

Д. ДРИХЕМ

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОБЩИМИ ВЕСАМИ

Аннотация. Цель данной статьи имеет двойной смысл. Во-первых, с помощью φ -преобразования устанавливаются характеристики пространств Бесова $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и пространств Трибеля–Лизоркина $\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ для $q = \infty$ в смысле М. Фрейзера и Б. Джауэрта. Во-вторых, при некоторых подходящих предположениях о p -допустимой весовой последовательности $\{t_k\}$ доказывается, что

$$\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

в смысле эквивалентных квазинорм, где $\dot{A} \in \{\dot{B}, \dot{F}\}$. Более того, находятся необходимые и достаточные условия для совпадения пространств $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_i), i \in \{1, 2\}$.

Ключевые слова: пространство Бесова, пространство Харди, пространство Трибеля–Лизоркина, класс Мукенхаупта.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-12-40-70

ВВЕДЕНИЕ

Функциональные пространства обобщенной гладкости были введены несколькими авторами. Мы ссылаемся, например, на работы [1]–[4] (см. также [5]).

О.В. Бесов [6]–[8] определил функциональные пространства переменной гладкости и получил их характеристики через разности, интерполяцию, вложения и расширения. Такие пространства являются частным случаем так называемых 2-микролокальных функциональных пространств. Концепция 2-микролокального анализа или 2-микролокальных функциональных пространств принадлежит Дж.М. Бони [9]. Эти типы функциональных пространств были подробно изучены в [10].

О. Домингес и С. Тихонов [11] рассмотрели функциональные пространства с логарифмической гладкостью (Бесова, Соболева, Трибеля–Лизоркина), включая различные новые характеристики для норм Бесова в терминах различных точных оценок норм Бесова производных и потенциальных операторов (потенциалы Рисса и Бесселя) через нормы самих функций и точных вложений между пространствами Бесова, определенными через разности и через фурье-аналитические разложения, а также между пространствами Бесова и Соболева/Трибеля–Лизоркина.

Более общие пространства Бесова с переменной гладкостью были подробно изучены Дж.Л. Ансороной и О. Бласко [12], включая атомарное разложение. Вейвлет-разложение

Поступила в редакцию 25.08.2023, после доработки 16.07.2025. Принята к публикации 26.09.2025.

Благодарности. Работа поддержана Главным управлением высшего образования и подготовки кадров в рамках гранта № С00L03UN280120220004 и Главным управлением научных исследований и технологического развития, Алжир.

(относительно базиса вейвлетов с компактным носителем типа Добеши) неоднородных пространств Бесова обобщенной гладкости было получено А. Алмейдой [13].

Более общие функциональные пространства обобщенной гладкости можно найти в [14]–[16], а также в указанных там ссылках.

Теория пространств обобщенной гладкости получила значительное развитие отчасти благодаря своей полезности в приложениях. Например, они появляются в изучении следовых пространств на фракталах [17], [18]. В этих работах введены пространства $B_{p,q}^{s,\Psi}$, где Ψ является так называемой допустимой функцией, обычно логарифмического типа вблизи 0. Для полного рассмотрения этих пространств мы отсылаем читателей к работе С.Д. Моуры [19].

А.И. Тюленев в [20] ввел новое семейство пространств Бесова с переменной гладкостью, охватывающее многие классы пространств Бесова, где норма определена с помощью классических разностей.

В [21], [22] автор ввел пространства Бесова $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и пространства Трибеля–Лизоркина $\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ с общей гладкостью и представил некоторые их свойства такие, как характеристика через φ -преобразование в смысле Фрейзера и Джауэрта, гладкие атомарные, молекулярные и вейвлет-разложения, а также характеристика пространств Бесова $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ в терминах разностных соотношений. Также были приведены вложения типа Соболева. Все эти исследования были ограничены конечными показателями q .

Цель настоящей работы — расширить результаты [22] на случай $q = \infty$. Кроме того, в работе представлены некоторые свойства пространств $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ такие, как характеристика этих пространств через φ -преобразование в смысле Фрейзера и Джауэрта. Более точно, при некоторых подходящих предположениях о p -допустимой весовой последовательности $\{t_k\}$ доказывается, что

$$\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

в смысле эквивалентных квазинорм. С помощью этого результата даны некоторые замечания о взвешенных пространствах Харди. Также доказываются достаточные и необходимые условия на $\{t_k\}$ и $\{w_k\}$ для обеспечения вложения

$$\dot{A}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \hookrightarrow \dot{A}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\}), \quad 0 < \theta \leq p_0 < p_1 < \infty, \quad (2)$$

где $0 < q \leq r < \infty$ в случае пространств $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Более того, доказано совпадение пространств $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_i)$, $i \in \{1, 2\}$, что, вероятно, не представлено в существующей литературе. Все результаты этой статьи могут быть расширены на неоднородные пространства Бесова и Трибеля–Лизоркина с общими весами.

На протяжении всей статьи через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n -мерное вещественное евклидово пространство, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, а $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Буква $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел. Запись $f \lesssim g$ означает, что $f \leq c g$ для некоторой независимой константы c (и неотрицательных функций f и g), а $f \approx g$ означает, что $f \lesssim g \lesssim f$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ через $B(x, r)$ обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в x и радиусом r . Под $\text{supp } f$ будем понимать носитель функции f , т. е. замыкание ее множества ненулевых значений.

Если $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, то $|E|$ обозначает (лебегову) меру E , а χ_E — его характеристическую функцию. Через c будем обозначать произвольные положительные константы, которые могут принимать разные значения в разных случаях.

Вес — это неотрицательная локально интегрируемая функция на $\mathbb{R}^n$, которая принимает значения в $(0, \infty)$ почти всюду. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и веса γ через $\gamma(E)$

обозначим

$$\int_E \gamma(x) dx.$$

Для заданного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и $0 < p \leq \infty$ $L_p(E)$ — пространство всех функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$, оснащенное квазинормой

$$\|f|_{L_p(E)}\| := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

при $0 < p < \infty$ и

$$\|f|_{L_\infty(E)}\| := \operatorname{ess-sup}_{x \in E} |f(x)| < \infty.$$

Для $0 < p < \infty$ пространство $L_{p,\infty}(E)$ определяется как множество всех измеримых функций f на E таких, что

$$\|f|_{L_{p,\infty}(E)}\| := \sup_{\delta > 0} \delta |\{x \in E : |f(x)| > \delta\}|^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть $0 < p, q \leq \infty$. Пространство $L_p(\ell_q)$ определяется как множество всех последовательностей $\{f_k\}$ функций таких, что

$$\|\{f_k\}|_{L_p(\ell_q)}\| := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| < \infty,$$

с обычными модификациями, если $q = \infty$. Аналогично, пространство $L_{p,\infty}(\ell_q)$ определяется как множество всех последовательностей функций $\{f_k\}$ таких, что

$$\|\{f_k\}|_{L_{p,\infty}(\ell_q)}\| := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \right\| < \infty,$$

с обычными модификациями, если $q = \infty$. Для функции f из $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ определим

$$M_A(f) := \frac{1}{|A|} \int_A |f(x)| dx$$

для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Далее введем

$$M_{A,p}(f) := \left(\frac{1}{|A|} \int_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $0 < p < \infty$. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и веса γ обозначим пространство всех функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной квазинормой

$$\|f|_{L_p(E, \gamma)}\| := \|f\gamma|_{L_p(E)}\|$$

как $L_p(E, \gamma)$.

Если $1 \leq p \leq \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то p' называется сопряженной степенью к p .

Символ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ используется для обозначения множества всех функций Шварца на $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем Q будет обозначать куб в пространстве $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными координатным осям, а $l(Q)$ — длину стороны куба Q . Для $v \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ через $Q_{v,m}$ обозначим диадический куб

$$Q_{v,m} := 2^{-v}([0, 1)^n + m).$$

Семейство всех таких кубов $\mathcal{Q} := \{Q_{v,m} : v \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n\}$. Кроме того, через x_Q обозначим нижний левый угол $2^{-v}m$ куба $Q = Q_{v,m}$. Определим преобразование Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В разделе 2 статьи представлены некоторые предварительные сведения и основные факты о классах Мукенхаупта и взвешенном классе Тюленева. Также приводятся ключевые технические леммы, необходимые для доказательства основных утверждений, в частности, представлена новая версия взвешенного векторнозначного максимального неравенства Феффермана и Стайна. В разделе 3 получены несколько базовых свойств пространств $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и $\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ таких, как характеристики через φ -преобразование в смысле Фрейзера и Джауэрта, играющие важную роль в данной работе. Также установлены утверждения (1) и (2) и приведены некоторые результаты о взвешенных пространствах Харди.

1. МАКСИМАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Аргументация в этой работе в основном опирается на взвешенную ограниченность максимальной функции Харди–Литтлвуда. Предполагается, что последовательность весов $\{t_k\}$, используемая для определения пространства $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, принадлежит новому взвешенному классу $\dot{X}_{\alpha,\sigma,p}$ (см. определение 3). Поэтому требуется новая версия неравенства Харди–Литтлвуда.

1.1. Веса Мукенхаупта. Цель этого подраздела — рассмотреть некоторые известные свойства класса Мукенхаупта.

Определение 1. Пусть $1 < p < \infty$. Говорят, что вес γ принадлежит классу Мукенхаупта $A_p(\mathbb{R}^n)$, если существует константа $C > 0$ такая, что для каждого куба Q выполняется неравенство

$$M_Q(\gamma) M_{Q, \frac{p'}{p}}(\gamma^{-1}) \leq C. \quad (3)$$

Наименьшая константа C , для которой выполняется (3), обозначается как $A_p(\gamma)$. В качестве примера можно взять

$$\gamma(x) = |x|^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, если и только если $-n < \alpha < n(p-1)$.

Для $p = 1$ вышеуказанное определение переписывается следующим образом.

Определение 2. Говорят, что вес γ принадлежит классу Мукенхаупта $A_1(\mathbb{R}^n)$, если существует константа $C > 0$ такая, что для каждого куба Q и почти для всех $y \in Q$ выполняется неравенство

$$M_Q(\gamma) \leq C\gamma(y). \quad (4)$$

Наименьшая константа C , для которой выполняется (4), обозначается как $A_1(\gamma)$. Эти классы впервые были изучены Б. Мукенхауптом [23] и используются для характеристики ограниченности максимальной функции Харди–Литтлвуда на $L^p(\mathbb{R}^n, \gamma)$ (см. [24], [25] для полного изложения теории весов Мукенхаупта).

Лемма 1. Пусть $1 \leq p < \infty$.

- i) Если $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^n)$, то для любого $1 \leq p < q$ имеем $\gamma \in A_q(\mathbb{R}^n)$.
- ii) Если $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^n)$, то для любого $0 < \varepsilon \leq 1$ имеем $\gamma^\varepsilon \in A_p(\mathbb{R}^n)$.
- iii) Предположим, что $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $1 < p < \infty$. Тогда существует $1 < p_1 <$

$p < \infty$ такое, что $\gamma \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$.

iv) Пусть $1 < p < \infty$. $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\gamma^{1-p'} \in A_{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Полезное свойство весов $A_p(\mathbb{R}^n)$ (обратное неравенство Гёльдера, [25], гл. 7) дает

Теорема 1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Тогда существуют константы $C > 0$ и $\varepsilon_\gamma > 0$, зависящие только от n, p и $A_p(\gamma)$ такие, что для любого куба Q

$$M_{Q,1+\varepsilon_\gamma}(\gamma) \leq CM_Q(\gamma).$$

Более того, $\gamma^{1+\varepsilon_\gamma} \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Класс весов $\dot{X}_{\alpha,\sigma,p}$. Пусть $0 < p \leq \infty$. Последовательность весов $\{t_k\}$ называется p -допустимой, если $t_k \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Заметим здесь, что

$$\int_E t_k^p(x) dx < c(k)$$

для любого $k \in \mathbb{Z}$ и любого компактного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ с обычной модификацией для случая $p = \infty$. Для p -допустимой последовательности весов $\{t_k\}$ определим

$$t_{k,m,p} := \|t_k|L_p(Q_{k,m})\|, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

А.И. Тюленев [20], [26], [27] ввел следующий новый класс весов и использовал его для изучения пространств Бесова переменной гладкости.

