A_4(T)=\frac{1}{M}\left\|h^{(5)}\right\|_{C[0,T]}+\frac{g(0)}{M}\|\eta'\|_{L_2[0,1]}\|\varphi_1'''\|_{L_2[0,1]}+$$

$$+\frac{1}{M}\|\eta''\|_{L_2[0,1]}\left(\|\varphi_1'''\|_{L_2[0,1]}+\|\varphi_2''\|_{L_2[0,1]}\right)+$$

$$+\frac{g(0)}{M}\|\eta\|_{L_2[0,1]}\left(\|\varphi_1'''\|_{L_2[0,1]}+\|\varphi_2''\|_{L_2[0,1]}+g(0)\|\varphi_2'\|_{L_2[0,1]}\right),$$

$$B_1(T)=\sqrt{5}g(0)T+\sqrt{7}g^2(0)T+\sqrt{7}g(0)T+\sqrt{g'(0)}T,$$

$$B_2(T)=\frac{1}{M}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}|\eta_n|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left(g^2(0)+g(0)+g'(0)\right),$$

$$B_3(T)=\frac{g(0)}{M}T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{4-\alpha}\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B_4(T)=\frac{g(0)+g'(0)}{M}T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{4-\alpha}\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{M}T\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left(g^2(0)+g(0)+g'(0)\right),$$

$$C_1(T)=T\cdot\max\left\{\sqrt{5}+\sqrt{7}g(0);\sqrt{7}\left(1+g(0)\frac{T}{2}\right);\sqrt{7}\frac{T}{2}\right\},$$

$$C_2(T)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{T}{M}\cdot\max\left\{g(0)+1;\frac{T}{2}\right\},$$

$$C_3(T)=\frac{T}{M}\cdot\max\left\{\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}};\frac{T}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{4-\alpha}\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$C_4(T)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{2-\alpha}\left|\eta_n\right|\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{T}{M}\cdot\max\left\{g^2(0);1+g(0)+\frac{T}{2}g^2(0);\frac{T}{2}\left(1+g(0)\right)\right\}.$$

Наконец, учитывая (30)–(33), можем заключить, что

$$\|\widetilde{\omega}\|_{B_T^\alpha}+\|\widetilde{g}\|_{C^2[0,T]}\le A(T)+B\left(T\right)\|\omega\|_{B_T^\alpha}+C\left(T\right)\|g\|_{C^2[0,T]}\|\omega\|_{B_T^\alpha}, \tag{34}$$

где

$$A(T)=\sum_{n=1}^{4}A_i(T),\quad B(T)=\sum_{n=1}^{4}B_i(T),\quad C(T)=\sum_{n=1}^{4}C_i(T).$$

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $(K3)$–$(K8)$ *и условие*

$$\left(A(T)+2\right)^2C(T)<\frac{1}{12},\quad B(T)<\frac{1}{2}. \tag{35}$$

Тогда задача (6)–(8) *и* (10) *имеет единственное решение в шаре* $S=S_R\big(\|z\|_{E_T^\alpha}\le R=2\left(A(T)+2\right)\big)$ *пространства* E_T^α.

Доказательство. В пространстве E_T^α рассмотрим уравнение

$$z=\Psi z, \tag{36}$$

где $z=\{\omega,g,g',g''\}$, а компоненты $\Psi_i(\omega,g,g',g''), i=\overline{1,4}$, заданы правыми частями уравнений (19), (22), (23) и (24) соответственно.

Рассмотрим оператор $\Psi_i(\omega,g,g',g''), i=\overline{1,4}$, в шаре $S=S_R$ пространства E_T^α. По аналогии с (34) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in S_R$ верны следующие оценки:

$$\|\Psi z\|_{E_T^\alpha}\le A(T)+B\left(T\right)\|\omega\|_{B_T^\alpha}+C\left(T\right)\|g\|_{C^2[0,T]}\|\omega\|_{B_T^\alpha}\le$$

$$\le A(T)+2B(T)\left(A(T)+2\right)+12C(T)\left(A(T)+2\right)^2, \tag{37}$$

$$\|\Psi z_1-\Psi z_2\|_{E_T^\alpha}\le B(T)\|\omega_1-\omega_2\|_{B_T^\alpha}+C(T)R\left(3\|\omega_1-\omega_2\|_{B_T^\alpha}+\|g_1-g_2\|_{C^2[0,T]}\right). \tag{38}$$

Тогда, используя (35) в (37) и (38), получаем, что оператор Ψ действует в шаре $S = S_r$ и удовлетворяет условиям теоремы Банаха о сжимающем отображении. Поэтому в шаре $S = S_r$ оператор Ψ обладает единственной неподвижной точкой $\{\omega, g\}$, являющейся единственным решением уравнения (36).

