

М. МИРСАБУРОВ, Б.Б. АМОНОВ

**КОМБИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМИ И
НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И С ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ
СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДА С СИНГУЛЯРНЫМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ**

Аннотация. В задаче Трикоми во всех точках граничной характеристики задается значение искомой функции. В настоящей работе исследуется корректность задачи, где часть граничной характеристики освобождена от краевого условия и это недостающее условие Трикоми заменено нелокальным условием со смещением на внутренней характеристике и на части граничной характеристики. На отрезке вырождения задается общее условие сопряжения.

Ключевые слова: недостающее условие Трикоми, условие со смещением на внутренней и на части граничной характеристике, принцип экстремума, единственность решения, существование решения.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-12-71-93

1. Постановка задачи ТЖНК (Трикоми, Жегалова, Нахушева,
КАРАТОПРАКЛИЕВА)

Пусть Ω — область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой σ_0 с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, заданной уравнением $x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{(m+2)} = 1$, а при $y < 0$ — характеристиками AC и BC уравнения

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0, \quad (1)$$

где постоянные $m > 0$, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 — соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками, исходящими из точки $E(c, 0)$, где $c \in I = AB = (-1, 1)$ — интервал оси $y = 0$.

В задаче Трикоми [1], [2] во всех точках граничной характеристики AC задается значение искомой функции $u(x, y)|_{AC} = \psi(x)$. В настоящей работе исследуется корректность задачи, где часть характеристики AC освобождена от краевого условия и это недостающее условие Трикоми заменено нелокальным условием со смещением В.И. Жегалова [3], А.М. Нахушева [4] на внутренней характеристике EC_1 и на части граничной характеристики BC_1 . На отрезке вырождения уравнения (1) задаются общие условия сопряжения Жегалова–Каратопраклиева [3], [5]. Аналогичные задачи исследовались в работах [6]–[13].

Задача ТЖНК. Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- а) функция $u(x, y)$ является непрерывной функцией в замкнутой смешанной области $\bar{\Omega}$, за исключением прямой $y = 0$, где существуют односторонние конечные пределы $u(x, -0)$ и $u(x, +0)$;
- б) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- в) функция $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [2], [11] в области Ω^- ;
- д) на интервале вырождения AB выполняются общие условия сопряжения [5]

$$u(x, -0) = \lambda_1 u(x, +0) + \lambda_0(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_1(x) \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_0(x), \quad x \in (-1, 1)/\{c\}, \quad (3)$$

причем пределы в (3) при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m + 2) \in (0, 1/2)$;

е) выполнены условия

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (4)$$

$$u(x, y)|_{AC_0} = \psi(x), \quad x \in [-1, (c - 1)/2], \quad (5)$$

$$a_0(x)(x - c)^\beta D_{c,x}^{1-\beta} u[\theta^*(x)] + b_0(x)(1 - x)^\beta D_{x,1}^{1-\beta} u[\theta_1(x)] = c_0(x), \quad x \in (c, 1), \quad (6)$$

где $D_{c,x}^{1-\beta}$, $D_{x,1}^{1-\beta}$ — операторы дифференцирования дробного порядка $1 - \beta$ (см. [2]), $\theta^*(x)$ и $\theta_1(x)$ — соответственно аффиксы точек пересечения характеристик EC_1 и BC_1 с характеристиками, исходящими из точки $M(x_0, 0)$, $x_0 \in [c, 1]$:

$$\theta^*(x_0) = \frac{x_0 + c}{2} - i \left(\frac{m + 2}{4} (x_0 - c) \right)^{2/(m+2)},$$

$$\theta_1(x_0) = \frac{x_0 + 1}{2} - i \left(\frac{m + 2}{4} (1 - x_0) \right)^{2/(m+2)}.$$

Заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, $\lambda_0(x)$, $\mu_0(x)$ и $\mu_1(x)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $a_0^2(x) + b_0^2(x) \neq 0$, а функция $\varphi(x)$ представима в виде $\varphi(x) = (1 - x^2)\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x) \in C^1(\bar{I})$, $\psi(-1) = 0$, λ_1 — некоторая постоянная, отличная от нуля. Заметим, что для предельного значения $c = 1$ из задачи ТЖНК следует задача Трикоми с общими условиями сопряжения видов (2) и (3) ([5]), а для предельного значения $c = -1$ из задачи ТЖНК следует задача со смещением В.И. Жегалова [3] ($m = 0$, $\beta_0 = 0$) и А.М. Нахушева [4] ($m = 1$, $\beta_0 = 0$) с общими условиями сопряжения (2), (3).

Введем

$$\tau^-(x) = u(x, -0), \quad \nu^-(x) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\tau(x) = u(x, +0), \quad \nu(x) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (8)$$

В силу (7), (8) условия склеивания (2), (3) примут соответственно вид

$$\tau^-(x) = \lambda_1 \tau(x) + \lambda_0(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (9)$$

$$\nu^-(x) = \mu_1(x) \nu(x) + \mu_0(x), \quad x \in (-1, 1)/\{c\}. \quad (10)$$

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЖНК

В силу формулы Дарбу [11], дающей решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x, -0) = \tau^-(x), \quad x \in [-1, 1], \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu^-(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (11)$$

из краевых условий (5), (6) соответственно имеем

$$\nu^-(x) = \gamma D_{-1,x}^{1-2\beta} \tau^-(x) + \Psi_0(x), \quad x \in (-1, c), \quad (12)$$

$$d_0(x) \nu^-(x) = \gamma a_0(x) D_{c,x}^{1-2\beta} \tau^-(x) + \gamma b_0(x) D_{x,1}^{1-2\beta} \tau^-(x) + c_1(x), \quad x \in (c, 1), \quad (13)$$

где

$$\gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2\beta}, \quad c_1(x) = -2\gamma \left(\frac{2}{m+2} \right)^{1-2\beta} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} c_0(x),$$

$$d_0(x) = a_0(x) + b_0(x), \quad \Psi_0(x) = -\gamma \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} (1+x)^\beta D_{-1,x}^{1-\beta} \psi\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad x \in (-1, c),$$

здесь $\Psi_0(x) = C[-1, c] \cap C^1(-1, c)$, $c_1(x) \in C[c, 1] \cap C^1(c, 1)$. Вследствие условий склеивания (2) и (3) ((9) и (10)) соотношения (12), (13) преобразуем к виду

$$\mu_1(x) \nu(x) = \lambda_1 \gamma D_{-1,x}^{1-2\beta} \tau(x) + \Psi_1(x), \quad x \in (-1, c), \quad (14)$$

$$\mu_1(x) d_0(x) \nu(x) = \lambda_1 \gamma a_0(x) D_{c,x}^{1-2\beta} \tau(x) + \lambda_1 \gamma b_0(x) D_{x,1}^{1-2\beta} \tau(x) + c_2(x), \quad x \in (c, 1), \quad (15)$$

где

$$\Psi_1(x) = \Psi_0(x) + \gamma D_{-1,x}^{1-2\beta} \lambda_0(x) - \mu_0(x),$$

$$c_2(x) = c_1(x) + \gamma a_0(x) D_{c,x}^{1-2\beta} \lambda_0(x) + \gamma b_0(x) D_{x,1}^{1-2\beta} \lambda_0(x) - d_0(x) \mu_0(x).$$

Соотношения (14), (15) представляют собой первые функциональные соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенные на интервалы $(-1, c)$ и $(c, 1)$ оси $y = 0$ из области $\overline{\Omega^-}$.

Теорема 1. Пусть заданные функции задачи ТЖНК удовлетворяют условиям $\lambda_0(x) \equiv 0$, $\mu_0(x) \equiv 0$, $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $c_0(x) \equiv 0$,

$$\lambda_1 > 0, \quad \mu_1(x) > 0, \quad a_0(x) > 0, \quad b_0(x) > 0, \quad (16)$$

причем $\lambda_1(x)$ — неубывающая функция. Тогда решение $u(x, y)$ задачи ТЖНК в замкнутой области $\overline{\Omega^+}$ своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) достигает на кривой $\overline{\sigma_0}$.

Доказательство. Пусть функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу принципа Хопфа [8] решение $u(x, y)$ уравнения (1) своих НПЗ и НОЗ во внутренних точках области Ω^+ не достигает.

Пусть решение $u(x, y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке x_0 интервала J . Могут представиться только следующие три случая: $x_0 \in (-1, c)$, $x_0 \in (c, 1)$ или $x_0 = c$.

1) Допустим, что $x_0 \in (-1, c)$, тогда в силу аналога принципа Зарембо–Жиро [11] в этой точке

$$\nu(x_0) < 0. \quad (17)$$

С другой стороны, в силу соответствующего однородного условия (14) (с $\Psi_1(x) \equiv 0$) и того, что в точке положительного максимума функции $\tau(x)$ значение оператора дробного дифференцирования $D_{-1,x}^{1-2\beta} \tau(x) \Big|_{x=x_0}$ положительно [2], учитывая также неравенство $\mu_1(x) > 0$,

из (14) (с $\Psi_1(x) \equiv 0$), имеем $\nu(x_0) > 0$. Полученное неравенство противоречит неравенству (17), следовательно, $x_0 \notin (-1, c)$.