Определение 3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $p, \sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty]$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Обозначим через $\dot{X}_{\alpha,\sigma,p} = \dot{X}_{\alpha,\sigma,p}(\mathbb{R}^n)$ множество p -допустимых последовательностей весов $\{t_k\}$, удовлетворяющих следующим условиям. Существуют числа $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любых $k \leq j$ и каждого куба Q выполняются неравенства

$$M_{Q,p}(t_k)M_{Q,\sigma_1}(t_j^{-1}) \leq C_1 2^{\alpha_1(k-j)}, \quad (5)$$

$$(M_{Q,p}(t_k))^{-1}M_{Q,\sigma_2}(t_j) \leq C_2 2^{\alpha_2(j-k)}, \quad (6)$$

константы $C_1, C_2 > 0$ не зависят от индексов k и j .

Замечание 1. i) Следует отметить, что если $\{t_k\}$ удовлетворяет (5) с $\sigma_1 = r \left(\frac{p}{r}\right)'$ и $0 < r < p < \infty$, то $t_k^p \in A_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Говорят, что $t_k \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 < p < \infty$, имеют одинаковую константу Мукенхаупта, если

$$A_p(t_k) = c, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где c не зависит от k .

iii) Определение 3 отличается от используемого в ([20], определение 2.7), так как учитывалась ограниченность максимальной функции на взвешенных пространствах Лебега.

Пример. Пусть $0 < r < p < \infty$, вес $\omega^p \in A_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$ и $\{s_k\} = \{2^{ks}\omega^p\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $s \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ принадлежит $\dot{X}_{\alpha,\sigma,p}$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = s$, $\sigma = \left(r \left(\frac{p}{r}\right)', p\right)$.

Замечание 2. Пусть $0 < \theta \leq p \leq \infty$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty]$, $\sigma_2 \geq p$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и пусть $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)', \sigma_2\right)$. Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая последовательность весов, принадлежащая $\dot{X}_{\alpha,\sigma,p}$. Тогда $\alpha_2 \geq \alpha_1$ (см. [21]).

Как обычно, положим

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

где супремум берется по всем кубам со сторонами, параллельными осям, и $x \in Q$. Также положим

$$\mathcal{M}_\sigma(f) := (\mathcal{M}(|f|^\sigma))^\frac{1}{\sigma}, \quad 0 < \sigma < \infty.$$

Лемма 2. Пусть $1 < \theta \leq p < \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая последовательность весов такая, что $t_k^p \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Предположим, что t_k^p , $k \in \mathbb{Z}$, имеют одинаковую константу Мuckenhouпта, $A_{\frac{p}{\theta}}(t_k^p) = C$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\|\mathcal{M}(f_k)|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_k)}\| \leq c \|f_k|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_k)}\| \quad (7)$$

для всех последовательностей функций $f_k \in L_p(\mathbb{R}^n, t_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $c > 0$ не зависит от k .

Доказательство см., например, в [21].

Замечание 3. i) Следует отметить, что результат леммы 2 верен, если предположить, что $t_k^p \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 < \theta \leq p < \infty$, причем

$$A_{\frac{p}{\theta}}(t_k^p) \leq c, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где c — положительная константа, не зависящая от k .

ii) Свойство (7) может быть обобщено следующим образом. Пусть $1 < \theta \leq p < \infty$ и $\{t_k\}$ — p -допустимая последовательность такая, что $t_k^p \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$.

◦ Если t_k^p , $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют (5), то

$$\|\mathcal{M}(f_j)|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_k)}\| \leq c 2^{\alpha_1(k-j)} \|f_j|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_j)}\|$$

выполняется для всех последовательностей функций $f_j \in L_p(\mathbb{R}^n, t_j)$, $j \in \mathbb{Z}$ и $j \geq k$, где $c > 0$ не зависит от k и j (см. [21]).

◦ Если t_k^p , $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют (6) с $\sigma_2 \geq p$, то

$$\|\mathcal{M}(f_j)|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_k)}\| \leq c 2^{\alpha_2(k-j)} \|f_j|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_j)}\|$$

выполняется для всех последовательностей функций $f_j \in L_p(\mathbb{R}^n, t_j)$, $j \in \mathbb{Z}$ и $k \geq j$, где $c > 0$ не зависит от k и j (см. [21]).

iii) Доказательство леммы 2 для $t_k^p = \omega$, $k \in \mathbb{Z}$, можно найти в [23].

iv) В лемме 2 можно предполагать, что $t_k^p \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 < p < \infty$, причем

$$A_p(t_k^p) \leq c, \quad k \in \mathbb{Z},$$

что следует из условия iii) леммы 1.

Вспомним векторнозначное максимальное неравенство Ч. Феффермана и Е.М. Стайна [28].

Теорема 2. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ и $0 < \sigma < \min(p, q)$. Тогда неравенство

$$\left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathcal{M}_\sigma(f_k))^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| \quad (8)$$

выполняется для всех последовательностей функций $\{f_k\} \in L_p(\ell_q)$ с обычной модификацией для случая $q = \infty$.

Для доказательства результатов этой статьи нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма 3. Пусть $1 < \theta \leq p < \infty$ и $1 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая весовая последовательность такая, что $t_k^p \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Предположим, что t_k^p , $k \in \mathbb{Z}$, имеют одинаковую константу Мукенхаупта, $A_{\frac{p}{\theta}}(t_k) = c$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда неравенство

$$\left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q (\mathcal{M}(f_k))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad (9)$$

выполняется для всех последовательностей функций $\{t_k f_k\} \in L_p(\ell_q)$ с обычной модификацией для случая $q = \infty$.

Доказательство. Поскольку неравенство (9) для $1 < q < \infty$ приведено в [22], необходимо рассмотреть только случай $q = \infty$. Для последовательности функций $\{g_k\}$ определим

$$T(\{g_k\}) = \{\mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))\}, \quad (10)$$

T является сублинейным оператором.

Шаг 1. Пусть $1 < p_2 < \infty$, $\{g_k\} \subset L_{p_2}(\ell_\infty)$ и $t_k^{p_2} \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$. На этом шаге докажем, что $t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, локально интегрируемы на $\mathbb{R}^n$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Используя неравенство Гёльдера и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} \int_K t_k(x) \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k)(x) dx &\leq \|\chi_K\|_{L_{p_2'}(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|g_k\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|)\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

где неявная константа не зависит от k . Отсюда следует желаемый результат. Кроме того, почти всюду выполняется неравенство $t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k) \leq \mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))$, $k \in \mathbb{Z}$.

Шаг 2. Докажем, что оператор T отображает $L_{p_2}(\ell_\infty)$ в $L_{p_2, \infty}(\ell_\infty)$, где $1 < p_2 < \infty$, $t_k^{p_2} \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют одинаковую константу Мукенхаупта, $A_{p_2}(t_k^{p_2}) = c$, $k \in \mathbb{Z}$. Для этого разделим доказательство на два подшага.

Подшаг 2.1. Согласно условиям ii), iii) леммы 1 существует $1 < p_3 < p_2 < \infty$ такое, что $t_k^{p_2} \in A_{p_3}(\mathbb{R}^n)$ и $t_k^{p_3} \in A_{p_3}(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что оператор T отображает $L_{p_2}(\ell_\infty)$ в $L_{p_3, \infty}(\ell_\infty)$. Пусть $\{g_k\} \subset L_{p_3}(\ell_\infty)$ и $\delta > 0$. Определим множество

$$E_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(x) > \delta \right\}.$$

Покажем, что E_δ является открытым множеством. Для $x \in E_\delta$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathcal{M}(t_{k_0} \mathcal{M}(t_{k_0}^{-1} g_{k_0}))(x) > \delta$. Тогда существует открытый куб Q^{x, k_0} , содержащий x , такой, что

$$M_{Q^{x, k_0}}(t_{k_0} \mathcal{M}(t_{k_0}^{-1} g_{k_0})) > \delta.$$

Очевидно,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(y) \geq M_{Q^{x, k_0}}(t_{k_0} \mathcal{M}(t_{k_0}^{-1} g_{k_0})) > \delta, \quad y \in Q^{x, k_0},$$

откуда $Q^{x, k_0} \subset E_\delta$ и E_δ является открытым множеством. Заметим, что

$$E_\delta \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(x) > \delta\}.$$

Пусть $K_\delta \subset E_\delta$ является компактным множеством. Тогда

$$K_\delta \subset \bigcup_{k=0}^N \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(x) > \delta\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |K_\delta| &\leq \sum_{k=0}^N |\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(x) > \delta\}| = \\ &= \delta^{-p_3} \sum_{k=0}^N \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(x) > \delta\}} \delta^{p_3} dx < \delta^{-p_3} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(x))^{p_3} dx. \end{aligned}$$

По лемме 2 получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))(x))^{p_3} dx &= \|\mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))\|_{L_{p_3}(\mathbb{R}^n)}^{p_3} \lesssim \\ &\lesssim \|t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k)\|_{L_{p_3}(\mathbb{R}^n)}^{p_3} \lesssim \|g_k\|_{L_{p_3}(\mathbb{R}^n)}^{p_3} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|g_k|) \right\|_{L_{p_3}(\mathbb{R}^n)}^{p_3}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta |K_\delta|^{\frac{1}{p_3}} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|g_k|) \right\|_{L_{p_3}(\mathbb{R}^n)}$$

для любого $\delta > 0$. Взяв супремум по всем компактам $K_\delta \subset E_\delta$ и используя внутреннюю регулярность меры Лебега, получаем

$$\sup_{\delta > 0} \delta |E_\delta|^{\frac{1}{p_3}} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|g_k|) \right\|_{L_{p_3}(\mathbb{R}^n)}. \quad (11)$$

Таким образом, T отображает $L_{p_3}(\ell_\infty)$ в $L_{p_3, \infty}(\ell_\infty)$.

Подшаг 2.2. Используя снова, что $t_k^{p_2} \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, по теореме 1 существует $\varepsilon > 0$, не зависящее от k , такое, что $t_k^{p_2(1+\varepsilon)} \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n) \subset A_{p_2(1+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично оценке (11) получаем

$$\sup_{\delta > 0} \delta |E_\delta|^{\frac{1}{p_2(1+\varepsilon)}} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|g_k|) \right\|_{L_{p_2(1+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)},$$

если $\{g_k\} \subset L_{p_2(1+\varepsilon)}(\ell_\infty)$. Следовательно, T отображает $L_{p_2(1+\varepsilon)}(\ell_\infty)$ в $L_{p_2(1+\varepsilon), \infty}(\ell_\infty)$.

Подшаг 2.3. Заключение. Учитывая подшаги 2.1–2.2 и векторнозначную версию интерполяции Марцинкевича ([29], лемма 1; [30], лемма 2.5), получаем ограниченность T из $L_{p_2}(\ell_\infty)$ в $L_{p_2}(\ell_\infty)$ и

$$\left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k)) \right\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))) \right\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|g_k|) \right\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)},$$

если $\{g_k\} \subset L_{p_2}(\ell_\infty)$, где первое неравенство следует из шага 1.

Шаг 3. Докажем (9). Пусть T — сублинейный оператор, определенный в (10). Пусть $\varepsilon_{t_k^p} > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, как в теореме 1. Поскольку t_k^p , $k \in \mathbb{Z}$, имеют одинаковую константу Мукенхаупта, $A_{\frac{p}{\theta}}(t_k^p) = c$, $k \in \mathbb{Z}$, имеем $\varepsilon_{t_k^p} = \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$. Снова согласно условиям ii), iii) леммы 1 существует $1 < p_1 < p < \infty$ такое, что $t_k^p \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ и $t_k^{p_1} \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$. По теореме 1 существует $\varepsilon > 0$, не зависящее от k , такое, что $t_k^{p(1+\varepsilon)} \in A_p(\mathbb{R}^n) \subset A_{p(1+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Шаг 2 приводит к ограниченности T из $L_p(\ell_\infty)$ в $L_p(\ell_\infty)$ и

$$\left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k)) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{M}(t_k \mathcal{M}(t_k^{-1} g_k))) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} (|g_k|) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (12)$$

если $\{g_k\} \subset L_p(\ell_\infty)$, где первое неравенство следует из шага 1. Подставляя в (12) $g_k = t_k f_k$, $k \in \mathbb{Z}$, завершаем доказательство (9). $\square$

Следующие леммы важны для изучения исследуемых нами функциональных пространств.

