

А.Н. АБЫЗОВ, Т.Д. БУЙ

СЛАБО ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ И СЛАБО ПРОЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ

Аннотация. Изучены слабо инъективные и слабо проективные модули, которые являются расширениями соответственно классов квазиинъективных и квазипроективных модулей. Получены описания слабо инъективных и слабо проективных абелевых групп, а также некоторых близких к ним классов абелевых групп.

Ключевые слова: слабо инъективный модуль, слабо проективный модуль, слабо эндоморфизм-продолжаемый модуль, слабо эндоморфизм-поднимаемый модуль, абелева группа.

УДК: 512.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-12-3-26

ВВЕДЕНИЕ

В алгебре и, в частности, в теории модулей, большое значение имеют инъективные и проективные модули и близкие к ним классы модулей. Важными классами модулей, близких к инъективным, являются квазиинъективные модули, эндоморфизм-продолжаемые модули, псевдопроективные модули (или автоморфизм-инвариантные модули), автоморфизм-продолжаемые модули и ряд других классов модулей, изученных во многих работах.

Впервые квазиинъективные модули были изучены в работе [1], как модули, инвариантные относительно эндоморфизмов своих инъективных оболочек. В этой же работе было показано, что модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M является M -инъективным модулем. В работе [2] было введено понятие псевдоинъективного модуля, т. е. модуля, в котором каждый мономорфизм из подмодуля модуля M в модуль M продолжается до некоторого эндоморфизма M . Модуль, инвариантный относительно автоморфизмов своей инъективной оболочки, называется автоморфизм-инвариантным. Автоморфизм-инвариантные модули над конечномерными алгебрами были введены и изучены в [3]. Тот факт, что классы псевдоинъективных модулей и автоморфизм-инвариантных модулей совпадают, был показан в [4]. Понятия относительной существенной инъективности и относительной слабо инъективности для модулей были введены в статье [5] при исследовании важной проблемы о нахождении условий, при которых прямая сумма CS-модулей является CS-модулем. Модуль существенно инъективен относительно самого себя называется существенно квазиинъективным. Существенно квазиинъективные модули являются естественным расширением класса автоморфизм-инвариантных модулей и, как было показано в работе [6], совпадают с

Поступила в редакцию 17.10.2024, после доработки 30.10.2024. Принята к публикации 18.12.2024.

Благодарности. Работа Абызова А.Н. выполнена при финансовой поддержке РНФ и Кабинета Министров Республики Татарстан (проекта № 23-21-10086) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

классом модулей, которые инвариантны относительно эндоморфизмов своих инъективных оболочек, у которых ядра существенны.

Модуль M называется автоморфизм-продолжаемым (соответственно, эндоморфизм-продолжаемым), если всякий автоморфизм (соответственно, эндоморфизм) каждого подмодуля модуля M продолжается до некоторого эндоморфизма модуля M . В работах [7], [8] А.А. Туганбаевым было показано, что над всяким полуартиновым справа кольцом классы квазиинъективных (соответственно, автоморфизм-инвариантных) правых модулей и эндоморфизм-продолжаемых (соответственно, автоморфизм-продолжаемых) правых модулей совпадают. Аналогичный результат для существенно квазиинъективных модулей был получен в [9]. А именно, было показано, что над существенно полуартиновыми (существенно нетеровыми) справа кольцами классы существенно квазиинъективных правых модулей и существенно эндоморфизм-продолжаемых правых модулей совпадают.

Важными примерами модулей, близких к проективным, являются квазипроективные модули, автоморфизм-коинвариантные модули, эндоморфизм-поднимаемые модули и автоморфизм-поднимаемые модули. Понятие квазипроективного модуля двойственно понятию квазиинъективного модуля. С квазипроективными модулями тесно связаны эндоморфизм-поднимаемые модули. Модуль M называется эндоморфизм-поднимаемым, если эндоморфизм каждого фактор-модуля модуля M поднимается до эндоморфизма M . В работе [10] было показано, что над совершенным справа кольцом R правый R -модуль M является квазипроективным в точности тогда, когда M — эндоморфизм-поднимаемый модуль. Двойственным аналогом автоморфизм-инвариантных модулей являются автоморфизм-коинвариантные модули, введенные и изученные в работе [11]. С автоморфизм-коинвариантными модулями тесно связаны автоморфизм-поднимаемые модули, которые впервые были изучены в [12] и являются естественным расширением класса эндоморфизм-поднимаемых модулей. Модуль M называется автоморфизм-поднимаемым, если автоморфизм каждого фактор-модуля M поднимается до эндоморфизма M . В статье [12], в частности, был найден ряд условий на модуль M , при которых из автоморфизм-поднимаемости M следует автоморфизм-коинвариантность (квазипроективность) M .

В работах [13], [14] А.П. Мишиной были систематически изучены абелевы группы, близкие к проективным и инъективным. Эндоморфизм-продолжаемые и автоморфизм-продолжаемые абелевы группы были описаны в [13]. В статье [14] были описаны эндоморфизм-поднимаемые и автоморфизм-поднимаемые абелевы группы. Широкие обобщения результатов А.П. Мишиной на случай модулей над некоммутативными аналогами дедекиндовых колец были получены А.А. Туганбаевым, которые им были систематически изложены в монографии [15] и в обзорной работе [16]. Квазиинъективные абелевы группы описаны в [17]. В статье [18] описаны квазипроективные абелевы группы.

Важным расширением классов модулей, близких к инъективным, упомянутых выше, являются ADS -модули. Модуль M называется ADS -модулем, если для каждого его разложения $M = A \oplus B$ подмодули A и B взаимно инъективны. ADS -абелевы группы впервые были введены в монографии Л. Фукса [19] и в последующем ADS -модули были изучены во многих работах. Строение ADS -абелевых групп изучалось в работах [20], [21]. Одним из обобщений ADS -модулей является $LADS$ -модули, впервые введенные в [22]. Модуль M называется $LADS$ -модулем, если для каждого его разложения $M = A \oplus B$ подмодули A и B взаимно существенно инъективны. Примерами $LADS$ -модулей являются существенно эндоморфизм-продолжаемые модули, введенные и изученные в работе [9]. В этой же работе было получено описание $LADS$ -абелевых групп.

В настоящей работе изучаются слабо инъективные модули, слабо проективные модули и близкие к ним классы модулей. В разделе 1 изучены слабо инъективные модули и слабо эндоморфизм-продолжаемые модули. Показано, что над полуартиновыми справа кольцами классы слабо инъективных модулей и слабо эндоморфизм-продолжаемых модулей совпадают. Описаны слабо инъективные и слабо эндоморфизм-продолжаемые абелевы группы. В разделе 2 изучены слабо проективные модули и близкие к ним классы модулей. Доказано, что над совершенными справа кольцами классы слабо проективных модулей и слабо эндоморфизм-поднимаемых модулей совпадают. Получено описание слабо проективных и слабо эндоморфизм-поднимаемых абелевых групп.

Пусть M — правый R -модуль и A — подмодуль модуля M . Через $\sigma_M^A : M \rightarrow M/A$ будем обозначать естественный гомоморфизм. Тот факт, что N является подмодулем (соответственно, существенным подмодулем, малым подмодулем) модуля M будем обозначать через $N \leq M$ (соответственно, через $N \leq_e M$, $N \ll M$). Инъективная оболочка модуля M обозначается $E(M)$. Множество всех простых натуральных чисел будем обозначать $\mathbb{P}$. В работе используются стандартные понятия и факты теории модулей и теории абелевых групп (см., например, [23]–[25]).