2) Пусть $x_0 \in (c, 1)$. Здесь точно так же как и в случае $x_0 \in (-1, c)$ с использованием соотношения (15) показывается, что $x_0 \notin (c, 1)$.

3) Пусть $x_0 = c$. В этом случае идентично методу работы [2] доказывается, что $x_0 \neq c$. Следовательно, решение $u(x, y)$ однородной задачи ТЖНК своего НПЗ в точках интервала $(-1, 1)$ не достигает.

Таким образом, решение $u(x, y)$ однородной задачи ТЖНК своего НПЗ в области $\bar{\Omega}^+$ может достигать только в точках кривой $\bar{\sigma}_0$.

Аналогично показывается, что решение $u(x, y)$ однородной задачи ТЖНК своего НОЗ в области $\bar{\Omega}^+$ может достигать только в точках кривой $\bar{\sigma}_0$. $\square$

Следствие. Задача ТЖНК может иметь не более одного решения.

Доказательство. В силу соответствующего однородного условия (4) (с $\varphi(x) \equiv 0$) из теоремы 1 следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{D}^+$. Отсюда

$$\tau(x) = u(x, +0) = 0, \quad \nu(x) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Тогда в силу соответствующих однородных общих условий склеивания (2) и (3) (с $\lambda_0(x) \equiv 0$, $\mu_0(x) \equiv 0$) имеем

$$\tau^-(x) = u(x, -0) = 0, \quad \nu^-(x) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Теперь, восстановив функцию $u(x, y)$ в области Ω^- как решение видоизмененной задачи Коши с нулевыми данными, по формуле Дарбу [11] получим, что $u(x, y) \equiv 0$ и в области $\bar{\Omega}^-$, таким образом, $u(x, y) \equiv 0$ во всей смешанной области $\bar{\Omega}$. $\square$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЖНК

Теорема 2. Задача ТЖНК при выполнении условий (16) и

$$\frac{\lambda_1 \cos(\beta\pi)(a_0(c) - b_0(c))}{\mu_1(c)d_0(c) + \lambda_1 \sin(\beta\pi)a_0(c) + \lambda_1 \sin(\beta\pi)b_0(c)} = \operatorname{tg}(2\alpha\pi), \quad (18)$$

$$\mu_1(x)d_0(x) + \lambda_1 \sin(\beta\pi)a_0(x) + \lambda_1 \sin(\beta\pi)b_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in J,$$

однозначно разрешима, где $\alpha = (1 - 2\beta)/4$.

Доказательство теоремы 2.

3.1. Вывод первого нестандартного сингулярного интегрального уравнения Трикоми со сдвигом между неизвестными функциями $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$ (на основе локального условия (5)). Решение уравнения (1) в области Ω^+ , удовлетворяющее краевым условиям (видоизмененным условиям Н. Хольмгрена)

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I, \quad u(x, y) |_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \bar{I},$$

имеет вид [11]

$$u(x, y) = -k_1 \int_{-1}^1 \nu(t) \left\{ \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{-\beta} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[(1 - xt)^2 + \frac{4t^2}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{-\beta} \Bigg\} dt - k_1 \beta (m+2) (1 - R^2) \times \\
& \times \int_0^l \varphi(\xi(s)) \eta^{\beta_0-1}(s) (r_1^2)^{-\beta-1} F(\beta, \beta+1, 2\beta; 1-\sigma) d\xi(s), \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (19)
\end{aligned}$$

где s — длина дуги кривой σ_0 , отсчитываемая от точки B до точки $M(x(s), y(s)) \in \sigma_0$, l — длина дуги всей кривой σ_0 ,

$$\begin{aligned}
\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \left. \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix} \right\} &= (x - \xi(s))^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp \eta^{\frac{m+2}{2}}(s) \right)^2, \quad (\xi(s), \eta(s)) \in \sigma_0, \\
k_1 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}, \quad R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2},
\end{aligned}$$

а $F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [2].

Из решения (19) видоизмененной задачи N при $y = 0$ находим

$$\tau(x) = -k_1 \int_{-1}^1 \left[|x-t|^{-2\beta} - (1-xt)^{-2\beta} \right] \nu(t) dt + \Phi(x), \quad x \in \bar{I}, \quad (20)$$

где

$$\Phi(x) = 2\beta k_1 ((m+2)/2)^{2\beta} (1-x^2) \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\beta-1/2} (1-2xt+x^2)^{-1-\beta} \varphi(t) dt.$$

Заметим, что соотношение (20) справедливо для всего промежутка $x \in \bar{I}$. В силу этого замечания, подставляя в уравнение (14) представление для $\tau(x)$ из (20), можно исключить из (14) неизвестную функцию $\tau(x)$, в итоге получим

$$\mu_1(x) \nu(x) = -\frac{\lambda_1 k_1 \gamma}{\Gamma(2\beta)} (J_1(x) - J_2(x)) + \Phi_1(x) \quad x \in (-1, c), \quad (21)$$

где

$$J_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{1-2\beta}} \int_{-1}^1 |t-s|^{-2\beta} \nu(s) ds = \pi \operatorname{tg}(\beta\pi) \nu(x) + \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s) ds}{s-x}, \quad (22)$$

$$J_2(x) = \frac{d}{dx} \int_{-1}^x \frac{dt}{(x-t)^{1-2\beta}} \int_{-1}^1 (1-ts)^{-2\beta} \nu(s) ds = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)}{1-xs} ds, \quad (23)$$

$$\Phi_1(x) = -\frac{\lambda_1 k_1 \gamma}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_{-1}^x \frac{\Phi(t)}{(x-t)^{1-2\beta}} dt + \Psi_1(x).$$

Таким образом, в силу (22), (23) уравнение (21) запишем в виде

$$A_0(x) \nu(x) + B \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \nu(t) dt = \Phi_1(x), \quad x \in (-1, c), \quad (24)$$

где

$$A_0(x) = \mu_1(x) + \lambda_1 \sin(\beta\pi), \quad B = \lambda_1 \frac{\cos(\beta\pi)}{\pi}.$$

Так как в уравнении (24) переменная $x \in (-1, c)$, то интегральный оператор имеет сингулярную особенность только при $t \in (-1, c)$. С целью выделения сингулярной части уравнения (24), интеграл по промежутку интегрирования $(-1, 1)$ разложим на два интеграла по промежуткам $(-1, c)$ и $(c, 1)$, затем в интегралах по промежуткам $(-1, c)$ и $(c, 1)$, соответственно, выполним замену переменных интегрирования $t = as - b$ и $t = bs + a$ (где $a = (1 + c)/2$, $b = (1 - c)/2$). С целью рассмотрения уравнения (24) в промежутке $(-1, 1)$ в (24) переменную $x \in (-1, c)$ заменим на $ax - b$, $x \in (-1, 1)$, получим

$$\begin{aligned} A_0(ax - b)\nu(ax - b) + B \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + as - b}{a(1 + x)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{a(s - x)} - \frac{1}{1 - (ax - b)(as - b)} \right) \nu(as - b)ads + \\ + B \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + bs + a}{a(1 + x)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{bs - ax + 1} - \frac{1}{1 - (ax - b)(bs + a)} \right) \nu(bs + a)bds = \\ = \Phi_1(ax - b), \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (25)$$

В (25) введя обозначения $A(x) = A_0(ax - b)$, $\nu_0(x) = \nu(ax - b)$, $\nu_1(x) = \nu(bs + a)$, $\widetilde{\Phi}_1(x) = \Phi_1(ax - b)$, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} A(x)\nu_0(x) + B \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + s}{1 + x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{s - x} - \frac{a}{1 - (ax - b)(as - b)} \right) \nu_0(s)ds = \\ = \widetilde{\Phi}_1(x) - B \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + a + bs}{a(1 + x)} \right)^{1-2\beta} \frac{b}{bs - ax + 1} \nu_1(s)ds + T[\nu_1], \quad x \in (-1, 1), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$T[\nu_1] = B \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + a + bs}{a(1 + x)} \right)^{1-2\beta} \frac{b}{1 - (ax - b)(bs + a)} \nu_1(s)ds, \quad x \in (-1, 1),$$

— регулярный оператор, $\widetilde{\Phi}_1(x)$ — известная функция.

Уравнение (26) является первым уравнением из системы сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$.

Уравнение (26) можно рассматривать как сингулярное интегральное уравнение Трикоми относительно неизвестной функции $\nu_0(x)$ и это уравнение имеет две особенности:

1) уравнение (26) в отличие от сингулярного интегрального уравнения Трикоми содержит сдвиги $ax - b$, $as - b$ в несингулярной части ядра;

2) первый интегральный оператор в правой части (26) не является фредгольмовым, так как в точке $(x, s) = (1, -1)$ (где $a + b = 1$) имеет изолированную особенность первого порядка.

3.2. Регуляризация нестандартного сингулярного интегрального уравнения (26).