Лемма 4. Пусть $v \in \mathbb{Z}$, $K \geq 0$, $1 < \theta \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, p}$ — p -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)', \sigma_2 \geq p\right)$. Тогда для любой последовательности функций $\{t_k f_k\} \in L_p(\ell_q)$ верно

$$\left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q \left(\sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(f_j) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|, \quad (13)$$

если $K > \alpha_2$, и

$$\left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q \left(\sum_{j=k+v}^{\infty} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(f_j) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|, \quad (14)$$

если $K < \alpha_1$, с обычными модификациями, если $q = \infty$.

Доказательство. Поскольку доказательство для (14) аналогично, рассмотрим только (13) с $q = \infty$, так как случай $1 < q < \infty$ рассмотрен в [22]. Для последовательности функций $\{g_k\}$ определим

$$T(\{g_k\}) = \left\{ \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) \right\}. \quad (15)$$

Оператор T является сублинейным.

Шаг 1. На этом шаге докажем, что $t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j)$, $k \in \mathbb{Z}$, локально интегрируемы на $\mathbb{R}^n$, если $\{g_k\} \subset L_{p_2}(\ell_\infty)$, $1 < p_2 < \infty$ и $t_k^{p_2} \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Используя неравенство Гёльдера и лемму 2 в сочетании с замечанием 3, получаем

$$\begin{aligned} & \int_D t_k(x) \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j)(x) dx \leq \\ & \leq \|\chi_D\|_{L_{p_2'}(\mathbb{R}^n)} \left\| t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) |_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \right\| \lesssim \\ & \lesssim \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \|t_k \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) |_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)}\| \lesssim \\ & \lesssim \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)(K-\alpha_2)} \|g_j\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|) |_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \right\|, \end{aligned} \quad (16)$$

если $v \leq 0$, где неявная константа не зависит от k . Предположим, что $v \in \mathbb{N}$. Разделим правую часть (16) на два слагаемых:

$$\sum_{j=-\infty}^k 2^{(j-k)K} \|t_k \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) |_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)}\| + \sum_{j=k+1}^{k+v} 2^{(j-k)K} \|t_k \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) |_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)}\|. \quad (17)$$

Заметим, что первое слагаемое можно оценить как

$$c \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|) |_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \right\|. \quad (18)$$

Снова используя лемму 2 в сочетании с замечанием 3, находим, что второе слагаемое в (17) можно оценить с помощью выражения в (18). Следовательно,

$$t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \lesssim \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right)$$

почти всюду, при этом неявная константа не зависит от k . Получаем желаемый результат. Кроме того,

$$t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \leq \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

почти везде.

Шаг 2. Докажем (13) при $q = \infty$. Пусть T — сублинейный оператор, определенный в (15). Утверждается, что T отображает $L_{p_1}(\ell_\infty)$ в $L_{p_1, \infty}(\ell_\infty)$ и $L_{p(1+\varepsilon)}(\ell_\infty)$ в $L_{p(1+\varepsilon), \infty}(\ell_\infty)$ для некоторого $1 < p_1 < p$. Векторнозначная версия интерполяции Марцинкевича ([29], лемма 1; [30], лемма 2.5) дает ограниченность T из $L_p(\ell_\infty)$ в $L_p(\ell_\infty)$. Более того, если $\{g_k\} \subset L_p(\ell_\infty)$ и $t_k^p \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| \lesssim \\ & \lesssim \left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) \right) |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|) |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|, \end{aligned} \quad (19)$$

где первое неравенство следует из шага 1. Полагая $g_j = t_j f_j$, $j \in \mathbb{Z}$, в (19), завершаем доказательство (13).

Шаг 3. Докажем вышеуказанное утверждение. Для этого продолжим в два подшага.

Подшаг 3.1. Доказываем, что оператор T отображает $L_{p_1}(\ell_\infty)$ в $L_{p_1, \infty}(\ell_\infty)$ для некоторого $1 < p_1 < p$. Поскольку $t_k^p \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n) \subset A_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, то по условиям ii), iii) леммы 1 существует $1 < p_1 < p < \infty$ такое, что $t_k^p \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ и $t_k^{p_1} \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$.

Подшаг 3.1.1. Подготовка. Пусть $\{g_k\} \subset L_{p_1}(\ell_\infty)$ и $\delta > 0$. Определим

$$E_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) (x) \right) > \delta \right\}.$$

Докажем, что E_δ является открытым множеством. Для $x \in E_\delta$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\mathcal{M} \left(t_{k_0} \sum_{j=-\infty}^{k_0+v} 2^{(j-k_0)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) (x) > \delta.$$

Тогда существует открытый куб Q^{x, k_0} , содержащий x , такой, что

$$M_{Q^{x, k_0}} \left(t_{k_0} \sum_{j=-\infty}^{k_0+v} 2^{(j-k_0)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) > \delta.$$

Следовательно,

$$\mathcal{M} \left(t_{k_0} \sum_{j=-\infty}^{k_0+v} 2^{(j-k_0)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) (y) \geq M_{Q^{x, k_0}} \left(t_{k_0} \sum_{j=-\infty}^{k_0+v} 2^{(j-k_0)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) > \delta$$

для любого $y \in Q^{x, k_0}$. Тогда $Q^{x, k_0} \subset E_\delta$. Это доказывает, что E_δ является открытым.

Подшаг 3.1.2. Докажем, что T отображает $L_{p_1}(\ell_\infty)$ в $L_{p_1, \infty}(\ell_\infty)$. Заметим, что

$$E_\delta \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) > \delta \right\}.$$

Пусть $K_\delta \subset E_\delta$ является компактным множеством. Тогда

$$K_\delta \subset \bigcup_{k=0}^N \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) > \delta \right\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |K_\delta| &\leq \sum_{k=0}^N \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) (x) > \delta \right\} \right| = \\ &= \delta^{-p_1} \sum_{k=0}^N \int_{\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) > \delta \right\}} \delta^{p_1} dx < \\ &< \delta^{-p_1} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) (x) \right)^{p_1} dx. \end{aligned}$$

По лемме 2 в сочетании с замечанием 3 получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) (x) \right)^{p_1} dx = \\ &= \left\| \mathcal{M} \left(t_k \sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j) \right) \right\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)}^{p_1} \lesssim \\ &\lesssim \left(\sum_{j=-\infty}^{k+v} 2^{(j-k)K} \|t_k \mathcal{M}(t_j^{-1} g_j)\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p_1} \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|) \right\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)}^{p_1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta |K_\delta|^{\frac{1}{p_1}} \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|) |L_{p_1}(\mathbb{R}^n) \right\|$$

для любого $\delta > 0$. Взяв супремум по всем компактам $K_\delta \subset E_\delta$ и используя внутреннюю регулярность меры Лебега, получаем

$$\sup_{\delta > 0} \delta |E_\delta|^{\frac{1}{p_1}} \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|) |L_{p_1}(\mathbb{R}^n) \right\|. \quad (20)$$

Следовательно, T отображает $L_{p_1}(\ell_\infty)$ в $L_{p_1, \infty}(\ell_\infty)$.

Подшаг 3.2. Используя снова, что $t_k^p \in A_p(\mathbb{R}^n) \subset A_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, по теореме 1 существует $\varepsilon > 0$, не зависящее от k , такое, что $t_k^{p(1+\varepsilon)} \in A_p(\mathbb{R}^n) \subset A_{p(1+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\{g_k\} \subset L_{p(1+\varepsilon)}(\ell_\infty)$. Аналогично оценке (20) получаем

$$\sup_{\delta > 0} \delta |E_\delta|^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} (|g_j|) |L_{p(1+\varepsilon)}(\mathbb{R}^n) \right\|,$$

следовательно, T отображает $L_{p(1+\varepsilon)}(\ell_\infty)$ в $L_{p(1+\varepsilon), \infty}(\ell_\infty)$. Утверждение шага 3 доказано. $\square$

Замечание 4. Пусть $i \in \mathbb{Z}$, $1 < \theta \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, p}$ является p -допустимой последовательностью весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq p \right)$. Из леммы 4 легко получаем

$$\left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q (\mathcal{M}(f_{k+i}))^q \right)^{\frac{1}{q}} |L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q |f_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} |L_p(\mathbb{R}^n) \right\|$$

для любой последовательности функций $\{t_k f_k\} \in L_p(\ell_q)$, где неявная константа зависит от i . Действительно, имеем

$$\mathcal{M}(f_{k+i}) \leq \sum_{j=-\infty}^{k+i} 2^{(j-k-i)M} \mathcal{M}(f_j), \quad M > \alpha_2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Желаемый результат следует из леммы 4.

Замечание 5. i) Следует отметить, что результат этого раздела верен, если предположить, что $t_k \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 < p < \infty$, причем

$$A_p(t_k) \leq c, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $c > 0$ не зависит от k .

ii) Доказательство этого результата для $t_k^p = \omega$, $k \in \mathbb{Z}$, можно найти в [31], [32].

iii) Согласно условию i) леммы 1 можно предположить, что $t_k^p \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 < p < \infty$, причем

$$A_p(t_k^p) \leq c, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $c > 0$ — положительная константа, не зависящая от k .

2. ПРОСТРАНСТВА $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$

Выберем пару функций Шварца φ и ψ , удовлетворяющих условиям

$$\text{supp } \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi \subset \left\{ \xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \right\}, \quad (21)$$

$$|\mathcal{F}\varphi(\xi)|, |\mathcal{F}\psi(\xi)| \geq c, \quad \text{если} \quad \frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3}, \quad (22)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}\varphi(2^{-k}\xi)} \mathcal{F}\psi(2^{-k}\xi) = 1, \quad \text{если} \quad \xi \neq 0, \quad (23)$$

где $c > 0$. На протяжении всей статьи для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать $\varphi_k(x) := 2^{kn}\varphi(2^k x)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — функция, удовлетворяющая условиям (21), (22). Напомним, что существует функция $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям (21)–(23) (см. [33], лемма (6.9)). Определим

$$\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} x^{\beta} \varphi(x) dx = 0 \text{ для всех мультииндексов } \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

Пусть $\mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ — топологическое двойственное пространство к $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, т. е. множество всех непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{S}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Теперь определим рассматриваемые пространства.

Определение 4. Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая весовая последовательность и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям (21), (22).

i) Пространство Бесова $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ — это множество всех $f \in \mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f| \dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|t_k(\varphi_k * f)|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

с обычной модификацией для случая $q = \infty$.

ii) Пусть $0 < p < \infty$. Пространство Трибеля–Лизоркина $\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ — это множество всех $f \in \mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f| \dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q |\varphi_k * f|^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\| < \infty,$$

с обычной модификацией для случая $q = \infty$.

Теперь определим пространства $\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ (см. [34]).

Определение 5. Пусть $0 < q < \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — q -допустимая весовая последовательность, и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям (21), (22). Пространство Трибеля–Лизоркина $\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ представляет собой множество всех $f \in \mathcal{S}'_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f| \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| := \sup_{P \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{|P|} \int_P \sum_{k=-\log_2 l(P)}^{\infty} t_k^q(x) |\varphi_k * f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Замечание 6. Некоторые свойства этих функциональных пространств такие, как характеристика через φ -преобразование в смысле Фрейзера и Джауэрта, двойственность, гладкие атомарные и молекулярные разложения, а также характеристика пространств Бесова $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ в терминах разностных соотношений, приведены в [21], [22], [34].

Замечание 7. Следует отметить, что элементы вышеупомянутых пространств не являются распределениями, а представляют собой классы эквивалентности распределений. Будем использовать запись $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ для обозначения как $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, так и $\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Используя систему $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, можно определить квазинормы

$$\|f|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}\| := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} \|\varphi_k * f|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}\| := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} |\varphi_k * f|^q \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|$$

для констант $s \in \mathbb{R}$ и $0 < p, q \leq \infty$, причем $0 < p < \infty$ в случае $\dot{F}$. Пространство Бесова $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n)$, для которых $\|f|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}\| < \infty$. Пространство Триebel–Лизоркина $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n)$, для которых $\|f|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}\| < \infty$. Более подробная информация о классической теории этих пространств может быть найдена в [35]–[37].