1. СЛАБО ИНЪЕКТИВНЫЕ И СЛАБО ЭНДОМОРФИЗМ-ПРОДОЛЖАЕМЫЕ МОДУЛИ

Пусть M и N — правые R -модули. Модуль N называется *слабо M -инъективным*, если для каждого его подмодуля A и всякого гомоморфизма $f : A \rightarrow N$, у которого ядро f является ненулевым, существует такой гомоморфизм $f' : M \rightarrow N$, что $f'|_A = f$. Правый R -модуль M называется *слабо инъективным модулем*, если M является слабо M -инъективным.

Ясно, что каждый слабо инъективный модуль является существенно квазиинъективным. Кроме того, модуль M является квазиинъективным модулем в точности тогда, когда он является одновременно слабо инъективным и псевдоинъективным.

Назовем правый R -модуль M *слабо эндоморфизм-продолжаемым*, если для каждого его подмодуля A любой эндоморфизм $f \in \text{End}(A)$, у которого $\text{Ker } f \neq 0$, продолжается до некоторого эндоморфизма f' модуля M .

Несложно заметить, что каждый слабо инъективный модуль является слабо эндоморфизм-продолжаемым и каждый слабо эндоморфизм-продолжаемый модуль является существенно эндоморфизм-продолжаемым.

С помощью стандартных рассуждений можно показать, что правый R -модуль M является слабо эндоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда для любого его существенного подмодуля A всякий эндоморфизм A , у которого ядро ненулевое, продолжается до эндоморфизма M .

Теорема 1 ([26], 2.15). *Пусть M — правый R -модуль. Имеют место следующие утверждения:*

- 1) *прямое произведение $\prod_{i \in I} U_i$ семейства правых R -модулей $\{U_i\}_{i \in I}$ является слабо M -инъективным в точности тогда, когда модуль U_i является слабо M -инъективным для всех $i \in I$;*
- 2) *если $0 \rightarrow M'_R \rightarrow M_R \rightarrow M''_R \rightarrow 0$ является точной последовательностью правых R -модулей и правый R -модуль U является слабо M -инъективным, то U также является слабо M' -инъективным и слабо M'' -инъективным.*

Теорема 2. *Для правых R -модулей M и N следующие условия эквивалентны:*

- 1) *модуль N слабо M -инъективен;*

- 2) для любого существенного подмодуля A модуля M и гомоморфизма $f : A \rightarrow N$ с ненулевым ядром существует гомоморфизм $f' : M \rightarrow N$ такой, что $f'|_A = f$;
 3) для каждого гомоморфизма $f : E(M) \rightarrow E(N)$ с ненулевым ядром выполняется условие $f(M) \leq N$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим гомоморфизм $f : E(M) \rightarrow E(N)$, у которого $\text{Ker} f \neq 0$. Пусть $A = f^{-1}(N) \cap M$. Так как $f^{-1}(N) \leq_e E(M)$, то $A \leq_e M$ и $\text{Ker} f \cap A \neq 0$. Согласно условию 2) существует гомоморфизм $f' : M \rightarrow N$ такой, что $f'|_A = f|_A$. Положим $g = f' - f|_M$. Тогда $g(A) = 0$. Для каждого $a \in M \setminus A$ имеем $f(a) \notin N$ и, следовательно, поскольку $g(a) = f'(a) - f(a) \notin N$, то $g(M) \cap N = 0$. Так как $N \leq_e E(N)$, то $g(M) = 0$. Таким образом, $f(M) = f'(M) \leq N$.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A \leq M$ и $f : A \rightarrow N$ — гомоморфизм, у которого $\text{Ker} f \neq 0$. Существует гомоморфизм $h : E(M) \rightarrow E(N)$, для которого имеет место равенство $h|_A = f$. Так как $\text{Ker} f \leq \text{Ker} h$, то $\text{Ker} h \neq 0$. Тогда согласно условию 3) имеем $h(M) \leq N$. $\square$

Теорема 3. Для правых R -модулей M и N следующие условия эквивалентны:

- 1) N слабо M -инъективен;
- 2) N слабо K -инъективен для любого подмодуля $K \leq M$;
- 3) N слабо K -инъективен для любого конечно-порожденного подмодуля K в M ;
- 4) N слабо K -инъективен для любого 2-порожденного подмодуля K в M .

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует из теоремы 1.

2) $\Rightarrow$ 3) и 3) $\Rightarrow$ 4) очевидны.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A \leq M$ и $f : A \rightarrow N$ — гомоморфизм, у которого $\text{Ker} f \neq 0$. Рассмотрим множество $F := \{(K, f_K) \mid A \leq K \leq M, f_K \in \text{Hom}(K, N) \text{ и } f_K|_A = f\}$. Введем отношение порядка на множестве F согласно правилу $(K'; f_{K'}) \leq (K''; f_{K''})$, если $K' \leq K''$ и $f_{K''}|_{K'} = f_{K'}$. Согласно лемме Цорна в частично упорядоченном множестве F существует максимальный элемент $(L; f_L)$. Предположим, что L не является существенным подмодулем в модуле M . Тогда существует элемент $x \in M$ такой, что $xR \cap L = 0$. Рассмотрим подмодуль $L' = L \oplus xR$. Определим гомоморфизм $f_{L'} : L' \rightarrow N$ согласно правилу $f_{L'}(l + xr) = f_L(l)$ для всех $l \in L$ и $r \in R$. Тогда $(L; f_L) \not\leq (L'; f_{L'})$, что противоречит выбору пары $(L; f_L)$. Следовательно, L является существенно подмодулем в M .

Предположим, что $L \neq M$. Тогда для некоторого элемента a из модуля M имеем $a \in M \setminus L$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $aR \cap \text{Ker} f_L \neq 0$. Рассмотрим гомоморфизм $f_{L \cap aR} := f_L|_{L \cap aR}$. Ясно, что $\text{Ker}(f_{L \cap aR}) = aR \cap \text{Ker} f_L \neq 0$. Поскольку aR является 2-порожденным модулем, то модуль N слабо aR -инъективен. Таким образом, согласно условию 4) существует такой гомоморфизм $g : aR \rightarrow N$, что $g|_{L \cap aR} = f_{L \cap aR}$. Существует корректно определенный гомоморфизм $f_{L+aR} : L + aR \rightarrow N$, действующий согласно правилу $f_{L+aR}(l + ar) = f_L(l) + g(ar)$ для всех $l \in L$ и $r \in R$. Тогда $(L + aR; f_{L+aR}) \not\geq (L; f_L)$. Получили противоречие с выбором пары $(L; f_L)$.

Случай 2. $aR \cap \text{Ker} f_L = 0$. Выберем $0 \neq b \in \text{Ker} f_L$. Рассмотрим гомоморфизм $f_{(L \cap aR) \oplus bR} := f_L|_{(L \cap aR) \oplus bR}$. Ясно, что $\text{Ker} f_{(L \cap aR) \oplus bR} = bR \neq 0$. Поскольку $aR \oplus bR$ является 2-порожденным модулем, то согласно условию 4) модуль N слабо $aR \oplus bR$ -инъективен. Следовательно, существует гомоморфизм $g : aR \oplus bR \rightarrow N$ такой, что $g|_{(L \cap aR) \oplus bR} = f_{(L \cap aR) \oplus bR}$. Существует корректно определенный гомоморфизм $f_{L+aR} : L + aR \rightarrow N$, действующий согласно правилу $f_{L+aR}(l + ar) = f_L(l) + g(ar)$ для любого $l \in L$ и $r \in R$. Тогда $(L + aR; f_{L+aR}) \not\geq (L; f_L)$. Получили противоречие с выбором пары $(L; f_L)$.