Временно считая правую часть уравнения (26) известной функцией, запишем его в виде

$$A(x)\nu_0(x) + B \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + s}{1 + x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{s - x} - \frac{a}{1 - (ax - b)(as - b)} \right) \nu_0(s)ds = g_0(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (27)$$

где

$$g_0(x) = \widetilde{\Phi}_1(x) + T[\nu_1] - B \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{bs-ax+1} - \frac{1}{1-(ax-b)(bs+a)} \right) \nu_1(s) b ds. \quad (28)$$

В уравнении (27) полагая $B = B(x)$ — переменная функция, рассмотрим более общее уравнение

$$A(x)\nu_0(x) + B(x) \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{s-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(as-b)} \right) \nu_0(s) ds = g_0(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (29)$$

Лемма 1. Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $-1 < x < 1$ и $g_0(x) \in L_p(I)$, $p > 1$, то решение уравнения (27) в классе функций H , в котором $(1+x)^{1-2\beta}\nu_0(x)$ ограничена на левом конце и может быть неограниченной на правом конце интервала I , выражается формулой

$$\begin{aligned} \nu_0(x) = & \frac{A(x)g_0(x)}{A^2(x) + \pi^2 B^2(x)} - \frac{\pi B(x)}{A^2(x) + \pi^2 B^2(x)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta-2\alpha_0} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1-c(at+b)}{1-c(ax+b)} \right)^{\alpha_0} \times \\ & \times \frac{\delta(x)}{\delta(t)} \frac{A(x) + i\pi B(x)}{A(t) + i\pi B(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) g_0(t) dt, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (30)$$

Лемма 1 доказывается аналогично методу работ [14]–[18]. $\square$

3.3. Вывод первого интегрального уравнения с ядром, имеющим изолированную особенность первого порядка (на основе локального условия (5)). В силу (28) для $g_0(x)$ и с учетом того, что $B(x) = B = \text{const}$, решение (30) запишем в виде

$$\begin{aligned} \nu_0(x) = & \frac{A(x)}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \left[\widetilde{\Phi}_1(x) + T[\nu_1] - B \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{b}{bs-ax+1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{b}{1-(ax-b)(bs+a)} \right) \nu_1(s) ds \right] - \frac{\pi B}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta-2\alpha_0} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{\alpha_1} \times \\ & \times \left(\frac{1-c(at+b)}{1-c(ax+b)} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \frac{\delta(x)}{\delta(t)} \frac{A(x) + i\pi B}{A(t) + i\pi B} \times \\ & \times \left[\widetilde{\Phi}_1(x) + T[\nu_1] - B \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{b}{bs-ax+1} - \frac{b}{1-(ax-b)(bs+a)} \right) \nu_1(s) ds \right] dt. \end{aligned} \quad (31)$$

В (31) выделив интегралы с сингулярной особенностью, имеем

$$\nu_0(x) = -\frac{BA(x)}{A^2(x) + \pi^2 B^2} J_0(x) + \frac{\pi B^2}{A^2(x) + \pi^2 B^2} J_1(x) + T_1[\nu_1] + \Phi_2(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (32)$$

где

$$J_0(x) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bt}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{b}{bt-ax+1} - \frac{b}{1-(ax-b)(bt+a)} \right) \nu_1(t) dt, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu_1(s)ds}{(1+x)^{1-2\beta-2\alpha_0}(1-x)^{\alpha_1}} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{\alpha_1}}{(1+t)^{2\alpha_0}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \left(\frac{1}{bs-at+1} - \frac{1}{1-(at-b)(bs+a)} \right) dt, \quad (34) \\ T_1[\nu_1] &= \frac{\pi B^2}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \int_{-1}^1 b\nu_1(s)ds \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta-2\alpha_0} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{\alpha_1} \times \\ &\times \left[\left(\frac{1-c(at+b)}{1-c(ax+b)} \right)^{\alpha_1} \frac{\delta(x)}{\delta(t)} \frac{A(x) + i\pi B}{A(t) + i\pi B} - 1 \right] \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) dt + \\ &+ \frac{A(x)}{A^2(x) + \pi^2 B^2} T[\nu_1] - \frac{\pi B}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta-2\alpha_0} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1-c(at+b)}{1-c(ax+b)} \right)^{\alpha_1} \times \\ &\times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \frac{\delta(x)}{\delta(t)} \frac{A(x) + i\pi B}{A(t) + i\pi B} T[\nu_1] dt \end{aligned}$$

— регулярный оператор,

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \frac{A(x)\widetilde{\Phi}_1(x)}{A^2(x) + \pi^2 B^2} - \frac{\pi B}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta-2\alpha_0} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{\alpha_1} \times \\ &\times \left(\frac{1-c(at-b)}{1-c(ax-b)} \right)^{\alpha_1} \frac{\delta(x)}{\delta(t)} \frac{A(x) + i\pi B}{A(t) + i\pi B} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \widetilde{\Phi}_1(t) dt \end{aligned}$$

— известная функция. В соотношении (34) вычислим внутренний интеграл

$$M_0(x, s) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{\alpha_1}}{(1+t)^{2\alpha_0}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \left(\frac{1}{bs-at+1} - \frac{1}{1-(at-b)(bs+a)} \right) dt. \quad (35)$$

Рациональный множитель подинтегрального выражения разложим на простые дроби:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) \left(\frac{1}{bs-at+1} - \frac{1}{1-(at-b)(bs+a)} \right) = \\ &= \frac{1}{bs-ax+1} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{a}{bs-at+1} \right) - \frac{1}{1-(ax-b)(bs+a)} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{a(bs+a)}{1-(at-b)(bs+a)} \right) - \\ &\quad - \frac{a}{1-(ax-b)(bs+a)} \left(\frac{1}{bs-at+1} - \frac{ax-b}{1-(ax-b)(at-b)} \right) + \\ &\quad + \frac{a}{bs-ax+1} \left(\frac{bs+a}{1-(at-b)(bs+a)} - \frac{ax-b}{1-(ax-b)(at-b)} \right), \end{aligned}$$

и с учетом этого разложения имеем

$$M_0(x, s) = \left(\frac{1}{bs-ax+1} - \frac{1}{1-(ax-b)(bs+a)} \right) \times$$

$$\times \left[J_{11}(x) + aJ_{12}(s) + a(bs + a)J_{13}(s) - a(ax - b)J_{14}(x) \right], \quad (36)$$

где

$$J_{11}(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{\alpha_1}}{(1+t)^{2\alpha_0}} \frac{dt}{t-x} = \frac{\pi \operatorname{ctg}(\alpha_1 \pi)}{(1+x)^{2\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}} +$$

$$+ \frac{2^{\alpha_1}}{(1+x)^{2\alpha_0}} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-2\alpha_0)}{\Gamma(1+\alpha_1-2\alpha_0)} F\left(1-2\alpha_0, -\alpha_1, 1-\alpha_1; \frac{1-x}{2}\right), \quad x \in (-1, 1), \quad (37)$$

$$J_{12}(s) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{\alpha_1}}{(1+t)^{2\alpha_0}} \frac{dt}{bs - at + 1} = -\frac{\pi}{\sin(\alpha_1 \pi)} \frac{a^{2\alpha_0-1-\alpha_1} b^{\alpha_1} (1+s)^{\alpha_1}}{(1+a+bs)^{2\alpha_0}} +$$

$$+ \frac{2^{\alpha_1}\Gamma(1-2\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(1+\alpha_1-2\alpha_0)} \left(\frac{a}{1+a+bs} \right)^{2\alpha_0} \frac{1}{a} F\left(1-2\alpha_0, -\alpha_1, 1-\alpha_1; -\frac{b}{a} \frac{1+s}{2}\right), \quad x \in (-1, 1), \quad (38)$$

$$J_{13}(s) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{\alpha_1}}{(1+t)^{2\alpha_0}} \frac{dt}{1 - (bs+a)(at-b)} =$$

$$= \frac{2^{1+\alpha_1-2\alpha_0}}{1+a+bs} \frac{\Gamma(1-2\alpha_0)\Gamma(1+\alpha_1)}{\Gamma(2+\alpha_1-2\alpha_0)} F\left(1-2\alpha_0, 1, 2-2\alpha_0+\alpha_1; \frac{2a(a+bs)}{1+bs+a}\right), \quad x \in (-1, 1), \quad (39)$$

$$J_{14}(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{\alpha_1}}{(1+t)^{2\alpha_0}} \frac{dt}{1 - (ax-b)(at-b)} =$$

$$= \frac{2^{1+\alpha_1-2\alpha_0}}{1+ax-b} \frac{\Gamma(1-2\alpha_0)\Gamma(1+\alpha_1)}{\Gamma(2+\alpha_1-2\alpha_0)} F\left(1-2\alpha_0, 1, 2-2\alpha_0+\alpha_1; \frac{2a(ax-b)}{1+ax-b}\right), \quad x \in (-1, 1). \quad (40)$$