Сразу можно заметить, что если $\{t_k\} = \{2^{sk}\}$, $s \in \mathbb{R}$, то

$$\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{2^{sk}\}) = \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \quad \dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{2^{sk}\}) = \dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \quad \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{2^{sk}\}) = \dot{F}_{\infty,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

Более того, для $\{t_k\} = \{2^{sk}w\}$, $s \in \mathbb{R}$, с весом w вновь получаются взвешенные пространства Бесова и Триebel–Лизоркина соответственно; для подробного изучения этих взвешенных пространств читатель может обратиться к работам [38], [39].

Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (21)–(23). Напомним, что φ -преобразование S_φ определяется как $(S_\varphi f)_{k,m} = \langle f, \varphi_{k,m} \rangle$, где $\varphi_{k,m}(x) = 2^{\frac{kn}{2}} \varphi(2^k x - m)$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$. Обратное φ -преобразование T_ψ определяется как

$$T_\psi \lambda := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{k,m} \psi_{k,m},$$

где $\lambda = \{\lambda_{k,m}\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ и $\psi_{k,m}(x) = 2^{\frac{kn}{2}} \psi(2^k x - m)$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. [36]).

Теперь введем следующие пространства последовательностей.

Определение 6. Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая последовательность весов. Тогда для всех последовательностей с комплексными значениями $\lambda = \{\lambda_{k,m}\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ определим

$$\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) := \left\{ \lambda : \|\lambda|_{\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}\| < \infty \right\},$$

где

$$\|\lambda|_{\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}\| := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{knq}{2}} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_k \lambda_{k,m} \chi_{k,m} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) := \left\{ \lambda : \|\lambda|_{\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}\| < \infty \right\}$$

при $0 < p < \infty$, где

$$\|\lambda|_{\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}\| := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\frac{knq}{2}} t_k^q |\lambda_{k,m}|^q \chi_{k,m} \right)^{\frac{1}{q}} |_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|$$

с обычными модификациями для случая $q = \infty$.

Возможная зависимость гладкости t_k , $k \in \mathbb{Z}$, от точки приводит к появлению дополнительных трудностей при изучении этих функциональных пространств. Однако, согласно следующей лемме проблему можно свести к случаю фиксированной гладкости [40].

Предложение 1. Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\}$ является p -допустимой весовой последовательностью.

i) Тогда выражение

$$\|\lambda|\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^* := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{knq}{2}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_{k,m}|^p t_{k,m,p}^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

является эквивалентной квазинормой в $\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

ii) Пусть $0 < \theta \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$. Предположим, что $\{t_k\}$ удовлетворяет (5) с $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)'$ и $j = k$. Тогда выражение

$$\|\lambda|\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^* := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{knq(\frac{1}{2} + \frac{1}{p})} t_{k,m,p}^q |\lambda_{k,m}|^q \chi_{k,m} \right)^{\frac{1}{q}} |L_p(\mathbb{R}^n)| \right\|$$

является эквивалентной квазинормой в $\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Определим $\dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ — пространство последовательностей, соответствующее $\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, следующим образом.

Определение 7. Пусть $0 < q < \infty$ и $\{t_k\}$ — q -допустимая последовательность. Тогда для всех последовательностей комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_{k,m}\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ определим

$$\dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) := \left\{ \lambda : \|\lambda|\dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| < \infty \right\},$$

где

$$\|\lambda|\dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| := \sup_{P \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{|P|} \int_P \sum_{k=-\log_2 l(P)}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\frac{knq}{2}} t_k^q(x) |\lambda_{k,m}|^q \chi_{k,m}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (24)$$

Квазинорма (24) может быть переписана следующим образом ([40], предложение 3.13).

Предложение 2. Пусть $0 < q < \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — q -допустимая последовательность. Тогда

$$\|\lambda|\dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| = \sup_{P \in \mathcal{Q}} \left(\frac{1}{|P|} \int_P \sum_{k=-\log_2 l(P)}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{knq(\frac{1}{2} + \frac{1}{q})} t_{k,m,q}^q |\lambda_{k,m}|^q \chi_{k,m}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Замечание 8. Для простоты в дальнейшем будем использовать запись $\dot{a}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ для обозначения либо $\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, либо $\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Следующий результат называется характеристикой через φ -преобразование в смысле Фрейзера и Джауэрта. Он будет играть важную роль в оставшейся части статьи. Его доказательство основывается на леммах 3 и 4 и аналогично доказательствам из [21], [22].

Теорема 3. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \theta \leq p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, p}$ — p -допустимая весовая последовательность с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq p \right)$. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям (21)–(23). Операторы

$$S_\varphi : \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \rightarrow \dot{a}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}),$$

$$T_\psi : \dot{a}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \rightarrow \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$$

ограничены. Более того, $T_\psi \circ S_\varphi$ является тождественным оператором на $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Представим некоторые основные свойства пространств $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Следствие 1. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \theta \leq p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, p}$ — p -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq p \right)$. Определение пространств $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ не зависит от выбора $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условиям (21), (22).

Теорема 4. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \theta \leq p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, p}$ — p -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq p \right)$. Пространства $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ являются квазибанаховыми. Они являются банаховыми, если $1 \leq p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$.

Теорема 5. Пусть $0 < \theta \leq p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, p}$ — p -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq p \right)$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Имеется вложение

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Кроме того, если $0 < q < \infty$, то $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Для доказательства теорем 4, 5 используются леммы 3, 4 вместо лемм 2.14, 2.18 из [22] и повторяются доказательства теорем 3.12, 3.13 из [22].

Следующие утверждения взяты из [34].

Теорема 6. Пусть $0 < \theta \leq q < \infty$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, q}$ — q -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{q}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq q \right)$. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям (21)–(23). Операторы

$$S_\varphi : \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \rightarrow \dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}),$$

$$T_\psi : \dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \rightarrow \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$$

ограничены. Более того, $T_\psi \circ S_\varphi$ является тождественным оператором на $\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Следствие 2. Пусть $0 < \theta \leq q < \infty$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, q}$ — q -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{q}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq q \right)$. Определение пространств $\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ не зависит от выбора $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условиям (21), (22).

Замечание 9. Теоремы 3, 6 могут быть использованы для получения различных результатов для пространств $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, при этом рассуждения могут быть эквивалентно перенесены в пространство последовательностей, что часто более удобно для работы. Более точно, при тех же предположениях теорем 3, 6 получаем

$$\|\{\langle f, \varphi_{k,m} \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}\|_{\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})} \approx \|f\|_{\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}.$$

Замечание 10. Пусть $0 < \theta < p < \infty$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\alpha, \sigma, p}$ — p -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)', \sigma_2 \geq p\right)$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Для простоты в дальнейшем в случае $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ будем писать $\{t_k\} \in \dot{X}_{\sigma, p}$.

Теперь сформулируем один из основных результатов этого раздела.

Теорема 7. Пусть $0 < \theta < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ и $j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\sigma, p}$ — p -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)', \sigma_2 \geq p\right)$. Тогда

$$\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

в смысле эквивалентных квазинорм.

Доказательство. Отметим, что $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j) = \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{w_k\})$, где $w_k = t_j$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку доказательство для $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ аналогично, рассмотрим только $\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Доказательство будет состоять из двух шагов.

Шаг 1. На этом шаге докажем, что

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})} \lesssim \|f\|_{\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j)} \quad (25)$$

для любого $f \in \dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j)$, $j \in \mathbb{Z}$, где неявная константа не зависит от j . Имеем

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})} \approx \|\{\langle f, \varphi_{k,m} \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}\|_{\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}$$

(см. замечание 9). Ввиду определения $\varphi_{k,m}$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и каждого $m \in \mathbb{Z}^n$ имеем

$$|\langle f, \varphi_{k,m} \rangle| = 2^{-\frac{kn}{2}} |f * \tilde{\varphi}_k(2^{-k}m)| \leq 2^{-\frac{kn}{2}} \sup_{z \in Q_{k,m}} |f * \tilde{\varphi}_k(z)|,$$

где $\tilde{\varphi} = \varphi(-\cdot)$. Напомним оценку (см. (2.11) из [35])

$$\sup_{z \in Q_{k,m}} |\tilde{\varphi}_k * f(z)| \lesssim 2^{k\frac{n}{\tau}} \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}^n} (1 + |h|)^{-M} \int_{Q_{k,m+h}} |\tilde{\varphi}_k * f(y)|^\tau dy \right)^{\frac{1}{\tau}}, \quad (26)$$

где $M > n + 1$, $\tau > 0$. Если выбрать $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\sigma_1}$, где $0 < \nu < \min(p, q)$, то, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$2^{k\frac{n}{\tau}} \left(\int_{Q_{k,m+h}} |\tilde{\varphi}_k * f(y)|^\tau dy \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq M_{Q_{k,m+h}, \nu}(t_j(\tilde{\varphi}_k * f)) M_{Q_{k,m+h}, \sigma_1}(t_j^{-1}). \quad (27)$$

Из (5) следует

$$M_{Q_{k,u}, \sigma_1}(t_j^{-1}) \leq C(M_{Q_{k,u}, p}(t_k))^{-1},$$

если $k \leq j$ и $u \in \mathbb{Z}^n$, где положительная константа C не зависит от j, k и u . Используя тот факт, что

$$Q_{k,m} \subset B(x_{k,m}, \sqrt{n}2^{-k}), \quad Q_{k,m+h} \subset B(x_{k,m}, \sqrt{n}(1 + |h|)2^{-k}),$$

закключаем

$$M_{Q_{k,m},p}(t_k)M_{Q_{k,m+h},\sigma_1}(t_j^{-1}) \leq c(1+|h|)^{\frac{n}{\theta}}, \quad (28)$$

где $c > 0$ не зависит от j, k, h и m . Подставляя (27) в (26) с помощью (28), получим

$$\begin{aligned} (M_{Q_{k,m},p}(t_k))^\tau \left(\sup_{z \in Q_{k,m}} |\tilde{\varphi}_k * f(z)| \right)^\tau &\lesssim \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} (1+|h|)^{\frac{n\tau}{\theta}-M} (M_{Q_{k,m+h},\nu}(t_j(\tilde{\varphi}_k * f)))^\tau \lesssim \\ &\lesssim (\mathcal{M}_\nu(t_j(\tilde{\varphi}_k * f))(x))^\tau \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} (1+|h|)^{\frac{n\tau}{\theta}+n\tau-M} \lesssim (\mathcal{M}_\nu(t_j(\tilde{\varphi}_k * f))(x))^\tau \end{aligned}$$

для любого $x \in Q_{k,m}$, $k \leq j$, $m \in \mathbb{Z}^n$, и любого достаточно большого M . Теперь если $k > j$, то из (6) вытекает $M_{Q_{k,m},p}(t_k) \lesssim M_{Q_{k,m},p}(t_j)$. Следовательно,

$$M_{Q_{k,m},p}(t_k) \sup_{z \in Q_{k,m}} |\tilde{\varphi}_k * f(z)| \lesssim \mathcal{M}_\nu(t_j(\tilde{\varphi}_k * f))(x)$$

для любого $x \in Q_{k,m}$, $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Заметим, что здесь можно применить предложение 1 и теорему 2. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left\| \{ \langle f, \varphi_{k,m} \rangle \}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \right\| \approx \\ &\approx \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{kn(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})q} t_{k,m,p}^q |\langle f, \varphi_{k,m} \rangle|^q \chi_{k,m} \right)^{\frac{1}{q}} |L_p(\mathbb{R}^n)| \right\| \lesssim \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathcal{M}_\nu(t_j(\tilde{\varphi}_k * f)))^q \right)^{\frac{1}{q}} |L_p(\mathbb{R}^n)| \right\| \lesssim \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}_k * f|^q \right)^{\frac{1}{q}} t_j |L_p(\mathbb{R}^n)| \right\| \lesssim \|f| \dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j)\|, \end{aligned}$$

где неявная константа не зависит от j .