Таким образом, $L = M$. $\square$

Теорема 4. Для конечно-порожденного правого R -модуля M и семейства правых R -модулей $\{N_i\}_{i \in I}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль $\bigoplus_{i \in I} N_i$ слабо M -инъективен;
- 2) модуль $\bigoplus_{j \in J} N_j$ слабо M -инъективен для каждого счетного подмножества $J \subseteq I$;
- 3) модуль N_i слабо M -инъективен для каждого $i \in I$ и для всякого семейства гомоморфизмов $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, где $f_i \in \text{Hom}(M, N_{\pi(i)})$ для каждого $i \in \mathbb{N}$, и $\pi : \mathbb{N} \rightarrow I$ — некоторое инъективное отображение, возрастающая цепь

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Ker} f_i \leq \bigcap_{i=2}^{\infty} \text{Ker} f_i \leq \dots$$

стабилизируется;

- 4) модуль N_i слабо M -инъективен для каждого $i \in I$ и для всякого семейства гомоморфизмов $\{f_i \in \text{Hom}(M, N_i) \mid i \in I\}$ модуль M удовлетворяет условию максимальнойности для множества подмодулей модуля M вида $\left\{ \bigcap_{i \in I'} \text{Ker} f_i \mid I' \subseteq I \right\}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует из теоремы 1 (п. 1)).

Импlicationи 2) $\Rightarrow$ 3) и 4) $\Rightarrow$ 1) следуют из ([26], леммы 2.17).

3) $\Rightarrow$ 4). Предположим, что для некоторого семейства гомоморфизмов $\{f_i \in \text{Hom}(M, N_i) \mid i \in I\}$ имеет место бесконечная возрастающая цепь $A_0 < A_1 < A_2 < \dots$, где $A_n = \bigcap_{i \in I_n} \text{Ker} f_i$

и $I_n \subseteq I$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеет место бесконечная строго убывающая цепь $F_1 \supsetneq F_2 \supsetneq F_3 \supsetneq \dots$, где $F_n = \{f_i \mid i \in I, f_i(A_n) = 0\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $f_{i_n} \in F_n \setminus F_{n+1}$. Поскольку $f_{i_k}(A_{n+1}) = 0$ для любого $k \geq n+1$, то

$\bigcap_{k=n+1}^{\infty} \text{Ker} f_{i_k} \geq A_{n+1}$. Так как $f_{i_n}(A_{n+1}) \neq 0$, то $\bigcap_{k=n}^{\infty} \text{Ker} f_{i_k} \neq \bigcap_{k=n+1}^{\infty} \text{Ker} f_{i_k}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Получили противоречие с условием 3). $\square$

Теорема 5. Для правого R -модуля M следующие условия равносильны:

- 1) модуль M является локально нетеровым;
- 2) любая прямая сумма (слабо) M -инъективных модулей является слабо M -инъективным модулем;
- 3) любая прямая сумма инъективных модулей является слабо M -инъективным модулем;
- 4) любая счетная прямая сумма (слабо) M -инъективных модулей является слабо M -инъективным модулем;
- 5) любая счетная прямая сумма инъективных модулей является слабо M -инъективным модулем;
- 6) если модуль N (слабо) M -инъективен, то для любого множества I модуль $N^{(I)}$ является слабо M -инъективным;
- 7) если N — инъективный правый R -модуль, то для любого множества I модуль $N^{(I)}$ является слабо M -инъективным;
- 8) если модуль N (слабо) M -инъективен, то модуль $N^{(\mathbb{N})}$ является слабо M -инъективным;
- 9) если N — инъективный правый R -модуль, то модуль $N^{(\mathbb{N})}$ является слабо M -инъективным;

- 10) любая прямая сумма инъективных оболочек простых правых R -модулей является слабо M -инъективным модулем;
 11) любая счетная прямая сумма инъективных оболочек простых правых R -модулей является слабо M -инъективным модулем.

Доказательство. Импликации $2) \Rightarrow 4) \Rightarrow 8)$, $2) \Rightarrow 6) \Rightarrow 8)$, $2) \Rightarrow 3)$, $3) \Rightarrow 7) \Rightarrow 9)$, $3) \Rightarrow 5) \Rightarrow 9)$, $8) \Rightarrow 9)$, $3) \Rightarrow 10) \Rightarrow 11)$ очевидны.

$1) \Rightarrow 2)$. Пусть $\{N_i\}_{i \in I}$ — семейство правых R -модулей, причем N_i слабо M -инъективен для любого $i \in I$. Пусть K — произвольный конечно-порожденный подмодуль модуля M . Согласно теореме 1 модуль N_i слабо K -инъективен для любого $i \in I$. Тогда из теоремы 4 следует, что $\bigoplus_{i \in I} N_i$ — слабо K -инъективный модуль. Следовательно, согласно теореме 3, модуль $\bigoplus_{i \in I} N_i$ слабо M -инъективен.

$9) \Rightarrow 11)$. Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ — семейство простых модулей, где I — счетное множество. Пусть $N = E(\bigoplus_{i \in I} S_i)$. Для каждого $i \in I$ имеет место разложение $N = E(S_i) \oplus K_i$. Тогда

$$N^{(I)} = \left(\bigoplus_{i \in I} E(S_i) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} K_i \right).$$

Согласно условию 9) модуль $N^{(I)}$ слабо M -инъективен. Тогда из теоремы 1 следует, что $\bigoplus_{i \in I} E(S_i)$ также является слабо M -инъективным.

$11) \Rightarrow 1)$. Предположим, что модуль M не является локально нетеровым. Тогда в M существует такой элемент m , что в модуле mR существует бесконечная строго возрастающая цепь подмодулей $0 \neq A_1 < A_2 < \dots$. Для каждого $i = 1, 2, \dots$ выберем элемент $c_i \in A_{i+1} \setminus A_i$. Тогда в циклическом модуле $(c_i R + A_i)/A_i$ существует максимальный подмодуль N_i/A_i . Положим $S_i := \frac{(c_i R + A_i)/A_i}{N_i/A_i} \cong (c_i R + A_i)/N_i$ и пусть $\varphi_i : (c_i R + A_i)/A_i \rightarrow S_i$ — естественный

гомоморфизм. Положим $A := \bigcup_{i=1}^n A_i$. Существует гомоморфизм $f_i : A/A_i \rightarrow E(S_i)$ такой, что $f_i \circ id_i = \iota_i \circ \varphi_i$, где $id_i : (c_i R + A_i)/A_i \rightarrow (A/A_i)$ и $\iota_i : S_i \rightarrow E(S_i)$ — естественные вложения. Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (c_i R + A_i)/A_i & \xrightarrow{id_i} & A/A_i \\ \downarrow \varphi_i & & \downarrow f_i \\ S_i & \xrightarrow{\iota_i} & E(S_i) \end{array}.$$

Для каждого $a \in A$ существует такое натуральное число $n_a \in \mathbb{N}$, что $a \in A_i$ для каждого $i \geq n_a$. Рассмотрим гомоморфизм $f : A \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E(S_i)$, действующий согласно правилу $f(a) = \bigoplus_{i=1}^{n_a} f_i(a + A_i) \in \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E(S_i)$. Так как согласно условию 11) модуль $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E(S_i)$ слабо M -инъективен и $f(A_1) = 0$, то существует гомоморфизм $f' : mR \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E(S_i)$ такой, что $f'|_A = f$. Поскольку mR — циклический модуль, то существует такое натуральное число k , что $f(A) \leq \text{Im } f' \leq \bigoplus_{i=1}^k E(S_i)$. Следовательно, $f_{k+1}(c_{k+1} + A_{k+1}) = 0$. Получили противоречие. Таким образом, для каждого $m \in M$ модуль mR является нетеровым. $\square$