В силу (37)–(40) соотношение (36) имеет вид

$$M_0(x, s) = \left(\frac{1}{bs - ax + 1} - \frac{1}{1 - (ax - b)(bs + a)} \right) \left[J_{11}(x) + aJ_{12}(s) + a(bs + a)J_{13}(s) - \right.$$

$$\left. - a(ax - b)J_{14}(x) \right] = \left(\frac{1}{bs - ax + 1} - \frac{1}{1 - (ax - b)(bs + a)} \right) \left[\frac{\pi \operatorname{ctg}(\alpha_1 \pi)}{(1+x)^{2\alpha_0}(1-x)^{-\alpha_1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2^{\alpha_1}}{(1+x)^{2\alpha_0}} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-2\alpha_0)}{\Gamma(1+\alpha_1-2\alpha_0)} F\left(1-2\alpha_0, -\alpha_1, 1-\alpha_1; \frac{1-x}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - a \frac{\pi}{\sin \pi \alpha_1} \frac{a^{2\alpha_0-1-\alpha_1} b^{\alpha_1} (1+s)^{\alpha_1}}{(1+a+bs)^{2\alpha_0}} + \frac{a 2^{\alpha_1}\Gamma(1-2\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(1+\alpha_1-2\alpha_0)} \left(\frac{a}{1+a+bs} \right)^{2\alpha_0} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{a} F\left(1-2\alpha_0, -\alpha_1, 1-\alpha_1; -\frac{b}{a} \frac{1+s}{2}\right) + a(bs + a)J_{13}(s) - a(ax - b)J_{14}(x) \right]. \quad (41)$$

Таким образом, с учетом (41) для внутреннего интеграла $M_0(x, s)$ в (34) уравнение (32) запишем в виде

$$\nu_0(x) = -\frac{BA(x)}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bt}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{b}{bt - ax + 1} - \frac{b}{1 - (ax - b)(bt + a)} \right) \nu_1(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi B^2}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \frac{(1+x)^{2\alpha_0}}{(1-x)^{\alpha_1}} \left(\frac{1}{bs-ax+1} - \frac{1}{1-(ax-b)(bs+a)} \right) \times \\
& \times \left\{ \pi \operatorname{ctg}(\alpha_1 \pi) \frac{(1-x)^{\alpha_1}}{(1+x)^{2\alpha_0}} - \frac{\pi}{\sin \pi \alpha_1} \frac{a^{2\alpha_0-\alpha_1} b^{\alpha_1} (1+s)^{\alpha_1}}{(1+a+bs)^{2\alpha_0}} + L_0(x, s) \right\} \nu_1(s) b ds + T_1[\nu_1] + \Phi_2(x),
\end{aligned} \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned}
L_0(x, s) = & \frac{2^{\alpha_1} \Gamma(1-2\alpha_0) \Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(1+\alpha_1-2\alpha_0)} \left[\left(\frac{a}{1+a+bs} \right)^{2\alpha_0} F\left(1-2\alpha_0, -\alpha_1, 1-\alpha_1; -\frac{b}{a} \frac{1+s}{2}\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{(1+x)^{2\alpha_0}} F\left(1-2\alpha_0, -\alpha_1, 1-\alpha_1; \frac{1-x}{2}\right) \right] + a(bs+a)J_{13}(s) - a(ax-b)J_{14}(x)
\end{aligned}$$

— регулярное ядро.

В (42) выделив сингулярную часть уравнения (интегралы с особенностью первого порядка в ядре), имеем

$$\nu_0(x) = \frac{\pi^2 B^2}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \frac{(b/a)^{\alpha_1}}{\sin(\alpha_1 \pi)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta-2\alpha_0} \left(\frac{1+s}{1-x} \right)^{\alpha_1} \frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1} + T_1[\nu_1] + \Phi_2(x), \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned}
T_1[\nu_1] = & \frac{B(A(x) - \pi^2 B \operatorname{ctg}(\alpha_1 \pi))}{A^2(x) + B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1} + \\
& + \frac{BA(x)}{A^2(x) + B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bt}{a(1+x)} \right) \frac{b\nu_1(t)dt}{1-(ax-b)(bt+a)} - \\
& - \frac{\pi B^2}{A^2(x) + \pi B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \frac{(1+x)^{2\alpha_0}}{(1-x)^{\alpha_1}} \left\{ \pi \operatorname{ctg}(\alpha_1 \pi) \frac{(1-x)^{\alpha_1}}{(1+x)^{2\alpha_0}} - \right. \\
& - \frac{\pi}{\sin \pi \alpha_1} \frac{a^{2\alpha_0-\alpha_1} b^{\alpha_1} (1+s)^{\alpha_1}}{(1+a+bs)^{2\alpha_0}} + L_0(x, s) \left. \right\} \frac{b\nu_1(s)ds}{1-(ax-b)(bs+a)} + \\
& + \frac{\pi B^2}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} \frac{(1+x)^{2\alpha_0}}{(1-x)^{\alpha_1}} \frac{L_0(x, s)b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1}
\end{aligned}$$

— регулярный оператор. Здесь учтено, что $[A(x) - \pi^2 B \operatorname{ctg}(\alpha_1 \pi)]|_{x=1} = 0$.

В (43) выделив характеристическую часть уравнения, получим

$$\nu_0(x) = \frac{\pi^2 B^2}{(A^2(1) + \pi^2 B^2) \sin(\alpha_1 \pi)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\alpha_1} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{1-x} \right)^{\alpha_1} \frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1} + T_2[\nu_1] + \Phi_2(x), \quad x \in J, \tag{44}$$

где

$$T_2[\nu_1] = T_1[\nu_1] + \left[\frac{\pi^2 B^2}{A^2(x) + \pi^2 B^2} \left(\frac{1+a+bs}{a(1+x)} \right)^{1-2\beta} - \frac{\pi^2 B^2}{A^2(1) + \pi^2 B^2} \right] \frac{(b/a)^{\alpha_1}}{\sin(\alpha_1 \pi)} \int_{-1}^1 \frac{b\nu_1(s)ds}{bs-ax+1}$$

— регулярный оператор.

Уравнение (44) является первым уравнением между неизвестными функциями $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$, которое получено на основе локального условия Трикоми (5). Заметим, что уравнение (44) разрешено относительно неизвестной функции $\nu_0(x)$.

3.4. Вывод второго нестандартного сингулярного интегрального уравнения Трикоми со сдвигом между неизвестными функциями $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$ (на основе нелокального условия (6)). С учетом (20) вычислим [11]

$$D_{c,x}^{1-2\beta} \tau(x) = -k_1 \Gamma(1-2\beta)(1 - \cos(2\beta\pi))\nu(x) + \frac{k_1}{\Gamma(2\beta)} \int_{-1}^c \left(\frac{c-s}{x-c} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{s-x} - \frac{k_1}{\Gamma(2\beta)} \int_c^1 \left(\frac{s-c}{x-c} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{s-x} + \frac{k_1}{\Gamma(2\beta)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-cs}{x-c} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{1-xs} + D_{c,x}^{1-2\beta} \Phi(x), \quad (45)$$

$$D_{x,1}^{1-2\beta} \tau(x) = -\frac{k_1 \pi \operatorname{tg}(\beta\pi)}{\Gamma(2\beta)} \nu(x) + \frac{k_1}{\Gamma(2\beta)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1-x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{1-xs} \right) \nu(s)ds + D_{x,1}^{1-2\beta} \Phi(x), \quad (46)$$

здесь $\Gamma(1-2\beta)(1 - \cos(2\beta\pi)) = \pi \operatorname{tg}(\beta\pi)/\Gamma(2\beta)$.

В силу (45), (46) соотношение (15) запишем в виде (где $\lambda_1(x) = \lambda_1 = \text{const}$)

$$\begin{aligned} \nu(x) = & A_0(x) \left\{ \int_{-1}^c \left(\frac{c-s}{x-c} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{s-x} - \int_c^1 \left(\frac{s-c}{x-c} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{s-x} + \int_{-1}^c \left(\frac{1-cs}{x-c} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{1-xs} + \right. \\ & \left. + \int_c^1 \left(\frac{1-cs}{x-c} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{1-xs} \right\} + B_0(x) \left\{ \int_{-1}^c \left(\frac{1-s}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{s-x} + \int_c^1 \left(\frac{1-s}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{s-x} + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^c \left(\frac{1-s}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{1-xs} + \int_c^1 \left(\frac{1-s}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu(s)ds}{1-xs} \right\} + c_3(x), \quad x \in (c, 1), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$c_3(x) = c_2(x) + \gamma \lambda_1 a_0(x) D_{c,x}^{1-2\beta} \Phi(x) + \gamma \lambda_1 b_0(x) D_{x,1}^{1-2\beta} \Phi(x),$$

$$A_0(x) = \frac{\lambda_1 \cos(\beta\pi) a_0(x)}{\pi d(x)}, \quad B_0(x) = \frac{\lambda_1 \cos(\beta\pi) b_0(x)}{\pi d(x)},$$

$$d(x) = \mu_1(x) d_0(x) + \lambda_1 \sin(\beta\pi) a_0(x) + \lambda_1 \sin(\beta\pi) b_0(x) \neq 0.$$