Шаг 2. На этом шаге докажем обратное неравенство из (25). Имеем

$$\|f| \dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j)\| \approx \left\| \{ \langle f, \varphi_{k,m} \rangle \}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j) \right\|.$$

Продолжим использовать оценку (26). Снова выбираем $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\sigma_1}$, где $0 < \nu < \min(p, q)$.

Из неравенства Гёльдера получаем

$$2^{k\frac{n}{\tau}} \left(\int_{Q_{k,m+h}} |\tilde{\varphi}_k * f(y)|^\tau dy \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq M_{Q_{k,m+h},\nu}(t_k(\tilde{\varphi}_k * f)) M_{Q_{k,m+h},\sigma_1}(t_k^{-1}).$$

Из (6) имеем $M_{Q_{k,m},p}(t_j) \leq CM_{Q_{k,m},p}(t_k)$, если $k \leq j$ и $m \in \mathbb{Z}^n$, где положительная константа C не зависит от j, k и m . Заметим, что

$$M_{Q_{k,m},p}(t_k)M_{Q_{k,m+h},\sigma_1}(t_k^{-1}) \lesssim (1+|h|)^{\frac{n}{\theta}},$$

где неявная константа не зависит от j, k, h и m . Рассуждая как в шаге 1, можно получить

$$M_{Q_{k,m},p}(t_j) \sup_{z \in Q_{k,m}} |\tilde{\varphi}_k * f(z)| \lesssim \mathcal{M}_\nu(t_k(\tilde{\varphi}_k * f))(x) \quad (29)$$

для любого $x \in Q_{k,m}$, $k \leq j$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Теперь если $k > j$, то ввиду (5) получаем, что $M_{Q_{k,m+h},\sigma_1}(t_k^{-1}) \leq C(M_{Q_{k,m+h},p}(t_j))^{-1}$. Это дает ту же оценку (29) для любого $k > j$. Снова применим предложение 1 и теорему 2, получим

$$\begin{aligned} & \|\{\langle f, \varphi_{k,m} \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} | \dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j) \| \approx \\ & \approx \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{k \frac{nq}{2}} (M_{Q_{k,m},p}(t_j))^q |\langle f, \varphi_{k,m} \rangle|^q \chi_{k,m} \right)^{\frac{1}{q}} | L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \lesssim \\ & \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathcal{M}_\nu(t_k(\tilde{\varphi}_k * f)))^q \right)^{\frac{1}{q}} | L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \lesssim \\ & \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^q |\tilde{\varphi}_k * f|^q \right)^{\frac{1}{q}} | L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \lesssim \|f| \dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|, \end{aligned}$$

где неявная константа не зависит от j . $\square$

Пусть w — локально интегрируемая функция, $w(x) > 0$ почти для всех x . Пусть $0 < p < \infty$ и $H_p(\mathbb{R}^n, w^p)$ — взвешенные пространства Харди (см. [41] для более подробной информации). Основываясь на связи между взвешенными пространствами Харди и пространствами Трибеля–Лизоркина ([38], теорема 1.4), из теоремы 7 вытекает

Следствие 3. Пусть $0 < \theta < p < \infty$ и $j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\sigma,p}$ — p -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq p \right)$. Тогда

$$\dot{F}_{p,2}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = H_p(\mathbb{R}^n, t_j^p) \quad (30)$$

в смысле эквивалентных квазинорм. В частности,

$$\dot{F}_{p,2}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = L_p(\mathbb{R}^n, t_j), \quad \max(1, \theta) < p < \infty, \quad (31)$$

в смысле эквивалентных норм.

Теперь имеем следующие необходимые и достаточные условия для совпадения взвешенных пространств Лебега $L_p(\mathbb{R}^n, t_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Теорема 8. Пусть $\max(1, \theta) < p < \infty$ и $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta} \right)'$. Пусть $\{t_1^p, t_2^p\} \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$. Равенство

$$L_p(\mathbb{R}^n, t_1) = L_p(\mathbb{R}^n, t_2) \quad (32)$$

верно тогда и только тогда, когда

$$M_{Q,\sigma_1}(t_1^{-1}) \approx M_{Q,\sigma_1}(t_2^{-1}), \quad M_{Q,p}(t_1) \approx M_{Q,p}(t_2) \quad (33)$$

для любого диадического куба Q в $\mathbb{R}^n$. В частности,

$$L_p(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n, t_1)$$

тогда и только тогда, когда

$$M_{Q,\sigma_1}(t_1^{-1}) \approx M_{Q,p}(t_1) \approx 1$$

для любого диадического куба Q в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Будем действовать в два этапа. Пусть Q — диадический куб в $\mathbb{R}^n$.

Шаг 1. На этом этапе докажем, что (32) выполняется тогда и только тогда, когда

$$M_{Q,p}(t_i)M_{Q,\sigma_1}(t_j^{-1}) \leq C, \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad M_{Q,p}(t_1) \approx M_{Q,p}(t_2). \quad (34)$$

Достаточность следует из следствия 3. Предположим, что (32) верно. Необходимость второго условия из (34) очевидна, если взять $f = \chi_Q$. Пусть g — локально интегрируемая функция на $\mathbb{R}^n$. Как и в ([25], 7.1.1), имеем

$$(M_Q(g^\theta))^\frac{1}{\theta} \leq (\mathcal{M}(g^\theta)(x))^\frac{1}{\theta}, \quad x \in Q.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (M_Q(g^\theta))^\frac{1}{\theta} \|1\|_{L_p(Q, t_1)} &\leq \|(\mathcal{M}(g^\theta))^\frac{1}{\theta}\|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_1)} \lesssim \|(\mathcal{M}(g^\theta))^\frac{1}{\theta}\|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_2)} = \\ &= c \|\mathcal{M}(g^\theta)\|_{L_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n, t_2)}^\frac{1}{\theta} \lesssim \|g^\theta\|_{L_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n, t_2)}^\frac{1}{\theta} = c \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n, t_2)}, \end{aligned}$$

где четвертое неравенство следует из того, что $t_2^p \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$. Выберем $g = t_2^{-(\frac{p}{\theta})'} \chi_Q$, имеем

$$|Q|^\frac{1}{p} M_{Q,p}(t_1) (M_Q(t_2^{-\sigma}))^\frac{1}{\theta} \left(\int_Q t_2^{p-(\frac{p}{\theta})'p} \right)^{-\frac{1}{p}} \lesssim c.$$

Поскольку $p - \left(\frac{p}{\theta}\right)' p = -\sigma_1$ и $\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{\theta}$, получаем необходимость $M_{Q,p}(t_1)M_{Q,\sigma_1}(t_2^{-1}) \leq C$.

Меняя местами t_2 и t_1 , получаем необходимость первого условия формулы (34).

Шаг 2. Доказываем, что (32) выполняется тогда и только тогда, когда

$$M_{Q,\sigma_1}(t_2^{-1}) \approx M_{Q,\sigma_1}(t_1^{-1}).$$

Достаточность следует из простой модификации доказательства теоремы 7 с использованием (31). Из неравенства Гёльдера имеем

$$1 = \left(\frac{1}{Q} \int_Q t_1^\theta(x) t_1^{-\theta}(x) \right)^\frac{1}{\theta} \leq M_{Q,p}(t_1) M_{Q,\sigma_1}(t_1^{-1}). \quad (35)$$

Умножая обе стороны (35) на $M_{Q,\sigma_1}(t_2^{-1})$ и используя шаг 1, получаем

$$M_{Q,\sigma_1}(t_2^{-1}) \lesssim M_{Q,\sigma_1}(t_1^{-1}).$$

Меняя местами t_2 и t_1 , получаем необходимость первого условия в формуле (33). $\square$

Теперь имеем следующие необходимые и достаточные условия для совпадения взвешенных функциональных пространств $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Теорема 9. Пусть $0 < \theta < p < \infty$, $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)'$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_1^p, t_2^p\} \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$. Равенство

$$\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_1) = \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_2) \quad (36)$$

верно тогда и только тогда, когда выполняется (33). В частности,

$$\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_1)$$

тогда и только тогда, когда

$$M_{Q,\sigma_1}(t_1^{-1}) \approx M_{Q,p}(t_1) \approx 1$$

для любого диадического куба Q в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 7. Предположим, что (36) выполняется. Пусть $k, k_0 \in \mathbb{Z}$ и $m, m_0 \in \mathbb{Z}^n$. Определим

$$\lambda_{k,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } (k, m) = (k_0, m_0), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и $\lambda = \{\lambda_{k,m}\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}$. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют (21)–(23). Определим

$$T_\psi \lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{k,m} \psi_{k,m}(x).$$

Пусть Q_{k_0, m_0} — диадический куб в $\mathbb{R}^n$. Из замечания 9 вытекает

$$\begin{aligned} \|1|L_p(Q_{k_0, m_0}, t_1)\|^p &= \int_{Q_{k_0, m_0}} t_1^p(x) dx = \\ &= \frac{2^{k_0 n p}}{|\langle \psi, \varphi \rangle|^p} \int_{Q_{k_0, m_0}} |\langle \psi(2^{k_0} \times (-m_0)), \varphi(2^{k_0} \times (-m_0)) \rangle|^p t_1^p(x) dx \leq \\ &\leq \frac{2^{-k_0 \frac{n}{2} p}}{|\langle \psi, \varphi \rangle|^p} \|\{ \langle T_\psi \lambda, \varphi_{j,h} \rangle \}_{j \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{Z}^n} | \dot{a}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_1\}) \|^p \lesssim \\ &\lesssim 2^{-k_0 \frac{n}{2} p} \|T_\psi \lambda | \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_1\})\|^p \lesssim 2^{-k_0 \frac{n}{2} p} \|T_\psi \lambda | \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_2\})\|^p, \end{aligned}$$

где неявная константа не зависит от k_0 . Применяя теорему 3, получаем

$$\|T_\psi \lambda | \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_2\})\| \lesssim \|\{\lambda_{k,m}\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} | \dot{a}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_2\})\| \lesssim 2^{k_0 \frac{n}{2}} \|1|L_p(Q_{k_0, m_0}, t_2)\|.$$

Меняя местами t_2 и t_1 , имеем

$$M_{Q_{k_0, m_0}, p}(t_1) \approx M_{Q_{k_0, m_0}, p}(t_2), \quad k_0 \in \mathbb{Z}, \quad m_0 \in \mathbb{Z}.$$

Теперь установим необходимость первого условия из (34). Пусть g — локально интегрируемая функция на $\mathbb{R}^n$. Аналогично шагу 1 доказательства теоремы 8 выводим

$$\begin{aligned} (M_{Q_{k_0, m_0}}(g^\theta))^{\frac{1}{\theta}} \|1|L_p(Q_{k_0, m_0}, t_1)\| &\lesssim (M_{Q_{k_0, m_0}}(g^\theta))^{\frac{1}{\theta}} \|1|L_p(Q_{k_0, m_0}, t_2)\|^p \lesssim \\ &\lesssim \|\mathcal{M}(g^\theta) | L_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n, t_2^\theta)\|^{\frac{1}{\theta}} \lesssim \|g^\theta | L_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n, t_2^\theta)\|^{\frac{1}{\theta}} = c \|g | L_p(\mathbb{R}^n, t_2)\|. \end{aligned}$$

Выберем $g = t_2^{-(\frac{p}{\theta})'} \chi_{Q_{k_0, m_0}}$. Получаем

$$|Q_{k_0, m_0}|^{\frac{1}{p}} M_{Q_{k_0, m_0}, p}(t_1) (M_{Q_{k_0, m_0}}(t_2^{-\sigma}))^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_{Q_{k_0, m_0}} t_2^{p - (\frac{p}{\theta})' p} \right)^{-\frac{1}{p}} \lesssim c,$$

что приводит к необходимости $M_{Q_{k_0, m_0}, p}(t_1) M_{Q_{k_0, m_0}, \sigma_1}(t_2^{-1}) \leq C$. Остальное аналогично шагу 2 теоремы 8. $\square$

Замечание 11. Очевидно, теорему 8 можно вывести, используя теорему 9. Но для доказательства необходимости условия (34) для совпадения взвешенных пространств Лебега $L_p(\mathbb{R}^n, t_i), i \in \{1, 2\}$, не нужно использовать характеризацию таких пространств через φ -преобразование.