Предложение 1. Для правых R -модулей M и N , где M является разложимым модулем, следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль N является M -инъективным;
- 2) модуль N является слабо M -инъективным.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Согласно условию имеет место разложение $M = A \oplus B$, где A и B — ненулевые подмодули M . Пусть $A_0 \leq A$ и $f : A_0 \rightarrow N$ — гомоморфизм. Рассмотрим гомоморфизм $g : A_0 \oplus B \rightarrow N$, действующий согласно правилу $g(a + b) = f(a)$ для любых $a \in A_0$ и $b \in B$. Так как $\text{Ker } g \geq B \neq 0$, то существует такой гомоморфизм $g' : M \rightarrow N$, что $g'|_{A_0} = f$. Положим $f' = g'|_A$. Тогда $f'|_{A_0} = f$. Таким образом, модуль N является A -инъективным. Аналогично доказывается, что N является B -инъективным. Следовательно, N является M -инъективным. $\square$

Модуль M называется *квазинепрерывным* (или π -инъективным), если для любых его двух подмодулей A и B , для которых выполнено условие $A \cap B = 0$, существует такой эндоморфизм $f \in \text{End}(M)$, что $A \leq \text{Ker } f, B \leq \text{Ker}(1 - f)$. Согласно ([27], теоремы 2.9) всякий π -инъективный модуль является ADS -модулем. Хорошо известно, что модуль M является квазинепрерывным в точности тогда, когда каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M .

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 1. *Каждый слабо эндоморфизм-продолжаемый модуль является квазинепрерывным. В частности, всякий слабо эндоморфизм-продолжаемый модуль является ADS -модулем.*

Модуль M называется *однородным*, если для любых его нулевых подмодулей A и B выполнено условие $A \cap B \neq 0$. Ясно, что модуль M является однородным в точности тогда, когда M является квазинепрерывным и неразложимым.

Лемма 2. *Пусть M — неразложимый правый R -модулем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) модуль M является слабо инъективным;
- 2) модуль M является одновременно существенно квазинъективным и однородным.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует из леммы 1.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $N \leq M$ и $f : N \rightarrow M$ — гомоморфизм, у которого $\text{Ker } f \neq 0$. Так как M является однородным модулем, то $\text{Ker } f \leq_e N$. Поскольку M является существенно квазинъективным, то существует такой эндоморфизм $f' \in \text{End}(M)$, что $f'|_N = f$. $\square$

Аналогично доказывается

Лемма 3. *Пусть M — неразложимый правый R -модулем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) M является слабо эндоморфизм-продолжаемым модулем;
- 2) модуль M является одновременно существенно эндоморфизм-продолжаемым и однородным.

Из теоремы 2 и предложения 1 непосредственно следует

Теорема 6. *Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:*

- 1) модуль M является слабо инъективным модулем;
- 2) для любого подмодуля $A \leq_e M$ и гомоморфизма $f : A \rightarrow M$ с ненулевым ядром существует такой эндоморфизм $f' \in \text{End}(M)$, что $f'|_A = f$;
- 3) для любого эндоморфизма $f \in \text{End}(E(M))$ с ненулевым ядром выполнено условие $f(M) \leq M$;
- 4) для модуля M выполнено одно из следующих условий:

- а) M — квазиинъективный модуль;
- б) модуль M является одновременно существенно квазиинъективным и однородным.

Пример 1. Существует однородный модуль, который не является слабо инъективным модулем.

Рассмотрим подкольцо $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ кольца $M_2(\mathbb{Z})$. Непосредственные вычисления показывают, что правый R -модуль $M := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ является однородным. Пусть $N = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\} \leq M$. Рассмотрим гомоморфизм $f : N \rightarrow N$, действующий по правилу

$$f \left(\begin{pmatrix} 2x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для любых $x, y \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \neq 0$. Предположим, что модуль M является слабо инъективным. Тогда $f'|_N = f$ для некоторого эндоморфизма $f' \in \text{End}(M)$. Так как

$$f' \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то получаем противоречие. Таким образом, M — однородный модуль, который не является слабо инъективным.

Пример 2. Существует слабо эндоморфизм-продолжаемый модуль, который не является эндоморфизм-продолжаемым.

Пусть P — поле. Хорошо известно, что $E(P[x, y]_{P[x, y]}) = P(x, y)_{P[x, y]}$. Ясно, что каждый неинъективный эндоморфизм модуля $P(x, y)_{P[x, y]}$ является нулевым. Тогда очевидно, что каждый ненулевой подмодуль модуля $P(x, y)_{P[x, y]}$ является слабо инъективным.

Рассмотрим подмодуль

$$M = \langle \{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{Z}, i + j = 1\} \rangle_{P[x, y]} + P[x, y]_{P[x, y]}$$

модуля $P(x, y)_{P[x, y]}$. Модуль M является слабо инъективным модулем и, в частности, слабо эндоморфизм-продолжаемым модулем. Рассмотрим подмодуль

$$N = \langle \{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{Z}, i + j = 1\} \rangle_{P[x, y]}$$

модуля M и эндоморфизм $f \in \text{End}(N_{P[x, y]})$, действующий на порождающих элементах по правилу $f(x^i y^j) = x^{i+1} y^{j-1}$ для любых целых чисел i, j таких, что $i + j = 1$. Покажем, что эндоморфизм f определен корректно. Предположим, что $\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k x^k y^{1-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s'_k x^k y^{1-k}$, где

$s_k, s'_k \in P[x, y]$ и для почти всех k многочлены s_k, s'_k равны нулю. Для каждого k имеют место равенства

$$s_k = \sum_{u, v \in \mathbb{N}} r_{(u, v, k)} x^u y^v, \quad s'_k = \sum_{u, v \in \mathbb{N}} r'_{(u, v, k)} x^u y^v,$$

где $r_{(u, v, k)}, r'_{(u, v, k)} \in P$. Ясно, что равенство $\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k x^k y^{1-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s'_k x^k y^{1-k}$ равносильно выполнению равенств

$$\sum_{u+k=m, v+(1-k)=n} r_{(u, v, k)} = \sum_{u+k=m, v+(1-k)=n} r'_{(u, v, k)}$$

для каждых $n, m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\sum_{u+k+1=m, v-k=n} r_{(u,v,k)} = \sum_{u+k+1=m, v-k=n} r'_{(u,v,k)}$$

для каждых $n, m \in \mathbb{Z}$ и, следовательно,

$$\sum s_k x^{k+1} y^{-k} = \sum r_{(u,v,k)} x^{u+k+1} y^{v-k} = \sum r'_{(u,v,k)} x^{u+k+1} y^{v-k} = \sum s'_k x^{k+1} y^{-k}.$$

Непосредственно проверяется, что $f(sa) = sf(a)$ и $f(a+b) = f(a) + f(b)$ для любых $a, b \in N$ и $s \in P[x, y]$.

Предположим, что существует эндоморфизм f' модуля M такой, что $f'|_N = f$. Поскольку $f'(y) = f(y) = x$, то $f'(1) \cdot y = x$. С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что $xy^{-1} \notin M$. Получили противоречие. Таким образом, модуль M не является эндоморфизм-продолжаемым модулем.