В уравнении (47) промежутки интегрирования разные, т. е. $(-1, c)$ и $(c, 1)$, чтобы свести их к единому промежутку интегрирования, в интегралах по промежутку $(-1, c)$ сделаем

замену переменного интегрирования $s = at - b$, а в интегралах по промежутку $(c, 1) - s = bt + a$, где $t \in (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} \nu(x) = & A_0(x) \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{c - at + b}{x - c} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{at - b - x} - \int_{-1}^1 \left(\frac{bt + a - c}{x - c} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{bt + a - x} + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - c(at - b)}{x - c} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{1 - x(at - b)} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - c(bt + a)}{x - c} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{1 - x(bt + a)} \right\} + \\ & + B_0(x) \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - at + b}{1 - x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{at - b - x} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - bt - a}{1 - x} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{bt + a - x} + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - at + b}{1 - x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{1 - x(at - b)} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - bt - a}{1 - x} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{1 - x(bt + a)} \right\} + c_3(x), \quad x \in (c, 1). \end{aligned} \quad (48)$$

Чтобы рассмотреть уравнение (48) в основном промежутке $(-1, 1)$, в (48) $x \in (c, 1)$ поменяем на $bx + a$ ($x \in (-1, 1)$), получим

$$\begin{aligned} \nu(bx + a) = & A_0(bx + a) \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{c - at + b}{bx + a - c} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{at - b - bx - a} - \int_{-1}^1 \left(\frac{bt + a - c}{bx + a - c} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{bt + a - bx - a} + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - c(at - b)}{bx + a - c} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{1 - (bx + a)(at - b)} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - c(bt + a)}{bx + a - c} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{1 - (bx + a)(bt + a)} \right\} + \\ & + B_0(bx + a) \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - at + b}{1 - bx - a} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{at - b - bx - a} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - bt - a}{1 - bx - a} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{bt + a - bx - a} + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - at + b}{1 - bx - a} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu(at - b)dt}{1 - (bx + a)(at - b)} \right\} + \\ & + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - bt - a}{1 - bx - a} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu(bt + a)dt}{1 - (bx + a)(bt + a)} + c_3(bx + a), \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (49)$$

С учетом $a + b = 1$, $a - b = c$ и в силу обозначений $\nu_0(x) = \nu(ax - b)$, $\nu_1(x) = \nu(bx + a)$ уравнение (49) запишем в виде

$$\begin{aligned} \nu_1(x) = & A_0(x) \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1 - t}{1 + x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{at - bx - 1} - \int_{-1}^1 \left(\frac{1 + t}{1 + x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu_1(t)dt}{t - x} + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - c(at - b)}{b(1 + x)} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{1 - (bx + a)(at - b)} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1 - c(bt + a)}{b(1 + x)} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu_1(t)dt}{1 - (bx + a)(bt + a)} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_0(bx + a) \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{1+b-at}{b(1-x)} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{\nu_1(t)dt}{t-x} + \right. \\
& \left. + \int_{-1}^1 \left(\frac{1+b-at}{b(1-x)} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{1-(bx+a)(at-b)} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu_1(t)dt}{1-(bx+a)(bt+a)} \right\} + c_3(bx+a).
\end{aligned} \tag{50}$$

С учетом равенства

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1-c(bt+a)}{b(1+x)} \right)^{1-2\beta} = \left(\frac{1-c(bt+a)}{b(1+t)} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} = \\
& = \left[\left(\frac{1-c(bt+a)}{b(1+t)} \right)^{1-2\beta} - 1 + 1 \right] \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} = \\
& = \left[\left(\frac{1-c(bt+a)}{b(1+t)} \right)^{1-2\beta} - 1 \right] \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} + \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta}
\end{aligned}$$

уравнение (50) примет вид

$$\begin{aligned}
\nu_1(x) = & A_0(bx + a) \left\{ - \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \nu_1(t)dt + \right. \\
& + \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1-t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} \Big\} + B_0(bx + a) \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\beta} \times \right. \\
& \times \left(\frac{1}{t-x} + \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \nu_1(t)dt + \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} \Big\} + H_0[\nu_0] + H_1[\nu_1] + c_3(bx+a), \tag{51}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
H_0[\nu_0] = & A_0(bx + a) \int_{-1}^1 \left(\frac{1-c(at-b)}{b(1+x)} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{1-(bx+a)(at-b)} + \\
& + B_0(bx+a) \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1+b-at}{b(1-x)} \right)^{1-2\beta} - 1 \right] \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1-at+b}{b(1-x)} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{1-(bx+a)(at-b)}, \\
H_1[\nu_1] = & \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1-c(bt+a)}{b(1+t)} \right)^{1-2\beta} - 1 \right] \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{b\nu_1(t)dt}{1-(bx+a)(bt+a)}
\end{aligned}$$

— регулярные операторы.

Используя тождество

$$\left(\frac{1-t}{1-x} \right) \left(\frac{1}{t-x} + \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) = \left(\frac{1+a+bt}{1+a+bx} \right) \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right),$$

и введя обозначения $A_1(x) = A_0(bx + a)$, $B_1(x) = B_0(bx + a)$,

$$K(x, t) = \left[A_0(bx + a) - B_0(bx + a) \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1+x}{1+t} \right)^{1-2\beta} \frac{1+a+bt}{1+a+bx} \right],$$

уравнение (51) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \nu_1(x) + \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) K(x, t) \nu_1(t) dt = \\ & = A_1(x) \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1-t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + B_1(x) \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + H_0[\nu_0] + H_1[\nu_1] + C_4(x). \end{aligned} \quad (52)$$

В (52) выделяя характеристическую часть уравнения, имеем

$$\begin{aligned} & \nu_1(x) + K(x, x) \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \nu_1(t) dt = \\ & = A_1(-1) \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1-t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + B_1(-1) \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + H_0^*[\nu_0] + H_1^*[\nu_1] + C_4(x), \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} H_1^*[\nu_1] &= H_1[\nu_1] - \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) (K(x, t) - K(x, x)) \nu_1(t) dt, \\ H_0^*[\nu_0] &= H_0[\nu_0] + (A_1(x) - A_1(-1)) \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1-t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + \\ & \quad + (B_1(x) - B_1(-1)) \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} \end{aligned}$$

— регулярный оператор.

Уравнение (53) характерно тем, что:

а) несуммируемая часть ядра уравнения имеет сдвиги некарлемановского типа $bx + a$ и $bt + a$;

б) ядра интегральных операторов правой части уравнения являются несуммируемыми, так как они имеют изолированные особенности первого порядка в точке $(x, t) = (-1, 1)$ (где $a + b = 1$) и поэтому эти операторы выделены отдельно.

3.5. Регуляризация нестандартного сингулярного интегрального уравнения (53).

Временно считая правую часть уравнения (53) известной функцией, запишем его в виде

$$\nu_1(x) + C_1(x) \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \nu_1(t) dt = g_1(x), \quad (54)$$

где

$$C_1(x) = K(x, x) = \frac{\lambda_1 \cos(\beta\pi) [a_0(bx + a) - b_0(bx + a)]}{\pi [\mu_1(bx + a)d_0(bx + a) + \lambda_1 \sin(\beta\pi)a_0(bx + a) + \lambda_1 \sin(\beta\pi)b_0(bx + a)]},$$

$$g_1(x) = A_1(-1) \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{b} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1-t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} +$$

$$+B_1(-1) \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + H_0^*[\nu_0] + H_1^*[\nu_1] + C_4(x). \quad (55)$$

Уравнение (54) является сингулярным интегральным уравнением Трикоми со сдвигом. Имеет место

Лемма 2. Если $g_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x \in I$ и $g_1(x) \in L_p(I)$, $p > 1$, решение уравнения (54) в классе функций $H(I)$, в котором $(1+x)^{1-2\beta}\nu(x)$ ограничена на левом конце и может быть неограниченной на правом конце интервала I , выражается формулой

$$\begin{aligned} \nu_1(x) = & \frac{g_1(x)}{1+\pi^2 C_1^2(x)} - \frac{\pi C_1(x)}{1+\pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\pi C_1(x)i}{1+\pi C_1(t)i} \right) \frac{\delta^*(x)}{\delta^*(t)} \left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)} \right)^{\delta_0} \times \\ & \times \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{4\alpha-\delta_0} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{2\delta_1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) g_1(t)dt, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\delta_0 = \arctg(\pi C_1(-1))/\pi$, $\delta_1 = \arctg(\pi C_1(1))/\pi$ и на концах $x = -1$ и $x = 1$ интервала I , соответственно, может иметь особенности не более порядка $4\alpha - \alpha_0$ и $2\alpha_1$ соответственно, где $\alpha = (1-2\beta)/4$.

Лемма 2 доказывается аналогично методу работ [14]–[18].