Можно заключить, что функция $\omega(x,t)$, как элемент пространства B_T^α, является непрерывной и имеет непрерывные в Ω_T производные $\omega(x,t)$ и $\omega_{xx}(x,t)$.

Из (17) легко заметить, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha-2}\|\omega_n''\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\left(1+\|g\|_{C[0,T]}T\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^{\alpha}\|\omega_n\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1+\|g\|_{C[0,T]}T\right)\|\omega\|_{B_T^\alpha}.$$

Таким образом, $\omega(x,t)$ непрерывна в Ω_T.

Можно проверить, что уравнение (6) и условия (7), (8), (10) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{\omega(x,t), g(t)\}$ является решением (6)–(8), (10) и по лемме 2 оно единственно. □

Замечание 1. Неравенство (35) выполняется для достаточно малых значений T.

По лемме 1 существование и единственность решения исходной задачи (6)–(9) следуют из теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1 *и леммы* 1. *Тогда задача* (6)–(9) *имеет единственное решение в шаре* $S = S_R$ *пространства* E_T^α.

Замечание 2. Пусть условия $(K1)$–$(K3)$ выполнены. Тогда из (6)–(8) получим уравнения (2)–(4). Обозначая $\omega(x,t) = u_t(x,t) + u(x,t)$ и используя дополнительное условие (5), получаем

$$u(x,t) = e^{-t}\psi_1(x) + \int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\omega(x,\tau)d\tau. \tag{39}$$

Учитывая теорему 1 и известные факты из теории интегральных уравнений типа Вольтерра, можно сделать вывод, что при выполнении условий $(K1)$ и $(K2)$ функция $u(x,t)$, заданная формулой (39), принадлежит классу $u(x,t) \in C_{x,t}^{2,3}(\Omega_T) \cap C_{x,t}^{0,2}(\overline{\Omega}_T)$.

Заключение

В данной статье исследуется обратная задача нахождения ядра $g(t)$ в уравнении (1) с начальными, граничными и дополнительными условиями. Были доказаны существование и единственность решения обратной задачи. Для решения задачи был использован метод разделения переменных. Были получены условия однозначной разрешимости обратной задачи.

Литература

[1] Kaltenbacher B., Lasiecka I., Marchand R. *Wellposedness and exponential decay rates for the Moore–Gibson–Thompson equation arising in high intensity ultrasound*, Control and Cybernetics **40** (4), 971–988 (2011).

[2] Lasiecka I., Wang X. *Moore–Gibson–Thompson equation with memory, part I: exponential decay of energy*, Zeitschrift für angewandte Math. und Phys. **67** (2), 2–17 (2016).

[3] Al-Khulai W., Boumenir A. *Reconstructing the Moore–Gibson–Thompson Equation*, Nonautonomous Dynamical Systems **7** (1), 219–223 (2020).

[4] Lasiecka I., Wang X. *Moore–Gibson–Thompson equation with memory, part* II: *General decay of energy*, J. Diff. Equat. **259** (12), 7610–7635 (2015).

[5] Lasiecka I. *Global solvability of Moore–Gibson–Thompson equation with memory arising in nonlinear acoustics*, J. Evolution Equat. **17** (1), 411–441 (2017).

[6] Romanov V.G. *Inverse problems for differential equations with memory*, Eurasian J. Math. and Comput. Appl. **2** (4), 51–80 (2014).

[7] Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. *Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области*, Матем. заметки **97** (6), 855–867 (2015).

[8] Durdiev D.K., Totieva Zh.D. *The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type*, J. Inverse Ill-posed Probl. **28** (1), 43–52 (2019).

[9] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor*, Math. Meth. Appl. Sci. **45**, 8374–8388 (2022).

[10] Durdiev U.D., Totieva Z.D. *A problem of determining a special spatial part of* 3*D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **42** (3), 7440–7451 (2019).