Согласно ([16], с. 258) модуль M называется *сильно эндоморфизм-продолжаемым*, если для каждого его подмодуля X всякий гомоморфизм $f : X \rightarrow M$, который отображает в себя некоторый существенный подмодуль A модуля X , продолжается до некоторого эндоморфизма $f' \in \text{End}(M)$. Назовем модуль M *сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым*, если для каждого его подмодуля X всякий гомоморфизм $f : X \rightarrow M$, удовлетворяющий условиям $\text{Ker}(f) \neq 0$ и $f(A) \leq A$ для некоторого существенно подмодуля A модуля X , можно продолжить до некоторого эндоморфизма $f' \in \text{End}(M)$. Ясно, что всякий слабо инъективный модуль является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым и класс слабо эндоморфизм-продолжаемых модулей является расширением класса сильно слабо эндоморфизм-продолжаемых модулей.

Теорема 7. *Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:*

- 1) M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым модулем;
- 2) для каждого существенного подмодуля X модуля M всякий гомоморфизм $f : X \rightarrow M$, удовлетворяющий условиям $\text{Ker}(f) \neq 0$ и $f(A) \leq A$ для некоторого существенно подмодуля A модуля X , можно продолжить до некоторого эндоморфизма $f' \in \text{End}(M)$;
- 3) для каждого эндоморфизма f модуля $E(M)$, у которого $\text{Ker}(f) \neq 0$ и $f(A) \leq A$ для некоторого существенно подмодуля A модуля M , выполнено включение $f(M) \leq M$.
- 4) модуль M является одновременно существенно квазиинъективным модулем и слабо эндоморфизм-продолжаемым модулем.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть X — подмодуль модуля M и $f : X \rightarrow M$ — гомоморфизм, у которого $\text{Ker}(f) \neq 0$. Предположим, что существует такой существенный подмодуль A модуля X , что $f(A) \leq A$. Рассмотрим подмодуль T модуля M , который является дополнением по пересечению для подмодуля X в модуле M . Определим гомоморфизм $g : X \oplus T \rightarrow M$, действующий по правилу $g(x+t) = f(x)$ для всех $x \in X$ и $t \in T$. Ясно, что гомоморфизм g имеет ненулевое ядро. Поскольку $A \oplus T \leq_e X \oplus T \leq_e M$ и $g(A \oplus T) = f(A) \leq A \oplus T$, то согласно условию 2) существует эндоморфизм $g' \in \text{End}(M)$ такой, что $g'|_{X \oplus T} = g$. Следовательно, $g'|_X = f$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть f — эндоморфизм модуля $E(M)$, у которого $\text{Ker}(f) \neq 0$ и $f(A) \leq A$ для некоторого существенного подмодуля A модуля M . Пусть X — наибольший подмодуль модуля M , для которого выполнено условие $f(X) \leq M$. Тогда $A \leq_e X \leq_e M$. Согласно условию 2) существует такой эндоморфизм $f' \in \text{End}(M)$, что $f'|_X = f|_X$. Несложно заметить, что $(f|_M - f')(M) \cap M = 0$. Так как $M \leq_e E(M)$, то $(f|_M - f')(M) = 0$, т. е. $f(M) \leq M$.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть $X \leq_e M$ и $f : X \rightarrow M$ — гомоморфизм с ненулевым ядром. Предположим, что существует такой существенный подмодуль A модуля X , что $f(A) \leq A$. Тогда для некоторого эндоморфизма $g \in \text{End}(E(M))$ выполнено равенство $g|_A = \iota f|_A$, где $\iota : A \rightarrow E(M)$ — естественное вложение. Согласно условию 3) $g(M) \leq M$, т.е. гомоморфизм f продолжается до некоторого эндоморфизма модуля M .

1) $\Rightarrow$ 4) очевидно.

4) $\Rightarrow$ 2). Пусть X — существенный подмодуль модуля M и $f : X \rightarrow M$ — гомоморфизм, у которого $\text{Ker } f \neq 0$. Предположим, что существует такой существенный подмодуль A модуля X , что $f(A) \leq A$. Тогда существует эндоморфизм $g \in \text{End}(M)$, для которого выполнено равенство $g|_A = f|_A$. Положим $h = f - g|_X$. Так как $A \leq \text{Ker}(h)$, то $\text{Ker}(h) \leq_e M$. Поскольку M является существенно квазиинъективным модулем, то существует эндоморфизм $h' : M \rightarrow M$, удовлетворяющий условию $h'|_X = h$. Положим $f' = h' + g$. Тогда $f' \in \text{End}(M)$ и $f'|_X = f$. $\square$

Правый R -модуль M называется *существенно полуартиновым*, если $\text{Soc}(M/N) \neq 0$ для каждого его собственного существенного подмодуля N . Кольцо R называется *существенно полуартиновым справа*, если модуль R_R существенно полуартинов. Если кольцо R является существенно полуартиновым справа, то любой правый R -модуль также является существенно полуартиновым модулем.

Правый R -модуль M называется *существенно нетеровым*, если в нем каждая возрастающая цепь существенных подмодулей стабилизируется. Если каждый конечно порожденный подмодуль модуля M является существенно нетеровым, то модуль M называется *существенно локально нетеровым*.

Предложение 2. Пусть M — существенно локально нетеров модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым;
- 2) модуль M является слабо эндоморфизм-продолжаемым.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть модуль M является слабо эндоморфизм-продолжаемым. Тогда M — существенно эндоморфизм-продолжаемый модуль и согласно ([9], теорема 3) модуль M является существенно квазиинъективным. Таким образом из теоремы 7 следует, что модуль M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым. $\square$

Аналогично из теоремы 7 и ([9], теорема 4) вытекает

Предложение 3. Пусть M — существенно полуартинов модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым;
- 2) модуль M является слабо эндоморфизм-продолжаемым.

Следствие 1. Пусть R — существенно полуартиново (существенно нетерово) справа кольцо. Тогда для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль M является слабо эндоморфизм-продолжаемым;
- 2) модуль M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым.

Правый R -модуль M называется *полуартиновым*, если каждый его ненулевой фактормодуль имеет простой подмодуль. Несложно заметить, что модуль M является полуартиновым в точности тогда, когда M является существенно полуартиновым и $\text{Soc}(M) \leq_e M$.

Лемма 4. Для правого R -модуля M , у которого $\text{Soc}(M) \leq_e M$, следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым;
- 2) модуль M является слабо инъективным.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $X \leq_e M$ и $f : X \rightarrow M$ — гомоморфизм, у которого ядро является ненулевым. Тогда $\text{Soc}(M) \leq_e X$ и $f(\text{Soc}(M)) \leq \text{Soc}(M)$. Следовательно, согласно предположению, существует эндоморфизм $f' \in \text{End}(M)$ такой, что $f'|_X = f$.

2) $\Rightarrow$ 1) очевидно. □

Следующие два утверждения непосредственно следуют из предложения 3 и леммы 4.

Следствие 2. Для полуартинова модуля M следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль M является слабо инъективным;
- 2) модуль M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым;
- 3) модуль M является слабо эндоморфизм-продолжаемым.

Следствие 3. Пусть R — полуартиново справа кольцо. Тогда для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:

- 1) модуль M является слабо инъективным;
- 2) модуль M является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемым;
- 3) модуль M является слабо эндоморфизм-продолжаемым.

Абелева группа G называется квазиинъективной, если она квазиинъективна как $\mathbb{Z}$ -модуль.