3.6. Вывод второго интегрального уравнения с ядром, имеющим изолированную особенность первого порядка (на основе нелокального условия (6)). Выражение для $g_1(x)$ из (55) подставляя в (56) и выделив сингулярную часть уравнения (интегралов, ядра которых имеют особенности первого порядка), получаем

$$\begin{aligned} \nu_1(x) = & \frac{A_1(-1)K^{4\alpha}}{1+\pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-t}{1+x} \right)^{4\alpha} \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} + \frac{B_1(-1)}{1+\pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(t)dt}{at-bx-1} - \\ & - \frac{A_1(-1)K^{4\alpha}C_1(x)}{1+\pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \left(\frac{(1-s)^{4\alpha}a\nu_0(s)ds}{(1+x)^{4\alpha-\delta_0}(1-x)^{2\delta_1}} \right)^{4\alpha} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{2\delta_1}}{(1+t)^{\delta_0}} \times \\ & \times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as-bt-1} - \frac{B_1(-1)C_1(x)}{1+\pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(s)ds}{(1+x)^{4\alpha-\delta_0}(1-x)^{2\delta_1}} \times \\ & \times \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{2\delta_1}}{(1+t)^{\delta_0-4\alpha}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as-bt-1} + \overline{H}_0^+[\nu_0] + H_1^+[\nu_1] + F(x), \end{aligned} \quad (57)$$

где $H_1^+[\nu_1]$,

$$\begin{aligned} \overline{H}_0^+[\nu_0] = & \frac{1}{1+\pi^2 C_1^2(x)} H_0^+[\nu_0] - \frac{A_1(-1)K^{4\alpha}C_1(x)}{1+\pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^{4\alpha}a\nu_0(s)ds}{(1+x)^{4\alpha-\delta_0}(1-x)^{2\delta_1}} \times \\ & \times \int_{-1}^1 \left[\frac{(1+i\pi C_1(x))\delta^*(x)}{(1+i\pi C_1(t))\delta^*(t)} \left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)} \right)^{\delta_0} - 1 \right] \frac{(1-t)^{2\delta_1}}{(1+t)^{\delta_0}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \times \end{aligned}$$

$\times \frac{dt}{as - bt - 1} - \frac{B_1(-1)C_1(x)}{1 + \pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(s)ds}{(1+x)^{4\alpha-\delta_0}(1-x)^{2\delta_1}} \int_{-1}^1 \left[\frac{(1+i\pi C_1(x))\delta^*(x)}{(1+i\pi C_1(t))\delta^*(t)} \times \right.$
 $\times \left. \left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)} \right)^{\delta_0} - 1 \right] \frac{(1-t)^{2\delta_1}}{(1+t)^{\delta_0-4\alpha}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as - bt - 1}$
 — регулярные операторы, $F(x)$ — известная функция.

Вычислим внутренние интегралы в (57):

$$A(x, s) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{2\delta_1}}{(1+t)^{\delta_0-4\alpha}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as - bt - 1},$$

$$B(x, s) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^{2\delta_1}}{(1+t)^{\delta_0}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as - bt - 1}.$$

Вычислим более общий интеграл, из которого получается $A(x, s)$ и $B(x, s)$:

$$M(x, s) = \int_{-1}^1 (1+t)^{m-1}(1-t)^{n-1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as - bt - 1}, \quad (58)$$

где $m, n > 0$ — постоянные.

Разложим рациональную часть подынтегрального выражения на простые дроби:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{1}{as - bt - 1} = \frac{1}{as - bx - 1} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{b}{as - bt - 1} \right) - \\
 & - \frac{b}{1-(bx+a)(as-b)} \left(\frac{1}{as - bt - 1} - \frac{bx+a}{1-(bx+a)(bt+a)} \right), \quad (59)
 \end{aligned}$$

в силу (59) равенство (58) запишем в виде

$$M(x, s) = \frac{1}{as - bx - 1} (I_1(x) + bI_2(s)) - \frac{b}{1-(bx+a)(as-b)} (I_2(s) - (bx+a)I_3(x)), \quad (60)$$

имеют место формулы [11]

$$\begin{aligned}
 I_1(x) &= \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{m-1}(1-t)^{n-1}}{t-x} dt = -\frac{\pi \operatorname{ctg}(m\pi)}{(1+x)^{1-m}(1-x)^{1-n}} + \\
 &+ \frac{2^{m-1}B(n, m-1)}{(1-x)^{1-n}} F\left(n, 1-m, 2-m; \frac{1+x}{2}\right), \quad (61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(s) &= \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{m-1}(1-t)^{n-1}}{as - bt - 1} dt = -\frac{\pi}{\sin(m\pi)} \frac{a^{m-1}b^{1-m-n}}{(1+b-as)^{1-n}(1-s)^{1-m}} - \\
 &- \frac{B(n, m-1)}{2^{2-m-n}b} \left(\frac{1+b-as}{2b} \right)^{n-1} F\left(n, 1-m, 2-m; -\frac{a(1-s)}{2}\right), \quad (62)
 \end{aligned}$$

$$I_3(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{m-1}(1-t)^{n-1}}{1-(bx+a)(bt+a)} dt = \frac{2^{m+n-1}B(m, n)}{1-(bx+a)c} F\left(m, 1, m+n; \frac{2b(bx+a)}{1-(bx+a)}\right). \quad (63)$$

В силу (61)–(63) из (60) имеем

$$M(x, s) = \frac{1}{as - bx - 1} \left\{ -\frac{\pi \operatorname{ctg}(m\pi)}{(1+x)^{1-m}(1-x)^{1-n}} + \frac{B(n, m-1)}{2^{2-m-n}} \left[\left(1 - \frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \times \right. \right. \\ \left. \times F\left(n, 1-m, 2-m; \frac{1+x}{2}\right) - \left(1 - \frac{-a(1-s)}{2b}\right)^{n-1} F\left(n, 1-m, 2-m; \frac{-a(1-s)}{2b}\right) \right] - \\ \left. - \frac{\pi}{\sin(m\pi)} \frac{a^{m-1}b^{2-m-n}}{(1+b-as)^{1-n}} \frac{1}{(1-s)^{1-m}} \right\} - \frac{b}{1-(bx+a)(as-b)} (I_2(s) - (bx+a)I_3(x)).$$

Таким образом,

$$M(x, s) = \frac{1}{as - bx - 1} \left[-\frac{\pi \operatorname{ctg}(m\pi)}{(1+x)^{1-m}(1-x)^{1-n}} - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{\sin(m\pi)} K^{m-1} \left(\frac{b}{1+b-as} \right)^{1-n} \frac{1}{(1-s)^{1-m}} \right] + L(m, n; x, s),$$

где $K = a/b$,

$$L(m, n; x, s) = \frac{B(n, m-1)}{2^{2-m-n}(as-bx-1)} \left[\left(1 - \frac{1+x}{2}\right)^{n-1} F\left(n, 1-m, 2-m; \frac{1+x}{2}\right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{-a(1-s)}{2b}\right)^{n-1} F\left(n, 1-m, 2-m; \frac{-a(1-s)}{2b}\right) \right] - \\ - \frac{b}{1-(bx+a)(as-b)} (I_2(s) - (bx+a)I_3(x))$$

— регулярное ядро.

1) Вычислим $A(x, s)$, который получается из $M(x, s)$ при $m = 1 + 4\alpha - \delta_0$, $n = 1 + 2\delta_1$:

$$A(x, s) = \int_{-1}^1 (1+t)^{(1+4\alpha-\delta_0)-1} (1-t)^{(1+2\delta_1)-1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as-bt-1} = \\ = \frac{1}{as-bx-1} \left[-\frac{\pi \operatorname{ctg}((4\alpha-\delta_0)\pi)}{(1+x)^{\delta_0-4\alpha}(1-x)^{-2\delta_1}} - \right. \\ \left. - \frac{\pi K^{4\alpha-\delta_0}}{\sin((4\alpha-\delta_0)\pi)} \left(\frac{b}{1+b-as} \right)^{-2\delta_1} \frac{1}{(1-s)^{\delta_0-4\alpha}} \right] + L(1+4\alpha-\delta_0, 1+2\delta_1; x, s). \quad (64)$$

2) Вычислим $B(x, s)$, который получается из $M(x, s)$ при $m = 1 - \delta_0$, $n = 1 + 2\delta_1$:

$$B(x, s) = \int_{-1}^1 (1+t)^{(1-\delta_0)+1} (1-t)^{(1+2\delta_1)-1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) \frac{dt}{as-bt-1} = \\ = \frac{1}{as-bx-1} \left[-\frac{\pi \operatorname{ctg}((- \delta_0)\pi)}{(1+x)^{\delta_0}(1-x)^{-2\delta_1}} - \right. \\ \left. - \frac{\pi K^{-\delta_0}}{\sin((\delta_0)\pi)} \left(\frac{b}{1+b-as} \right)^{-2\delta_1} \frac{1}{(1-s)^{\delta_0}} \right] + L(1-\delta_0, 1+2\delta_1; x, s). \quad (65)$$