[11] Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. *Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде*: *глобальная разрешимость*, ТМФ **195** (3), 491–506 (2018).

[12] Durdiev D.K., Rahmonov A.A. *A* 2*D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity*, Math. Meth. Appl. Sci. **43**, 8776–8796 (2020).

[13] Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В. *Единственность в одной обратной задаче определения памяти*, Сиб. матем. журн. **37** (3), 526–533 (1996).

[14] Janno J., Wolfersdorf L. *Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow*, Inverse and Ill-posed Probl. **4** (1), 39–66 (1996).

[15] Pais E., Janno J. *Inverse problem to determine degenerate memory kernel in heat flux with third kind boundary conditions*, Math. Model. and Anal. **11** (4), 427–450 (2006).

[16] Colombo F. *An inverse problem for a parabolic integrodifferential model in the theory of combustion*, Phys. **236**, 81–89 (2007).

[17] Guidetti D. *Some inverse problems of identification for integrodifferential parabolic systems with a boundary memory term*, Discrete & Continuous Dynamical Systems **8** (4), 749–756 (2015).

[18] Бондаренко А.Н., Бугуева Т.В., Иващенко Д.С. *Метод интегральных преобразований в обратных задачах аномальной диффузии*, Изв. вузов. Матем. (3), 3–14 (2017).

[19] Durdiev D.K., Turdiev Kh.Kh. *Inverse problem for a first-order hyperbolic system with memory*, Diff. Equat. **56** (12), 1634–1643 (2020).

[20] Дурдиев Д.К., Турдиев Х.Х. *Задача определения ядер в системе интегродифференциальных уравнений Максвелла*, Сиб. журн. индустр. матем. **24** (2), 38–61 (2021).

[21] Boltaev A.A., Durdiev D.K. *Inverse problem for viscoelastic system in a vertically layered medium*, Владикавк. матем. журн. **24** (4), 30–47 (2022).

[22] Liu S., Triggiani R. *An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement*, J. Inverse Ill-posed Probl. **21** (6), 825–869 (2013).

[23] Arancibia R., Lecaros R., Mercado A., Zamorano S. *An inverse problem for Moore–Gibson–Thompson equation arising in high intensity ultrasound*, J. Inverse Ill-posed Probl. **30** (5), 659–675 (2022).

[24] Мергалиев Я.Т. *О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка*, Вестн. ТвГУ. Сер. Прикл. матем. (23), 25–38 (2011).

[25] Мегралиев Я.Т. *Об одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральными условиями*, Владикавк. матем. журн. **15** (4), 30–43 (2013).

[26] Худавердиев К.И., Велиев А.А. *Исследование одномерной смешанной задачи для класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейным оператором в правой части* (Чашеглы, Баку, 2010).

Дурдимурод Каландарович Дурдиев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,

ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;

Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

`e-mail:` durdiev65@mail.ru

Аслиддин Аскар угли Болтаев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: asliddinboltayev@mail.ru

Аскар Ахмадович Рахмонов

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: araxmonov@mail.ru

D.K. Durdiev, A.A. Boltaev, and A.A. Rahmonov

Convolution kernel determination problem in the third order Moore–Gibson–Thompson equation

Abstract. This article is concerned with the study of the inverse problem of determining the difference kernel in a Volterra type integral term function in the third-order Moore–Gibson–Thompson (MGT) equation. First, the initial-boundary value problem is reduced to an equivalent problem. Using the Fourier spectral method, the equivalent problem is reduced to a system of integral equations. The existence and uniqueness of the solution to the integral equations are proved. The obtained solution to the integral equations of Volterra-type is also the unique solution to the equivalent problem. Based on the equivalence of the problems, the theorem of the existence and uniqueness of the classical solutions of the original inverse problem is proved.

Keywords: MGT equation, initial-boundary value problem, inverse problem, existence, uniqueness.

Durdimurod Kalandarovich Durdiev

Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 Muhammad Ikbal str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: durdiev65@mail.ru

Asliddin Askar ugli Boltaev

Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 Muhammad Ikbal str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: asliddinboltayev@mail.ru

Askar Ahmadovich Rahmonov

Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 Muhammad Ikbal str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: araxmonov@mail.ru