Теорема 8. Для неразложимой абелевой группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G является слабо инъективной абелевой группой;
- 2) G является однородной абелевой группой.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует из леммы 2.

2) $\Rightarrow$ 1). Случай 1: G — однородная периодическая абелева группа. В этом случае либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^n}$. Тогда абелева группа G , очевидно, является слабо инъективной.

Случай 2: G — однородная абелева группа без кручения. Всякая абелева группа без кручения является существенно квазиинъективной. Следовательно, согласно лемме 2 абелева группа G является слабо инъективной. □

Из ([28], с. 138, теорема 2.11) и теоремы 8 вытекает

Теорема 9. Для абелевой группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G является слабо инъективной абелевой группой;
- 2) выполнено одно из следующих условий:
 - а) G является разложимой и квазиинъективной абелевой группой,
 - б) G является неразложимой и однородной абелевой группой;
- 3) выполнено одно из следующих условий:
 - а) G является делимой абелевой группой,
 - б) G является однородной абелевой группой,
 - в) G является периодической абелевой группой и $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где A_p — p -компонент G для каждого $p \in \mathbb{P}$, для которой имеет место один из изоморфизмов:

$$A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^\infty}, \quad A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Следующее утверждение доказано в работе [13]. Ради полноты изложения приведем независимое ее доказательство.

Лемма 5. *Всякая абелева группа вида $G \oplus H$, где G — абелева группа без кручения ранга 1 и H — периодическая делимая абелева группа, является эндоморфизм-продолжаемой.*

Доказательство. Пусть G — абелева группа без кручения ранга 1. Покажем, что абелева группа G является эндоморфизм-продолжаемой. Хорошо известно, что G изоморфна подгруппе аддитивной группы поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Без ограничения общности можно считать, что $G \leq \mathbb{Q}$. Пусть A — ненулевая подгруппа G и f — эндоморфизм A . Покажем, что для некоторого эндоморфизма $f' : G \rightarrow G$ имеет место равенство $f'|_A = f$. Так как $\mathbb{Q}$ — делимая оболочка G , то для некоторого эндоморфизма $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ имеет место равенство $g|_A = f$. Пусть $g(1) = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и $(m, n) = 1$. Тогда $g(x) = \frac{m}{n}x$ для любого $x \in \mathbb{Q}$ и, в частности, $f(x) = \frac{m}{n}x \in A$ для каждого $x \in A$. Существуют $a, b \in \mathbb{Z}$ такие, что $am + bn = 1$. Тогда $a\frac{m}{n}x + bx = \frac{1}{n}x \in A$ для любого $x \in A$, т.е. $\frac{1}{n}A \leq A$. Предположим, что $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа. Ясно, что $\frac{1}{p_j}A \leq A$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Пусть $y \in G \setminus A$. Тогда существует такое наименьшее натуральное число k , что $ky \in A$. Если p_j делит k для некоторого j , то $\frac{k}{p_j}y \in A$, что противоречит выбору k . Следовательно, $(k, n) = 1$. Таким образом, существуют $u, v \in \mathbb{Z}$ такие, что $uk + vn = 1$. Тогда $\frac{1}{n}y = \frac{ky}{n}u + vy \in A + y\mathbb{Z} \leq G$. Следовательно, $\frac{1}{n}G \leq G$ и $g(G) = \frac{m}{n}G \leq G$. Пусть $f' = g|_G$. Тогда $f' : G \rightarrow G$ и $f'|_A = f$.

Рассмотрим абелеву группу вида $G \oplus H$, где G — абелева группа без кручения ранга 1 и H — периодическая делимая абелева группа. Покажем, что эта абелева группа является эндоморфизм-продолжаемой. Пусть $A \leq G \oplus H$ и $f \in \text{End}(A)$. Докажем, что существует такой эндоморфизм $f' : G \oplus H \rightarrow G \oplus H$, что $f'|_A = f$. Так как H — делимая абелева группа, то существует такой эндоморфизм $g : H \rightarrow H$, что $g|_{t(A)} = f|_{t(A)}$. Поскольку $t(A) = A \cap H$, то существует корректно определенный эндоморфизм $g' : H + A \rightarrow H + A$, действующий согласно правилу $g'(x + y) = g(x) + f(y)$ для произвольных $x \in H$ и $y \in A$. Ясно, что $g'|_A = f$. Заметим, $H + A = H \oplus A'$ для некоторой подгруппы A' группы $G \oplus H$. Согласно ([21], теорема 3.1) $G \oplus H$ — ADS-абелева группа. Тогда существует такая подгруппа G' группы $G \oplus H$, что $A' \leq G'$ и $G' \oplus H = G \oplus H$. В частности, $G \cong G'$. Эндоморфизм g' имеет матричное представление $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$, где $\alpha_{11} \in \text{End}(A')$, $\alpha_{21} \in \text{Hom}(A', H)$ и $\alpha_{22} \in \text{End}(H)$. Согласно изложенному выше, G' — эндоморфизм-продолжаемая абелева группа. Следовательно, существует такой эндоморфизм $\alpha'_{11} : G' \rightarrow G'$, что $\alpha'_{11}|_{A'} = \alpha_{11}$. Так как H — делимая абелева группа, то существует такой гомоморфизм $\alpha'_{21} : G' \rightarrow H$, что $\alpha'_{21}|_{A'} = \alpha_{21}$. Рассмотрим эндоморфизм $f' := \begin{bmatrix} \alpha'_{11} & 0 \\ \alpha'_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ группы $G \oplus H$. Ясно, что $f'|_{A' \oplus H} = g'$. Таким образом, $f'|_A = f$. $\square$

Теорема 10. *Для абелевой группы G без кручения следующие условия эквивалентны:*

- 1) G является сильно эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 2) G является слабо инъективной абелевой группой;
- 3) G является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 4) G является эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 5) G является слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 6) G является квазинепрерывной абелевой группой;

7) выполнено одно из следующих условий:

- а) если G является неразложимой, то G является однородной абелевой группой;
- б) если G является разложимой, то G является делимой абелевой группой.

Доказательство. Импликации $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6)$ и $1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5)$ очевидны.

$6) \Rightarrow 7)$. Согласно ([27], следствие 2.9) G является ADS -абелевой группой. Следовательно, если абелева группа G является разложимой, то из ([21], следствие 1.4) вытекает, что G — делимая абелева группа. Если G — неразложимая квазинепрерывная абелева группа, то G , очевидно, является однородной.

$7) \Rightarrow 2)$ следует из теоремы 9.

$7) \Rightarrow 4)$ следует из леммы 5.

$4) \Rightarrow 1)$ следует из ([9], следствие 5). □

Теорема 11. Для периодической абелевой группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G является квазиинъективной абелевой группой;
- 2) G является слабо инъективной абелевой группой;
- 3) G является автоморфизм-инвариантной абелевой группой;
- 4) G является сильно эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 5) G является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 6) G является сильно автоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 7) G является эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 8) G является слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 9) G является автоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 10) G является квазинепрерывной абелевой группой;
- 11) G является ADS -абелевой группой;
- 12) $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где A_p — p -компонента G для каждого $p \in \mathbb{P}$, для которой имеет место один из изоморфизмов:

$$A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^\infty}, \quad A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Доказательство. Импликации $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 6) \Rightarrow 9) \Rightarrow 11)$ и $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 5) \Rightarrow 8) \Rightarrow 10) \Rightarrow 11)$ и $1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 7) \Rightarrow 8)$ очевидны.

$11) \Rightarrow 12)$ следует из ([21], теорема 3.1).