Теперь подставляя (64), (65) в (57), получим

$$\begin{aligned}
\nu_1(x) = & \frac{A_1(-1)K^{4\alpha}}{1 + \pi^2 C_1^2(x)} \left(1 - \pi \operatorname{ctg}(\delta_0 \pi) C_1(x)\right) \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x}\right)^{4\alpha} \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} + \\
& + \frac{B_1(-1)}{1 + \pi^2 C_1^2(x)} \left(1 - \pi \operatorname{ctg}((4\alpha - \delta_0)\pi) C_1(x)\right) \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} + \\
& + \frac{A_1(-1)K^{4\alpha - \delta_0} \pi C_1(x)}{\sin(\delta_0 \pi)(1 + \pi^2 C_1^2(x))} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x}\right)^{4\alpha - \delta_0} \left(\frac{1+b-as}{b(1-x)}\right)^{2\delta_1} \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} - \\
& - \frac{B_1(-1)K^{4\alpha - \delta_0} \pi C_1(x)}{\sin((4\alpha - \delta_0)\pi)(1 + \pi^2 C_1^2(x))} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x}\right)^{4\alpha - \delta_0} \left(\frac{1+b-as}{b(1-x)}\right)^{2\delta_1} \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} - \\
& - \frac{A_1(-1)K^{4\alpha} C_1(x)}{1 + \pi^2 C_1^2(x)} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^{4\alpha} L(1 - \delta_0, 1 + 2\delta_1; x, s) a\nu_0(s)ds}{(1+x)^{4\alpha - \delta_0} (1-x)^{2\delta_1}} - \\
& - \frac{B_1(-1)K^{4\alpha - \delta_0} \pi C_1(x)}{\sin(4\alpha - \delta_0)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x}\right)^{4\alpha - \delta_0} \left(\frac{1+b-as}{b(1-x)}\right)^{2\delta_1} \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} + \\
& + L(1 + 4\alpha - \delta_0, 1 + 2\delta_1; x, s) + L(1 - \delta_0, 1 + 2\delta_1; x, s) + \overline{H_0}^+[\nu_0] + H_1^+[\nu_1] + F(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (66)
\end{aligned}$$

Пусть $\delta_0 = \operatorname{arctg}(\pi C_1(-1))/\pi = 2\alpha$, выполнены условия (18), тогда $C_1(-1) = \operatorname{tg}(2\alpha\pi)/\pi$. Следовательно,

$$(1 - \pi \operatorname{ctg}(\delta_0 \pi) C_1(x)) \Big|_{x=-1} = (1 - \pi \operatorname{ctg}(2\alpha\pi) C_1(-1)) = 0,$$

также

$$(1 - \pi \operatorname{ctg}(4\alpha - \delta_0) C_1(x)) \Big|_{x=-1} = 1 - \pi \operatorname{ctg}(2\alpha\pi) C_1(-1) = 0.$$

В силу этих равенств и с учетом $\delta_0 = 2\alpha$ уравнение (66) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\nu_1(x) = & \frac{(A_1(-1) - B_1(-1))K^{2\alpha} \pi C_1(x)}{\sin(2\alpha\pi)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1+b-as}{b(1-x)}\right)^{2\delta_1} \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} + \\
& + R_{01}[\nu_0] + R_1[\nu_1] + F(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (67)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{01}[\nu_0] = & \frac{A_1(-1)K^{4\alpha}}{1 + \pi^2 C_1^2(x)} \left(1 - \pi \operatorname{ctg}(2\alpha\pi) C_1(x)\right) \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x}\right)^{4\alpha} \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} + \\
& + \frac{B_1(-1)}{1 + \pi^2 C_1^2(x)} \left(1 - \pi \operatorname{ctg}(2\alpha\pi) C_1(x)\right) \int_{-1}^1 \frac{a\nu_0(s)ds}{as - bx - 1} + \overline{H_0}^+[\nu_0].
\end{aligned}$$

В уравнении (67) выделив сингулярную часть уравнения, запишем его в виде

$$\nu_1(x) = \frac{(A_1(-1) - B_1(-1))C_1(-1)K^{2\alpha}\pi}{\sin(2\alpha\pi)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x} \right)^{2\alpha} \frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1} + R_0[\nu_0] + R_1[\nu_1] + F(x), \quad (68)$$

где

$$R_0[\nu_0] = R_{01}[\nu_1] + \frac{(A_1(-1) - B_1(-1))K^{2\alpha}\pi}{\sin(2\alpha\pi)} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-s}{1+x} \right)^{2\alpha} \times \\ \times \left[\left(\frac{1+b-as}{b(1-x)} \right)^{2\delta_1} C_1(x) - C_1(-1) \right] \frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1}.$$

Уравнение (68) является вторым уравнением между неизвестными функциями $\nu_0(x)$ и $\nu_1(x)$, которое получено на основе условия смещения (6).

3.7. Вывод и исследование интегрального уравнения Винера–Хопфа. В уравнении (44) переменную $x \in (-1, 1)$ поменяв на $-x \in (-1, 1)$, а в уравнении (68) переменную $s \in (-1, 1)$ — на $-s \in (-1, 1)$, запишем

$$\tilde{\nu}_0(x) = A^* \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{1+x} \right)^{\delta_1} \frac{b\nu_1(s)ds}{1+bs+ax} + T_2^*[\nu_1] + \Phi_3(-x), \quad (69)$$

$$\nu_1(x) = B^* \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{1+x} \right)^{2\alpha} \frac{a\tilde{\nu}_0(s)ds}{1+as+bx} + R_0^*[\nu_0] + R_1[\nu_1] + F(x), \quad (70)$$

где $\tilde{\nu}_0(x) = \nu_0(-x)$,

$$A^* = \frac{\pi^2 B_1^2(-1)}{(A_1^2(1) + \pi^2 B_1^2) \sin(\delta_1 \pi)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\delta_1}, \quad B^* = \frac{(B_1(-1) - A_1(-1))C_1(-1)K^{2\alpha}\pi}{\sin(2\alpha\pi)}.$$

В (70) введя обозначения

$$m(y) = \frac{A^* y^{-\delta_1}}{1 + \frac{a}{b}y}, \quad n(y) = \frac{B^* y^{-2\alpha}}{1 + \frac{b}{a}y}, \quad (71)$$

уравнения (69), (70) запишем в виде

$$\tilde{\nu}_0(x) = \int_{-1}^1 m \left(\frac{1+x}{1+s} \right) \frac{\nu_1(s)}{1+s} ds + T_2^*[\nu_1] + \bar{\Phi}_3(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (72)$$

$$\nu_1(x) = \int_{-1}^1 n \left(\frac{1+x}{1+s} \right) \frac{\tilde{\nu}_0(s)}{1+s} dt + R_0^*[\tilde{\nu}_0] + R_1[\nu_1] + F(x), \quad x \in (-1, 1). \quad (73)$$

Здесь $T_2^*[\nu_1]$ получается из $T_2[\nu_1]$ заменой x на $-x$, $T_2^*[\nu_1]$, $R_0^*[\tilde{\nu}_0]$ — регулярные операторы, $\bar{\Phi}_3(x) = \Phi_3(-x)$, $F(x)$ — известные функции.

Таким образом, мы получили систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{\nu}_0(x)$ и $\nu_1(x)$ с нефредгольмовыми интегральными операторами.

Характерной особенностью уравнения (72) является то, что оно разрешено относительно $\tilde{\nu}_0(x)$, что позволяет из (73) исключить $\tilde{\nu}_0(x)$. Подставляя (72) в (73), имеем

$$\nu_1(x) = \int_{-1}^1 \frac{\nu_1(t)dt}{1+t} \int_{-1}^1 n\left(\frac{1+x}{1+s}\right) m\left(\frac{1+s}{1+t}\right) \frac{ds}{1+s} + \Phi[\nu_1], \quad (74)$$

где

$$\Phi[\nu_1] = F(x) + \int_{-1}^1 n\left(\frac{1+x}{1+s}\right) \frac{\bar{\Phi}_3(s)}{1+s} ds + \int_{-1}^1 n\left(\frac{1+x}{1+s}\right) \frac{T_2^*[\nu_1]}{1+s} ds + R_0^*[\tilde{\nu}_0] + R_1[\nu_1]$$

— регулярный оператор. Продолжим исследование уравнения (74):

$$\nu_1(x) = \int_{-1}^1 \Omega(x, t) \frac{\nu_1(t)dt}{1+t} + \Phi[\nu_1], \quad (75)$$

где

$$\Omega(x, t) = \int_{-1}^1 n\left(\frac{1+x}{1+s}\right) m\left(\frac{1+s}{1+t}\right) \frac{ds}{1+s}. \quad (76)$$

Сделаем в (76) замену переменного интегрирования $r = (1+s)/(1+t)$, получим

$$\Omega(x, t) = \int_0^{\frac{2}{1+t}} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r} = \Omega_1(x, t) - \Omega_2(x, t),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1(x, t) &= \int_0^{\infty} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r}, \\ \Omega_2(x, t) &= \int_{\frac{2}{1+t}}^{\infty} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (77)$$

Оценим сначала $\Omega_2(x, t)$. В силу (71) имеем оценки

$$n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) \leq B^* \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\alpha} r^{2\alpha}, \quad m(r) \leq A^* r^{-1-\delta_1},$$

учитывая которые из второго интеграла (77) получаем

$$\Omega_2(x, t) = \int_{\frac{2}{1+t}}^{\infty} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r} \leq \frac{A^* B^*}{\delta_1 - 2\alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta_1 - 2\alpha} (1+x)^{-2\alpha} (1+t)^{1+\delta_1},$$

следовательно, $\Omega_2(x, t)/(1+t)$ — регулярное ядро. Поэтому уравнение (75) можно записать в виде

$$\nu_1(x) = \int_{-1}^1 \Omega_1(x, t) \frac{\nu_1(t)dt}{1+t} + \Phi_1[\nu_1], \quad (78)$$

где

$$\Phi_1[\nu_1] = \Phi[\nu_1] - \int_{-1}^1 \frac{\Omega_2(x, t)}{1+t} \nu_1(t) dt$$

— регулярный оператор.