Из (30) и теоремы 9 выводится

Следствие 4. Пусть $0 < \theta < p < \infty$, $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)'$ и $\{t_1^p, t_2^p\} \in A_{\frac{p}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$. Равенство

$$H_p(\mathbb{R}^n, t_1^p) = H_p(\mathbb{R}^n, t_2^p)$$

верно тогда и только тогда, когда выполняется (33). В частности,

$$H_p(\mathbb{R}^n) = H_p(\mathbb{R}^n, t_1^p)$$

тогда и только тогда, когда

$$M_{Q, \sigma_1}(t_1^{-1}) \approx M_{Q, p}(t_1) \approx 1$$

для любого диадического куба Q в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 12. Возникает вопрос, что можно сказать о пространствах Харди с общими весами. Представим следующее возможное определение таких пространств. Пусть $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Зададим $\psi_k = 2^{kn}\psi(2^k \times (-m))$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$p_N(\varphi) := \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^n, |\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\beta \varphi(x)| (1 + |x|)^N < \infty$$

для всех $N \in \mathbb{N}$ и

$$\mathcal{F}_N := \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : p_N(\varphi) \leq 1\}.$$

Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая последовательность, т. е. $t_k \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, $k \in \mathbb{Z}$, и $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через M большой максимальный оператор, заданный как

$$M(f; \{t_k\}) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{t_k |\psi_k * f| : \psi \in \mathcal{F}_N\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Пусть $0 < p < \infty$. Тогда определим пространство Харди $\tilde{H}_p(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ как множество всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f| \tilde{H}_p(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| := \|M(f; \{t_k\})\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Следующие важные свойства пространств последовательностей будут необходимы в дальнейшем ([22], лемма 3.5).

Предложение 3. Пусть $0 < \theta \leq p < \infty$ и $0 < q < \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая весовая последовательность, удовлетворяющая (5) с $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)'$ и $j = k$. Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $\lambda \in \dot{a}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Тогда существует $c > 0$, не зависящее от k и m , такое, что

$$|\lambda_{k,m}| \leq c 2^{k(\frac{n}{p} - \frac{n}{2})} M_{Q_{k,m}, \sigma_1}(t_k^{-1}) \|\lambda\|_{\dot{a}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}.$$

Для изучения вложения Соболева в функциональные пространства $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ требуется

Предложение 4. Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — p -допустимая весовая последовательность. Предположим, что $\{t_k\}$ удовлетворяет условию (5) с $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p}{\theta}\right)'$ и $j = k$.

i) Тогда выражение

$$\|\lambda\|_{\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}^\bullet := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{knq(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_{k,m}|^p (M_{Q_{k,m}, \sigma_1}(t_k^{-1}))^{-p} \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

является эквивалентной квазинормой в $\dot{b}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

ii) Пусть $0 < \theta \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$. Тогда выражение

$$\|\lambda|\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^\bullet := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{k\frac{nq}{2}} (M_{Q_{k,m},\sigma_1}(t_k^{-1}))^{-q} |\lambda_{k,m}|^q \chi_{k,m} \right)^{\frac{1}{q}} |L_p(\mathbb{R}^n)| \right\|$$

является эквивалентной квазинормой в $\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Доказательство аналогично приведенному в ([40], предложение 3.5). Для удобства читателя предоставим некоторые детали. Докажем только ii), так как i) очевидно. Будем действовать в два этапа.

Шаг 1. Докажем, что

$$\|\lambda|\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \lesssim \|\lambda|\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^\bullet. \quad (37)$$

Пусть $0 < \eta < \min(\theta, q)$. Ввиду двойственности $\|\lambda|\dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^\eta$ равна

$$\sup \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\frac{n\eta}{2}k} |\lambda_{k,m}|^\eta \int_{Q_{k,m}} t_k^\eta(x) |g_k(x)| dx = \sup \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k,$$

где супремум берется по всем последовательностям функций $\{g_k\} \in L_{(\frac{p}{\eta})'}(\ell_{(\frac{q}{\eta})'})$ с

$$\|\{g_k\}|L_{(\frac{p}{\eta})'}(\ell_{(\frac{q}{\eta})'})\| \leq 1. \quad (38)$$

По неравенству Гёльдера

$$1 = \left(\frac{1}{|Q_{k,m}|} \int_{Q_{k,m}} t_k^{-\eta h}(x) t_k^{\eta h}(x) dx \right)^{\frac{1}{h}} \leq M_{Q_{k,m},\varrho}(t_k^{-\eta})(M_{Q_{k,m},p}(t_k))^\eta$$

для любого $h > 0$, $\frac{1}{h} = \frac{1}{\varrho} + \frac{\eta}{p}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{Q_{k,m}} t_k^\eta(x) |g_k(x)| dx &\lesssim |Q_{k,m}| (M_{Q_{k,m},p}(t_k))^\eta M_{Q_{k,m},\varrho}(t_k^{-\eta} \mathcal{M}(t_k^\eta g_k)) \lesssim \\ &\lesssim |Q_{k,m}| (M_{Q_{k,m},\sigma_1}(t_k^{-1}))^{-\eta} M_{Q_{k,m},\varrho}(t_k^{-\eta} \mathcal{M}(t_k^\eta g_k)). \end{aligned}$$

Определим

$$f_k(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\frac{kn}{2}} |\lambda_{k,m}| (M_{Q_{k,m},\sigma_1}(t_k^{-1}))^{-1} \chi_{k,m}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выбирая $0 < \varrho < \min\left(\left(\frac{p}{\eta}\right)', \left(\frac{q}{\eta}\right)'\right)$, с помощью неравенства Гёльдера находим, что сумма

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k$ может быть оценена сверху как

$$\begin{aligned} &c \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^\eta(x) \mathcal{M}_\varrho(t_k^{-\eta} \mathcal{M}(t_k^\eta g_k))(x) dx \lesssim \\ &\lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^q \right)^{\frac{\eta}{q}} |L_{\frac{p}{\eta}}(\mathbb{R}^n)| \right\| \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{M}_\varrho(t_k^{-\eta} \mathcal{M}(t_k^\eta g_k)) \right)^{(\frac{q}{\eta})'} \right)^{\frac{1}{(\frac{q}{\eta})'}} |L_{(\frac{p}{\eta})'}(\mathbb{R}^n)| \right\|. \end{aligned}$$

Заметим, $t_k^p \in A_{\frac{p}{\theta}} \subset A_{\frac{p}{\eta}}$, $k \in \mathbb{Z}$, что приводит к $t_k^{-\eta(\frac{p}{\eta})'} \in A_{(\frac{p}{\eta})'}$, $k \in \mathbb{Z}$, согласно условиям i), iv) леммы 1. Используя векторное максимальное неравенство Феффермана и Стейна (8), лемму 3 и (38), получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{\eta},$$

что приводит к (37).

Шаг 2. Докажем обратное неравенство для (37). Пусть $0 < \nu < \min\left(1, \frac{q}{p}\right)$. Имеем

$$|\lambda_{k,m}|^{\nu\theta} = \frac{1}{|Q_{k,m}|} \int_{Q_{k,m}} |\lambda_{k,m}|^{\nu\theta} \chi_{k,m}(y) dy, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Поскольку $\frac{\theta}{\sigma_1} + \frac{\theta}{p} = 1$, с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$|\lambda_{k,m}| \leq M_{Q_{k,m}, \nu p}(\lambda_{k,m} t_k) M_{Q_{k,m}, \nu \sigma_1}(t_k^{-1}) \lesssim \mathcal{M}_{\nu p} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{k,m} t_k \chi_{k,m} \right) (x) M_{Q_{k,m}, \sigma_1}(t_k^{-1})$$

для любого $x \in Q_{k,m}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\lambda | \dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \|^\bullet &\lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{M}_{\nu p} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{\frac{kn}{2}} t_k \lambda_{k,m} \chi_{k,m} \right) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \\ &\lesssim \|\lambda | \dot{f}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \|, \end{aligned}$$

где использовано векторное максимальное неравенство Феффермана и Стейна. $\square$

Приведем теоремы о вложении Соболева для представленных выше пространств. Напомним, что квазибанахово пространство A_1 непрерывно вложено в другое квазибанахово пространство A_2 , $A_1 \hookrightarrow A_2$, если $A_1 \subset A_2$ и существует $c > 0$ такое, что

$$\|f|A_2\| \leq c \|f|A_1\|$$

для всех $f \in A_1$. Пусть $0 < \theta \leq p_0 < p_1 < \infty$, $\sigma_0 = \theta \left(\frac{p_0}{\theta}\right)'$ и $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p_1}{\theta}\right)'$.

Теперь можно доказать следующие факты о вложениях Соболева для исследуемых классов $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

Теорема 10. Пусть $0 < \theta \leq p_0 < p_1 < \infty$ и $0 < q, r < \infty$. Пусть $\{t_k\}$ — p_0 -допустимая последовательность весов, удовлетворяющая (5) с $p = p_0$, $\sigma_0 = \theta \left(\frac{p_0}{\theta}\right)'$. Пусть $\{w_k\}$ — p_1 -допустимая последовательность весов, удовлетворяющая (5) с $p = p_1$, $\sigma_1 = \theta \left(\frac{p_1}{\theta}\right)'$. Предположим, что $0 < q \leq r < \infty$, если $\dot{a} = \dot{b}$. Тогда

$$\dot{A}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \hookrightarrow \dot{A}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\}),$$

если и только если

$$\left(\int_Q t_k^{-\sigma_0}(x) dx \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} \lesssim \left(\int_Q w_k^{-\sigma_1}(x) dx \right)^{\frac{1}{\sigma_1}}, \quad \left(\int_Q w_k^{p_1}(x) dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \lesssim \left(\int_Q t_k^{p_0}(x) dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \quad (39)$$

для любого $Q \in \mathcal{Q}$ с $\ell(Q) = 2^{-k}$.

Доказательство. Разделим доказательство на два шага.

Шаг 1. Необходимость (39). Пусть $k, z \in \mathbb{Z}$ и $m, l \in \mathbb{Z}^n$. Определим

$$\lambda_{z,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } (z, l) = (k, m), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и $\lambda = \{\lambda_{z,l}\}_{z \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}^n}$. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям (21)–(23). Определим

$$T_\psi \lambda = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{z,l} \psi_{z,l}(x).$$

Пусть $Q_{k,m}$ — диадический куб в $\mathbb{R}^n$. Как в доказательстве теоремы 9, получаем

$$\begin{aligned} (w_{k,Q_{k,m}}(p_1))^{p_1} &= \int_{Q_{k,m}} w_k^{p_1}(x) dx = \frac{2^{knp_1}}{|\langle \psi, \varphi \rangle|^p} \int_{Q_{k,m}} |\langle \psi(2^k \times (-m)), \varphi(2^k \times (-m)) \rangle|^{p_1} w_k^{p_1}(x) dx = \\ &= \frac{2^{k\frac{n}{2}p_1}}{|\langle \psi, \varphi \rangle|^{p_1}} \int_{Q_{k,m}} |\langle T_\psi \lambda, \varphi(2^k \times (-m)) \rangle|^{p_1} w_k^{p_1}(x) dx \lesssim \\ &\lesssim 2^{-k\frac{n}{2}p_1} \|\langle T_\psi \lambda, \varphi_{j,h} \rangle\|_{j \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{Z}^n} \|\dot{A}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\})\|^{p_1} \lesssim \\ &\lesssim 2^{-k\frac{n}{2}p_1} \|T_\psi \lambda\|_{\dot{A}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\})}^{p_1} \lesssim 2^{-k\frac{n}{2}p_1} \|T_\psi \lambda\|_{\dot{A}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})}^{p_1}. \end{aligned}$$

Применяя теорему 9, имеем

$$\|T_\psi \lambda\|_{\dot{A}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})} \lesssim \|\{\lambda_{k,m}\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n}\|_{\dot{f}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})} \lesssim 2^{k\frac{n}{2}} t_{k,Q_{k,m}}(p_0),$$