$12) \Rightarrow 1)$ следует из ([28], с. 138, теорема 2.11). □

Теорема 12. Для неделимой смешанной абелевой группы G следующие условия эквивалентны:

- 1) G является сильно эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 2) G является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 3) G является эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 4) G является слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 5) G является квазинепрерывной абелевой группой;
- 6) $G = H \oplus t(G)$, где $t(G)$ является делимой абелевой группой, а H является неделимой однородной абелевой группой без кручения.

Доказательство. $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5)$ и $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)$ очевидны.

$5) \Rightarrow 6)$. Согласно ([21], теорема 3.1) всякая квазинепрерывная абелева группа является ADS -абелевой группой. Таким образом, согласно ([27], предложение 2.3) группу G можно представить в виде $G = H \oplus t(G)$, где $t(G)$ — делимая абелева группа и H — неразложимая абелева группа без кручения. Из ([29], предложение 2.7) следует, что H является CS -абелевой группой и, в частности, H — однородная абелева группа.

6) $\Rightarrow$ 3) следует из леммы 5.

3) $\Rightarrow$ 1) следует из ([9], следствие 5). □

Из теорем 10–12 непосредственно следует

Теорема 13. *Для абелевой группы G следующие условия равносильны:*

- 1) G является сильно эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 2) G является сильно слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 3) G является эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 4) G является слабо эндоморфизм-продолжаемой абелевой группой;
- 5) G является квазинепрерывной абелевой группой;
- 6) выполнено одно из следующих условий:
 - а) G является делимой абелевой группой;
 - б) G является прямой суммой однородной абелевой группы без кручения и делимой периодической абелевой группы;
 - в) G является периодической абелевой группой, $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где A_p — p -компонента G для каждого $p \in \mathbb{P}$, для которой имеет место один из изоморфизмов:

$$A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^\infty}, \quad A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^n}.$$

2. СЛАБО ПРОЕКТИВНЫЕ И СЛАБО ЭНДОМОРФИЗМ-ПОДНИМАЕМЫЕ МОДУЛИ

Пусть M и N — правые R -модули. Модуль M называется *слабо N -проективным* (соответственно, *слабо N -проективным[#]*), если для любого подмодуля (соответственно, малого подмодуля) A модуля N каждый гомоморфизм $f : M \rightarrow N/A$, у которого $\text{Im} f \neq N/A$, поднимается до некоторого гомоморфизма $f' : M \rightarrow N$. Модуль M называется *слабо проективным* (соответственно, *слабо проективным[#]*) модулем, если M является слабо M -проективным (соответственно, слабо M -проективным[#]). Модуль M называется *мало квазипроективным*, если для любого подмодуля A модуля M каждый гомоморфизм $f : M \rightarrow M/A$, у которого $\text{Im} f \ll M/A$, можно поднять до некоторого эндоморфизма $f' \in \text{End}(M)$.

Очевидно, что каждый слабо проективный модуль является мало квазипроективным модулем. Из определений непосредственно следует, что модуль M является квазипроективным модулем в точности тогда, когда M одновременно является псевдопроективным и слабо проективным.

С помощью стандартных рассуждений доказывается

Лемма 6. *Пусть M — правый R -модуль. Имеют место следующие утверждения:*

- 1) *прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} P_i$ семейства правых R -модулей $\{P_i\}_{i \in I}$ является слабо M -проективной в точности тогда, когда модуль P_i является слабо M -проективным для каждого $i \in I$;*
- 2) *если $0 \rightarrow M'_R \rightarrow M_R \rightarrow M''_R \rightarrow 0$ является точной последовательностью правых R -модулей и правый R -модуль P является слабо M -проективным, то P также является слабо M' -проективным и слабо M'' -проективным.*

Пример 3. $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, где p — простое число, является слабо проективным модулем, но не является квазипроективным модулем.

Правый R -модуль M называется *слабо эндоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *слабо эндоморфизм-поднимаемым[#]*), если для каждого его подмодуля (соответственно, малого

подмодуля) A всякий эндоморфизм f модуля M/A , у которого $\text{Im} f \neq M/A$, поднимается до некоторого эндоморфизма f' модуля M . Модуль M называется *мало эндоморфизм-поднимаемым* [30], если для любого подмодуля A модуля M каждый эндоморфизм модуля M/A с малым образом поднимается до некоторого эндоморфизма модуля M .

Несложно заметить, что каждый слабо проективный модуль является слабо эндоморфизм-поднимаемым. Кроме того, каждый слабо эндоморфизм-поднимаемый модуль является мало эндоморфизм-поднимаемым и каждый эндоморфизм-поднимаемый модуль является слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем.

Следующие два утверждения проверяются с помощью стандартных рассуждений.

Лемма 7. Пусть M — правый R -модуль и A — вполне инвариантный подмодуль M . Тогда

- 1) если M является слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем, то M/A также является слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M является слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем и $A \ll M$, то M/A также является слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Лемма 8. Пусть M — правый R -модуль и N — прямое слагаемое M . Тогда

- 1) если M является слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем, то N также является слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) если M является слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, то N также является слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Теорема 14. Пусть M и N — правые R -модули и N — разложимый модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) модуль M N -проективен в точности тогда, когда M слабо N -проективен;
- 2) модуль M N -проективен[#] в точности тогда, когда M слабо N -проективен[#].

Доказательство. 1) Предположим, что M — слабо N -проективный модуль. Покажем, что модуль M N -проективен. Пусть $N = A \oplus B$, где A и B — ненулевые модули, $A_0 \leq A$ и $f : M \rightarrow A/A_0$ — гомоморфизм правых R -модулей. Ясно, что $\text{Im} f \neq N/A_0$. Поскольку модуль M слабо N -проективен, то существует гомоморфизм $f' : M \rightarrow N$ такой, что $\sigma_N^{A_0} \circ f' = f$. Тогда $\text{Im} f' \leq A$. Таким образом, модуль M A -проективен. Аналогичное показывается B -проективность модуля M . Тогда согласно ([24], 18.2) модуль M является N -проективным.

Доказательство 2) аналогично доказательству 1). $\square$

Следствие 4. Пусть M — разложимый правый R -модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) модуль M является квазипроективным в точности тогда, когда M является слабо проективным модулем;
- 2) модуль M является квазипроективным[#] в точности тогда, когда M является слабо проективным[#] модулем.

Следствие 5. Пусть M — правый R -модуль и $P \in \sigma[M]$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) модуль P является проективным в категории $\sigma[M]$ в точности тогда, когда P — слабо N -проективен для любого модуля $N \in \sigma[M]$;
- 2) модуль P является проективным[#] в категории $\sigma[M]$ в точности тогда, когда P — слабо N -проективен[#] для любого модуля $N \in \sigma[M]$.

Следствие 6.

- 1) Правый R -модуль M является проективным в точности тогда, когда M слабо N -проективен для любого правого R -модуля N .
- 2) Правый R -модуль M является проективным[#] в точности тогда, когда M слабо N -проективен[#] для любого правого R -модуля N .

Теорема 15. Пусть M и N — правые R -модули. Если N является слабо дополняемым модулем, то модуль M слабо N -проективен в точности тогда, когда M слабо N -проективен[#].