Вычислим теперь первый интеграл из (77):

$$\Omega_1(x, t) = \int_0^\infty n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r} = \int_0^\infty n\left(\frac{y}{r}\right) \frac{m(r)}{r} dr,$$

где $y = (1+x)/(1+t)$. Отсюда в силу (71) получим

$$\Omega_1(x, t) = A^* B^* y^{-2\alpha} ab \int_0^\infty \frac{r^{2\alpha-\delta_1} dr}{(ar+yb)(b+ay)} = \frac{A^* B^* a}{y^{2\alpha}(1-y)} \left(\int_0^\infty \frac{r^{2\alpha-\delta_1} dr}{(ar+yb)} - \int_0^\infty \frac{r^{2\alpha-\delta_1} dr}{(b+ar)} \right).$$

Имеем

$$\Omega_1(x, t) = \frac{A^* B^* \pi (y^{2\alpha-\delta_1} - 1)}{\sin((2\alpha - \delta_1)\pi) y^{2\alpha} (y - 1)}. \quad (79)$$

Поэтому согласно (79) уравнение (78) запишется в виде

$$\psi(x) = \frac{A^* B^* \pi}{\sin((2\alpha - \delta_1)\pi)} \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{2\alpha-\delta_1} - 1}{\frac{1+x}{1+t} - 1} \frac{\psi(t)}{1+t} dt + \Phi_2[\psi], \quad x \in J, \quad (80)$$

где

$$\psi(x) = (1+x)^{2\alpha} \nu_1(x), \quad \Phi_2[\psi] = (1+x)^{2\alpha} \Phi_1[(1+x)^{-2\alpha} \psi(x)].$$

В (80) сделаем замену переменных $1+t = 2 \exp(-s)$, $1+x = 2 \exp(-y)$ и введем обозначения $\rho(y) = \psi(2 \exp(-y) - 1) \exp(((2\alpha - \delta_1 - 1)/2)y)$,

$$K(x) = \frac{A^* B^* \sqrt{2\pi^3}}{\sin((2\alpha - \delta_1)\pi)} \frac{\operatorname{sh}((2\alpha - \delta_1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}.$$

Тогда уравнение (80) запишется в виде

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K(y-s) \rho(s) ds + \Phi_3[\rho]. \quad (81)$$

Уравнение (81) является интегральным уравнением Винера–Хопфа [19]. Функция $K(x)$ имеет показательный порядок убывания на бесконечности, причем $K'(x) \in C[0, \infty)$.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки применимы лишь в одном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю [19], индекс χ уравнения (81) совпадает с индексом выражения $1 - K^\wedge(x)$, взятым с обратным знаком, т. е. $\chi = -\operatorname{Ind}(1 - K^\wedge(x))$, где

$$K^\wedge(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} K(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (\cos(xt) + i \sin(xt)) K(t) dt,$$

с учетом четности функции $K(x)$ и формулы

$$\int_0^\infty \cos(\alpha t) \frac{\operatorname{sh}(\beta t)}{\operatorname{sh}(\gamma t)} dt = \frac{\pi}{2\gamma} \frac{\sin(\beta\pi/\gamma)}{\operatorname{ch}(\alpha\pi/\gamma) + \cos(\beta\pi/\gamma)}$$

нетрудно убедиться в том, что

$$K^\wedge(x) = \frac{2A^*B^*\pi}{\sin((2\alpha - \delta_1)\pi)} \int_0^\infty \cos(xt) \frac{\operatorname{sh}((2\alpha - \delta_1)t/2)}{\operatorname{sh}(t/2)} dt =$$

$$= \frac{2A^*B^*\pi^2 \sin((2\alpha - \delta_1)\pi)}{\operatorname{ch}(2\pi x) - \cos((2\alpha - \delta_1)\pi)} = \frac{2 \sin^2((\delta_1)\pi)}{\operatorname{ch}(2\pi x) - \cos((2\alpha - \delta_1)\pi)} < \frac{1}{\operatorname{ch}(2\pi x) - \cos((2\alpha - \delta_1)\pi)} < 1.$$

Следовательно, индекс χ уравнения (81), т. е. изменение аргумента функции $1 - K^\wedge(x) > 0$ на действительной оси, выраженной в полных оборотах с обратным знаком [19], имеет вид

$$\chi = -\operatorname{Ind}(1 - K^\wedge(x)) = -\frac{1}{2\pi} \left[\arg(1 - K^\wedge(x)) \right]_{-\infty}^\infty =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(1 - K^\wedge(x))}{\operatorname{Re}(1 - K^\wedge(x))} \right]_{-\infty}^\infty = -\frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{0}{\operatorname{Re}(1 - K^\wedge(x))} \right]_{-\infty}^\infty = 0.$$

Уравнение (81) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи ТЖНК. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трикоми Ф. *О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа* (Гостехиздат, М.-Л., 1947).
- [2] Смирнов М.М. *Уравнение смешанного типа* (Выш. шк., М., 1985).
- [3] Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии, Учен. зап. Казанск. ун-та **122** (3), 3–16 (1962).
- [4] Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа, Дифференц. уравнения **5** (1), 44–59 (1969).
- [5] Каратопраклиев Г.Д. Об одном обобщении задачи Трикоми, Докл. АН СССР **158** (2), 271–274 (1964).
- [6] Morawetz C.S. A uniqueness theorem for the Frankl's problem, Comm. Pure and Appl. Math. **7** (4), 697–703 (1954).
- [7] Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного типа* (Физматлит, М., 2014).
- [8] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).
- [9] Сабитов К.Б. К теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа, Изв. вузов. Матем. (1), 101–138 (2017).
- [10] Полосин А.А. Об однозначной разрешимости задачи Трикоми для специальной области, Дифференц. уравнения **32** (3), 394–401 (1996).
- [11] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами* (Университет, Ташкент, 2005).
- [12] Мирсабуров М., Мирсабурова Г.М. Задача Трикоми–Нахушева, Дифференц. уравнения **48** (1), 55–63 (2012).
- [13] Мирсабуров М., Бегалиев О., Хуррамов Н.Х. Об одном обобщении задачи Трикоми, Дифференц. уравнения **55** (8), 1117–1126 (2019).
- [14] Михлин С.Г. Об интегральном уравнении *F. TRIKOMI*, ДАН СССР **59** (6), 1053–1056 (1948).
- [15] Мирсабуров М., Чориева С. Об одной задаче со смещением для вырождающегося уравнения смешанного типа, Изв. вузов. Матем. (4), 46–54 (2015).
- [16] Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х. Задача с локальными и нелокальными условиями на границе области эллиптичности для уравнения смешанного типа, Изв. вузов. Матем. (12), 80–93 (2021).
- [17] Мирсабуров М., Эргашева С.Б. Задача в неограниченной области с условием Франкля на отрезке линии вырождения и с недостающим условием Геллерстедта для одного класса уравнений смешанного типа, Изв. вузов. Матем. (8), 35–44 (2023).
- [18] Мирсабуров М., Тураев Р.Н. Задача в неограниченной области с комбинированными условиями Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике для одного класса уравнений смешанного типа, Изв. вузов. Матем. (12), 39–52 (2023).
- [19] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки* (Наука, М., 1978).

Мирахмат Мирсабуров

*Термезский государственный университет,
ул. Баркамол авлод, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,*

e-mail: mirsaburov@mail.ru

Бобур Бахтиёрович Амонов

*Термезский государственный университет,
ул. Баркамол авлод, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,*

e-mail: amonovbobur91@mail.ru

M. Mirsaburov and B.B. Amonov

Combined problem with local and non-local conditions and with general conjugation conditions for the Gellerstedt equation with a singular coefficient

Abstract. In the Tricomi problem, the value of the desired function is specified at all points of the boundary characteristic. In this paper, we study the correctness of the problem where part of the boundary characteristic is freed from the boundary condition and this missing Tricomi condition is replaced by a nonlocal condition with displacement on the internal characteristic and on the part of the boundary characteristic. On the degeneracy segment, a general conjugation condition is specified.

Keywords: missing Tricomi condition, condition with displacement on the internal characteristic and on the part of the boundary characteristic, extremum principle, uniqueness of the solution, existence of the solution.

Mirakhmat Mirsaburov

*Termez State University,
43 Barkamol avlod str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: mirsaburov@mail.ru

Bobur Baxtiyorovich Amonov

*Termez State University,
43 Barkamol avlod str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: amonovbobur91@mail.ru