что и является требуемой оценкой. Положим $g = t_k^{-(\frac{p_0}{\theta})'} \chi_{Q_{k,m}}$. Снова, как в теореме 9, без особых трудностей можно получить, что

$$\begin{aligned} (M_{Q_{k,m}}(g^\theta))^{\frac{1}{\theta}} (w_{k,Q_{k,m}}(p_1))^{p_1} &\leq (M_{Q_{k,m}}(g^\theta))^{\frac{1}{\theta}} (t_{k,Q_{k,m}}(p_0))^{p_0} \lesssim \\ &\lesssim \|\mathcal{M}(g^\theta)\|_{L_{\frac{p_0}{\theta}}(\mathbb{R}^n, t_k^\theta)}^{\frac{1}{\theta}} \lesssim \|g^\theta\|_{L_{\frac{p_0}{\theta}}(\mathbb{R}^n, t_k^\theta)}^{\frac{1}{\theta}} = c \|g\|_{L_{p_0}(\mathbb{R}^n, t_k)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$|Q_{k,m}|^{\frac{1}{p_1}} M_{Q_{k,m},p_1}(w_k) (M_{Q_{k,m}}(t_k^{-\sigma_0}))^{\frac{1}{\theta}} \left(\int_{Q_{k,m}} t_k^{p_0 - (\frac{p_0}{\theta})' p_0} \right)^{-\frac{1}{p_0}} \lesssim c,$$

что приводит к необходимости условия $|Q_{k,m}|^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}} M_{Q_{k,m},p_1}(w_k) M_{Q_{k,m},\sigma_0}(t_k^{-1}) \leq C$. Неравенство Гёльдера дает

$$1 = \left(\frac{1}{|Q_{k,m}|} \int_{Q_{k,m}} w_k^\theta(x) w_k^{-\theta}(x) \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq M_{Q_{k,m},p_1}(w_k) M_{Q_{k,m},\sigma_1}(w_k^{-1}). \quad (40)$$

Умножая обе стороны (40) на $|Q_{k,m}|^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}} M_{Q_{k,m},\sigma_0}(t_k^{-1})$, имеем

$$|Q_{k,m}|^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}} M_{Q_{k,m},\sigma_0}(t_k^{-1}) \lesssim M_{Q_{k,m},\sigma_1}(w_k^{-1}),$$

и это приводит к необходимости первого условия, указанного в теореме.

Шаг 2. Достаточность условий (39). Положим

$$w_{k,Q}(\sigma_1) = \left(\int_Q w_k^{-\sigma_1}(x) dx \right)^{\frac{1}{\sigma_1}}, \quad t_{k,Q}(\sigma_0) = \left(\int_Q t_k^{-\sigma_0}(x) dx \right)^{\frac{1}{\sigma_0}}, \quad Q \in \mathcal{Q}.$$

Согласно теореме 3 нужно только доказать вложения

$$\dot{a}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \hookrightarrow \dot{a}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\}).$$

Подшаг 2.1. Рассмотрим случай $\dot{a} = \dot{b}$. Достаточность второй части (39) следует из ([21], теорема 3.6). Пусть $f \in \dot{b}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и $(k, m) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} 2^{-k\frac{n}{p_1}} (M_{Q_{k,m},\sigma_1}(w_k^{-1}))^{-1} &= 2^{-kn(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{\sigma_1})} (w_{k,Q}(\sigma_1))^{-1} \lesssim \\ &\lesssim 2^{-k\frac{n}{\theta}} (t_{k,Q}(\sigma_0))^{-1} = c 2^{-k\frac{n}{p_0}} (M_{Q_{k,m},\sigma_0}(t_k^{-1}))^{-1}, \end{aligned}$$

где положительная константа c не зависит от k и m . Вложение $\ell_{p_0} \hookrightarrow \ell_{p_1}$ дает желаемый результат.

Подшаг 2.2. Рассмотрим случай $\dot{a} = \dot{f}$. Поскольку достаточность второй части (39) следует из ([22], теорема 3.16), нужно изучить только достаточность условия $t_{k,Q}(\sigma_0) \lesssim w_{k,Q}(\sigma_1)$. Пусть $f \in \dot{f}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Без потери общности можем предположить, что

$$\|\lambda | \dot{f}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| = 1.$$

Положим

$$f_k(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{k\frac{n}{2}} |Q_{k,m}|^{\frac{1}{\sigma_1}} (t_{k,Q}(\sigma_0))^{-1} |\lambda_{k,m}| \chi_{k,m}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Согласно предложению 4 и тому факту, что $t_{k,Q_{k,m}}(\sigma_0) \lesssim w_{k,Q_{k,m}}(\sigma_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^n$, получаем

$$\|\lambda | \dot{f}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\})\| \lesssim \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^r \right)^{1/r} |L_{p_1}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Подшаг 2.2.1. Пусть $K \in \mathbb{Z}$ и $y \in (0, \infty)$. Докажем, что

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^r(x) > y^r \right\} \right|$$

не превышает

$$c \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{kn(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} f_k(x) \right) > c 2^{Kn(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} y \right\} \right|.$$

Используя предложение 3, имеем $|\lambda_{k,m}| \lesssim 2^{k(\frac{n}{p_0} - \frac{n}{2})} M_{Q_{k,m},\sigma_0}(t_k^{-1})$ для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}^n$. Следовательно,

$$\sum_{k=-\infty}^K f_k^r(x) \lesssim \sum_{k=-\infty}^K 2^{k\frac{nr}{p_1}} \leq C 2^{K\frac{nr}{p_1}}. \quad (41)$$

С другой стороны, отсюда следует

$$\begin{aligned} \sum_{k=K+1}^{\infty} f_k^r(x) &\lesssim \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{k\frac{n}{2}} |Q_{k,m}|^{\frac{1}{\sigma_0}} (t_{k,Q}(\sigma_0))^{-1} |\lambda_{k,m}| \chi_{k,m}(x) \right)^r \sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{knr(\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma_1})} \lesssim \\ &\lesssim \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{k\frac{n}{2}} |Q_{k,m}|^{\frac{1}{\sigma_0}} (t_{k,Q}(\sigma_0))^{-1} |\lambda_{k,m}| \chi_{k,m}(x) \right)^r 2^{Knr(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0})}. \end{aligned} \quad (42)$$

Используем (41) с K , являющимся наибольшим целым числом таким, что $C2^{K\frac{nr}{p_1}} \leq \frac{y^r}{2}$. Учитывая (42), получаем

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^r(x) > y^r \right\} \right| \lesssim \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=K+1}^{\infty} f_k^r(x) > \frac{y^r}{2} \right\} \right|.$$

Это дает желаемую оценку.

Подшаг 2.2.2. Докажем наше вложение. Тождество

$$\|g|L_{p_1}(\mathbb{R}^n)\|^{p_1} = p_1 \int_0^\infty y^{p_1-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > y\}| dy, \quad g \in L_{p_1}(\mathbb{R}^n),$$

обосновывает оценку

$$\|\lambda|\dot{f}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\})\|^{p_1} \lesssim \int_0^\infty y^{p_1-1} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k^r(x) \right)^{1/r} > y \right\} \right| dy.$$

Таким образом, с помощью подшага 2.2.1 и того факта, что $2^{Kn(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} y \geq c y^{\frac{p_1}{p_0}}$, получаем

$$\|\lambda|\dot{f}_{p_1,r}(\mathbb{R}^n, \{w_k\})\|^{p_1} \lesssim \int_0^\infty y^{p_1-1} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{kn(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} f_k(x) \right) > c y^{\frac{p_1}{p_0}} \right\} \right| dy.$$

После простой замены переменной последний член оценивается как

$$c \int_0^\infty y^{p_0-1} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2^{kn(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} f_k(x) \right) > y \right\} \right| dy \lesssim \|\lambda|\dot{f}_{p_0,\infty}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^{p_0},$$

где снова использовано предложение 4. $\square$

Замечание 13. За информацией о вложениях Соболева во взвешенные пространства Бесова и Трибеля–Лизоркина можно обратиться к ([42]; [43]; [44], предложение 2.1).

Сформулируем теперь последний результат этого раздела.

Теорема 11. Пусть $0 < \theta < q < \infty$ и $j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\{t_k\} \in \dot{X}_{\sigma,q}$ — q -допустимая последовательность весов с $\sigma = \left(\sigma_1 = \theta \left(\frac{q}{\theta} \right)', \sigma_2 \geq q \right)$. Тогда

$$\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, t_j)$$

в смысле эквивалентных квазинорм.

Доказательство. Действуем в два шага.

Шаг 1. Докажем оценку

$$\|f|\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \lesssim \|f|\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, t_j)\| \quad (43)$$

для любого $f \in \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, t_j)$, где неявная константа не зависит от j . Имеем

$$\|f|\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\| \approx \|\{\langle f, \varphi_{k,m} \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} | \dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|.$$

Как в теореме 7, для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и каждого $m \in \mathbb{Z}^n$

$$|\langle f, \varphi_{k,m} \rangle| \leq 2^{-\frac{kn}{2}} \sup_{z \in Q_{k,m}} |f * \tilde{\varphi}_k(z)|,$$

где $\tilde{\varphi} = \varphi(-\cdot)$. Продолжим использовать оценку (26). Выберем $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\sigma_1}$, где $0 < \nu < q$. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и $m, h \in \mathbb{Z}^n$. Из неравенства Гёльдера имеем

$$2^{k\frac{n}{\tau}} \left(\int_{Q_{k,m+h}} |\tilde{\varphi}_k * f(y)|^\tau dy \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq M_{Q_{k,m+h},\nu}(t_j(\tilde{\varphi}_k * f)) M_{Q_{k,m+h},\sigma_1}(t_j^{-1}). \quad (44)$$

Пусть $x \in Q_{k,m} \subset P \in \mathcal{Q}$ и $y \in Q_{k,m+h}$. Тогда

$$|y - x_P| \leq |y - x| + |x - x_P| \leq (2\sqrt{n} + |h|)2^{-k} + \sqrt{n}2^{-k_P} \leq (3\sqrt{n} + |h|)2^{-k_P},$$

где $k_P = -\log_2 l(P)$. Пусть $i \in \mathbb{N}$ таково, что $2^{i-1} \leq 3\sqrt{n} + |h| < 2^i$. Тогда y находится в шаре $B(x_P, 2^{i-k_P})$. Следовательно, правая часть (44) не превышает

$$M_{Q_{k,m+h},\nu} \left(t_j(\tilde{\varphi}_k * f) \chi_{B(x_P, 2^{i-k_P})} \right) M_{Q_{k,m+h},\sigma_1}(t_j^{-1}).$$

Определим $g(h) = (1 + |h|)^{\frac{n\tau}{\theta} + n\tau - M}$ и $\omega(h) = (1 + |h|)^{\frac{n\tau}{\theta} + n\tau - M - \frac{\tau n}{q}}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Повторяя рассуждение из доказательства теоремы 7, получаем

$$\begin{aligned} (M_{Q_{k,m},q}(t_k))^\tau \left(\sup_{z \in Q_{k,m}} |\tilde{\varphi}_k * f(z)| \right)^\tau &\lesssim \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} (1 + |h|)^{\frac{n\tau}{\theta} - M} \left(M_{Q_{k,m+h},\nu} \left(t_j(\tilde{\varphi}_k * f) \chi_{B(x_P, 2^{i-k_P})} \right) \right)^\tau \lesssim \\ &\lesssim \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} g(h) \left(\mathcal{M}_\nu \left(t_j(\tilde{\varphi}_k * f) \chi_{B(x_P, 2^{i-k_P})} \right) (x) \right)^\tau \end{aligned}$$

для любого $x \in Q_{k,m} \subset P \in \mathcal{Q}$, $k \geq k_P$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Следовательно,

$$2^{k\frac{nq}{2}} \left((M_{Q_{k,m},q}(t_k))^\tau |\langle f, \varphi_{k,m} \rangle|^\tau \right)^{\frac{q}{\tau}} \lesssim \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}^n} g(h) \left(\mathcal{M}_\nu \left(t_j(\tilde{\varphi}_k * f) \chi_{B(x_P, 2^{i-k_P})} \right) (x) \right)^\tau \right)^{\frac{q}{\tau}}$$

для любого $x \in Q_{k,m} \subset P \in \mathcal{Q}$, $k \geq k_P$, $m \in \mathbb{Z}^n$, и

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=-\log_2 l(P)}^\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{k\frac{nq}{2}} \left((M_{Q_{k,m},q}(t_k))^\tau |\langle f, \varphi_{k,m} \rangle|^\tau \right)^{\frac{q}{\tau}} \chi_{Q_{k,m} \cap P} \right)^{\frac{\tau}{q}} \lesssim \\ &\lesssim \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} g(h) \left(\sum_{k=-\log_2 l(P)}^\infty \left(\mathcal{M}_\nu \left(t_j(\tilde{\varphi}_k * f) \chi_{B(x_P, 2^{i-k_P})} \right) \right)^q \right)^{\frac{\tau}{q}}. \end{aligned}$$

По предложению 2 и теореме 2 получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \{ \langle f, \varphi_{k,m} \rangle \}_{k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^n} \dot{f}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \right\|^\tau \lesssim \\ &= \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^{\frac{\tau}{q}}} \left\| \left(\sum_{k=k_P}^\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{kn\frac{q}{2}} \left((M_{Q_{k,m},q}(t_k))^\tau |\langle f, \varphi_{k,m} \rangle|^\tau \right)^{\frac{q}{\tau}} \chi_{Q_{k,m} \cap P} \right)^{\frac{\tau}{q}} |L_{\frac{q}{\tau}}(\mathbb{R}^n)| \right\| \lesssim \\ &\lesssim \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} g(h) \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|P|^{\frac{\tau}{q}}} \left\| \left(\sum_{k=k_P-i}^\infty \left(\mathcal{M}_\nu \left(t_j(\tilde{\varphi}_k * f) \chi_{B(x_P, 2^{i-k_P})} \right) \right)^q \right)^{\frac{\tau}{q}} |L_{\frac{q}{\tau}}(\mathbb{R}^n)| \right\| \lesssim \end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} \omega(h) \sup_{P \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|B(x_P, 2^{i-k_P})|^{\frac{\tau}{q}}} \left\| \left(\sum_{k=k_P-i}^{\infty} \left(t_j (\tilde{\varphi}_k * f) \chi_{B(x_P, 2^{i-k_P})} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} |L_q(\mathbb{R}^n)| \right\|^{\tau} \lesssim \|f| \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, t_j)\|^{\tau}$$

при условии, что M достаточно велико, а неявная константа не зависит от j .

Шаг 2. Как и на шаге 1, противоположное (43) неравенство следует из рассуждений шага 2 теоремы 7. $\square$

Пусть BMO — пространство функций с ограниченной средней осцилляцией [45]. Из теоремы 11 с использованием тех же аргументов, что и в доказательстве теоремы 9, делаем следующий вывод.

Следствие 5. Пусть $0 < \theta < q < \infty$, $\sigma_1 = \theta \left(\frac{q}{\theta}\right)'$ и $\{t_1^q, t_2^q\} \in A_{\frac{q}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$. Равенство

$$\dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, t_1) = \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, t_2)$$

верно тогда и только тогда, когда

$$M_{Q,\sigma_1}(t_1^{-1}) \approx M_{Q,\sigma_1}(t_2^{-1}) \quad \text{и} \quad M_{Q,q}(t_1) \approx M_{Q,q}(t_2)$$

для любого диадического куба Q в $\mathbb{R}^n$. В частности, если $t^q \in A_{\frac{q}{\theta}}(\mathbb{R}^n)$, то

$$BMO = \dot{F}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n, t)$$

тогда и только тогда, когда $M_{Q,\sigma_1}(t^{-1}) \approx M_{Q,q}(t) \approx 1$ для любого диадического куба Q в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 14. За информацией о связи между пространством BMO и пространствами Трибеля–Лизоркина читатель может обратиться к [46].

Благодарим рецензента за множество ценных комментариев и предложений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cobos F., Fernandez D.L. *Hardy–Sobolev spaces and Besov spaces with a function parameter*, Funct. Spaces Appl. **1302**, 158–170 (1986).
- [2] Гольдман М.Л. *Описание следов для некоторых функциональных пространств*, Тр. МИАН СССР, **150**, 99–127 (1979).
- [3] Гольдман М.Л. *Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова*, Тр. МИАН СССР, **156**, 47–81 (1980).
- [4] Калябин Г.А. *Описания функций из классов типа Бесова–Лизоркина–Трибеля*, Тр. МИАН СССР, **156**, 82–109 (1980).
- [5] Kalyabin G.A., Lizorkin P.I. *Spaces of functions of generalized smoothness*, Math. Nachr. **133** (1), 7–32 (1987).
- [6] Бесов О.В. *Эквивалентные нормировки пространств функций переменной гладкости*, Функци. пространства, прикл. дифф. урав. Сб. статей. К 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, 87–95 (2003).
- [7] Бесов О.В. *Об интерполяции, вложении и продолжении пространств функций переменной гладкости*, Докл. АН, **401** (1), 7–11 (2005).
- [8] Бесов О.В. *Интерполяция, вложение и продолжение пространств функций переменной гладкости*, Исследов. по теории функц. и дифф. урав. Сб. статей. К 100-летию со дня рожд. ак. Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **248**, 47–58 (2005).
- [9] Voicu J.-M. *Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations*, Taniguchi Symp. HERT, 11–49, Katata (1986).
- [10] Kempka H. *Generalized 2-microlocal Besov spaces*, PhD thesis (Friedrich-Schiller-Universität, Jena, 2008).

- [11] Dominguez O., Tikhonov S. *Function spaces of logarithmic smoothness: embeddings and characterizations*, Mem. Amer. Math. **282** (1393) (2023).
- [12] Ansorena J.L., Blasco O. *Atomic decomposition of weighted Besov spaces*, J. Lond. Math. Soc. **53** (1), 127–140 (1996).
- [13] Almeida A. *Wavelet bases in generalized Besov spaces*, J. Math. Anal. Appl. **304** (1), 198–211 (2005).
- [14] Bownik M., Ho K.-P. *Atomic and molecular decompositions of anisotropic Triebel-Lizorkin spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (4), 1469–1510 (2006).
- [15] Farkas W., Leopold H.-G. *Characterisations of function spaces of generalised smoothness*, Annali di Mat. Pura Appl. **185** (1), 1–62 (2006).
- [16] Haroske D.D., Moura S.D. *Continuity envelopes and sharp embeddings in spaces of generalized smoothness*, J. Funct. Anal. **254** (6), 1487–1521 (2008).
- [17] Edmunds D., Triebel H. *Spectral theory for isotropic fractal drums*, C.R. Acad. Sci. Ser. I. Math., **326** (11), 1269–1274 (1998).
- [18] Edmunds D., Triebel H. *Eigenfrequencies of isotropic fractal drums*, Oper. Theory: Adv. & Appl. **110**, 81–102 (1999).
- [19] Moura S.D. *Function spaces of generalised smoothness*, Diss. Math. **398**, 1–88 (2001).
- [20] Тюленев А.И. *О некоторых новых пространствах функций переменной гладкости*, Матем. сб. **206** (6), 85–128 (2015).
- [21] Drihem D. *Besov spaces with general weights*, J. Math. Study. **56** (1), 18–92 (2023).
- [22] Drihem D. *Triebel-Lizorkin spaces with general weights*, Adv. Oper. Theory. **8**, article 5 (2023).
- [23] Muckenhoupt B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165**, 207–226 (1972).
- [24] Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J.L. *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud. **116**, Math. Notes, 104 (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985).
- [25] Grafakos L. *Classical Fourier Analysis*, Third Edition, Graduate Texts Math. **249** (Springer, New York, 2014).
- [26] Tyulenev A.I. *Besov-type spaces of variable smoothness on rough domains*, Nonlinear Anal. **145**, 176–198 (2016).
- [27] Tyulenev A.I. *On various approaches to Besov-type spaces of variable smoothness*, J. Math. Anal. Appl. **451** (1), 371–392 (2017).
- [28] Fefferman C., Stein E.M. *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. **93** (1), 107–115 (1971).
- [29] Benedek A., Calderón A.-P., Panzone R. *Convolution operators on Banach space valued functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **48** (3), 356–365 (1962).
- [30] Grafakos L., Liu L., Yang D. *Vector-valued singular integrals and maximal functions on spaces of homogeneous type*, Math. Scand. **104** (2), 296–310 (2009).
- [31] Andersen K., John R. *Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **69**, 19–31 (1980).
- [32] Кокилашвили В.М. *Максимальные неравенства и мультипликаторы в весовых пространствах Лизоркина-Трибеля*, Докл. АН СССР, **239** (1), 42–45 (1978).
- [33] Frazier M., Jawerth B., Weiss G. *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*. CBMS Regional Conf. Ser. Math. (79). Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences. Amer. Math. Soc. (Providence, 1991).
- [34] Drihem D. *Duality of Triebel-Lizorkin spaces with general weights*. arXiv:2402.04635v1 (2024).
- [35] Frazier M., Jawerth B. *Decomposition of Besov spaces*, Indiana Univ. Math. J. **34**, 777–799 (1985).
- [36] Frazier M., Jawerth B. *A discrete transform and decomposition of distribution spaces*, J. Funct. Anal. **93** (1), 34–170 (1990).
- [37] Triebel H. *Theory of function spaces* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1983).
- [38] Bui H.Q. *Weighted Besov and Triebel spaces: interpolation by the real method*, Hiroshima Math. J. **12** (3), 581–605 (1982).
- [39] Tang C. *A note on weighted Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces*, J. Funct. Spaces Appl. **2013**, article ID 865835.
- [40] Drihem D. *Complex interpolation of function spaces with general weights*, Comment. Math. Univ. Carolin. **64** (3) 289–320 (2023).
- [41] Strömberg J.-O., Torchinsky A. *Weighted Hardy spaces*, Lect. Notes Math. **1381** (Springer-Verlag, Berlin, 1989).

- [42] Kuhn Th., Leopold H.-G., Sickel W., Skrzypczak L. *Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces*. II, Proc. Edinburgh Math. Soc. **49** (2), 331–359 (2006).
- [43] Meyries M., Veraar M. *Characterization of a class of embeddings for function spaces with Muckenhoupt weights*, Arch. Math. **103** (5), 435–449 (2014).
- [44] Haroske D.D., Skrzypczak L. *Entropy and approximation numbers of embeddings of function spaces with Muckenhoupt weights*. I, Rev. Mat. Complut. **21** (1), 135–177 (2008).
- [45] Grafakos L. *Modern Fourier Analysis*, Second Edition, Graduate Texts Math. **250** (Springer, New York, 2009).
- [46] Бочкарев С.В. *Ряды Валле-Пуссена в пространствах ВМО, L_1 и $H^1(D)$, и мультипликативные неравенства*, Теор. функц. и дифф. урав. Сб. статей. К девяностолетию со дня рожд. ак. Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, **210**, 41–64 (1995).

Доуади Дрихем

Университет Мсила,

Мсила, 28000, Алжир,

e-mail: douadidr@yahoo.fr, douadi.drihem@univ-msila.dz

D. Drihem

On the function spaces of general weights

Abstract. The aim of this paper is twofold. First, we establish the φ -transform characterizations of the Besov spaces $\dot{B}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ and the Triebel–Lizorkin spaces $\dot{F}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ for $q = \infty$, in the sense of Frazier and Jawerth. Second, under some suitable assumptions on a p -admissible weight sequence $\{t_k\}$, we prove that

$$\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) = \dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

in the sense of equivalent quasi-norms, with $\dot{A} \in \{\dot{B}, \dot{F}\}$. Moreover, we find a necessary and sufficient condition for the coincidence of the spaces $\dot{A}_{p,q}(\mathbb{R}^n, t_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Keywords: Besov space, Hardy space, Triebel–Lizorkin space, Muckenhoupt class.

Douadi Drihem

M'sila University,

M'sila, 28000 Algeria,

e-mail: douadidr@yahoo.fr, douadi.drihem@univ-msila.dz