Доказательство. Предположим, что модуль M слабо N -проективен[#] и N — слабо дополняемый модуль. Пусть произвольный подмодуль $A \leq N$ и $f : M \rightarrow N/A$ — гомоморфизм правых R -модулей, у которого $\text{Im} f \neq N/A$. Существует $B \leq N$ такой, что $A + B = N$ и $A \cap B \ll N$. Имеет место изоморфизм $\varphi : N/A \rightarrow B/(A \cap B)$, действующий по правилу $\varphi(b + A) = b + (A \cap B)$ для любого $b \in B$. Ясно, что $\varphi \circ \sigma_N^A|_B = \sigma_N^{A \cap B}|_B$. Пусть $g = \varphi \circ f$. Тогда $\text{Im} g \neq N/(A \cap B)$ и, следовательно, существует такой гомоморфизм $g' : M \rightarrow N$, что $\sigma_N^{A \cap B} \circ g' = g$. Поскольку $\text{Im} g \leq B/(A \cap B)$, то $\text{Im} g' \leq B$, т.е. гомоморфизм g' мы можем рассматривать как гомоморфизм, действующий из M в B . Таким образом,

$$\sigma_N^A|_B \circ g' = \varphi^{-1} \circ \sigma_N^{A \cap B}|_B \circ g' = \varphi^{-1} \circ g = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f.$$

□

Следствие 7. Пусть правый R -модуль M является слабо дополняемым. Тогда M является слабо проективным в точности тогда, когда M является слабо проективным[#].

Теорема 16. Пусть R — совершенное справа кольцо, M, N — правые R -модули и $\pi_1 : P_1 \rightarrow M, \pi_2 : P_2 \rightarrow N$ — проективные накрытия. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) модуль M слабо N -проективен;
- 2) модуль M слабо N -проективен[#];
- 3) если для гомоморфизма $f : P_1 \rightarrow P_2$ выполнено условие $\text{Im} f \neq P_2$, то $f(\text{Ker} \pi_1) \leq \text{Ker} \pi_2$.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) следует из теоремы 15.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть M — N -слабо проективный модуль. Без ограничения общности можно считать, что $N = P_2/\text{Ker} \pi_2$. Пусть $f : P_1 \rightarrow P_2$ — гомоморфизм, для которого выполнено условие $\text{Im} f \neq P_2$. Покажем, что $f(\text{Ker} \pi_1) \leq \text{Ker} \pi_2$. Пусть $N_0 = \text{Ker} \pi_2 + f(\text{Ker} \pi_1)$ и $\pi : P_2/\text{Ker} \pi_2 \rightarrow P_2/N_0$ — естественный гомоморфизм. Поскольку $\text{Ker} \pi_1 \ll P_1$ и $\text{Ker} \pi_2 \ll P_2$, то $N_0 \ll P_2$. Так как $f(\text{Ker} \pi_1) \leq N_0$, то для некоторого гомоморфизма $g : M \rightarrow P_2/N_0$ выполнено равенство $\pi \circ \pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$. Поскольку $\text{Ker}(\pi \circ \pi_2) \ll P_2$ и $f(P_1) \neq P_2$, то $\pi \circ \pi_2 \circ f(P_1) \neq P_2/N_0$. Тогда $g(M) = g \circ \pi_1(P_1) = \pi \circ \pi_2 \circ f(P_1) \neq P_2/N_0$. Таким образом, из M -слабо проективности модуля N следует, что для некоторого гомоморфизма $h : M \rightarrow P_2/\text{Ker} \pi_2$ выполнено равенство $g = \pi \circ h$. Поскольку модуль P_1 проективен, то существует гомоморфизм $f_0 : P_1 \rightarrow P_2$, для которого выполнено равенство $\pi_2 \circ f_0 = h \circ \pi_1$. Так как $\pi \circ \pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$ и $\pi \circ \pi_2 \circ f_0 = g \circ \pi_1$, то $(f - f_0)(P_1) \leq N_0$. Для произвольного элемента $p \in P_1$ выполнено равенство $f(p) - f_0(p) = f(p_1) + p_2$, где $p_1 \in \text{Ker} \pi_1, p_2 \in \text{Ker} \pi_2$. Поскольку

$$\pi_2 \circ (f - f_0)(p - p_1) = \pi_2(p_2 + f_0(p_1)) = 0,$$

то $p \in \text{Ker}(\pi_2 \circ (f - f_0)) + \text{Ker} \pi_1$. Таким образом,

$$P_1 = \text{Ker}(\pi_2 \circ (f - f_0)) + \text{Ker} \pi_1 = \text{Ker}(\pi_2 \circ (f - f_0))$$

и, следовательно, $(f - f_0)(P_1) \leq \text{Ker} \pi_2$. Так как $f_0(\text{Ker} \pi_1) \leq \text{Ker} \pi_2$, то

$$f(\text{Ker} \pi_1) \leq (f - f_0)(\text{Ker} \pi_1) + f_0(\text{Ker} \pi_1) \leq \text{Ker} \pi_2.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Без ограничения общности можно считать, что $N = P_2/\text{Ker}\pi_2$. Пусть $\text{Ker}\pi_2 \leq P_0$, где $P_0 \leq P_2$, и $\pi : P_2/\text{Ker}\pi_2 \rightarrow P_2/P_0$ — канонический гомоморфизм. Рассмотрим гомоморфизм $f : M \rightarrow P_2/P_0$, у которого $f(M) \neq P_2/P_0$. Поскольку модуль P_1 проективен, то существует гомоморфизм $g : P_1 \rightarrow P_2$, для которого выполнено равенство $\pi \circ \pi_2 \circ g = f \circ \pi_1$. Так как

$$\pi \circ \pi_2 \circ g(P_1) = f \circ \pi_1(P_1) = f(M) \neq P_2/P_0,$$

то $g(P_1) \neq P_2$. Тогда согласно условию 3) существует такой гомоморфизм $h : M \rightarrow P_2/\text{Ker}\pi_2$, что $\pi_2 \circ g = h \circ \pi_1$. Следовательно,

$$\pi \circ h \circ \pi_1 = \pi \circ \pi_2 \circ g = f \circ \pi_1.$$

Так как π_1 — эпиморфизм, то $\pi \circ h = f$. □

Модуль M называется π -проективным, если для любых его подмодулей A и B , для которых выполнено условие $A + B = M$, существует такой эндоморфизм $f \in \text{End}(M)$, что $f(M) \subseteq A$, $(1 - f)(M) \subseteq B$. Согласно ([31], лемма 3.2) модуль M является π -проективным в точности тогда, когда для каждого его подмодуля A всякий идемпотентный эндоморфизм фактор-модуля M/A поднимается до эндоморфизма модуля M .

Непосредственно проверяется

Лемма 9. *Каждый слабо эндоморфизм-поднимаемый модуль является π -проективным. В частности, всякий слабо проективный модуль является π -проективным.*

Модуль M называется *дуально ADS-модулем*, если для каждого его разложения $M = A \oplus B$ подмодули A и B взаимно проективны.

Лемма 10 ([24], 41.14). *Каждый π -проективный модуль является дуально ADS-модулем. В частности, всякий слабо эндоморфизм-поднимаемый модуль является дуально ADS-модулем.*

Модуль M называется *полым*, если для любых его собственных подмодулей A и B выполнено условие $A + B \neq M$. Очевидно, что если M является полым модулем, то он является π -проективным и неразложимым.

Следующее два утверждения проверяются непосредственно.

Лемма 11. *Пусть M — полый правый R -модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) модуль M является слабо проективным;
- 2) модуль M является слабо проективным[#];
- 3) модуль M является мало квазипроективным.

Лемма 12. *Для полого правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:*

- 1) M является слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем;
- 2) M является слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем;
- 3) M является мало эндоморфизм-поднимаемым модулем.

Теорема 17. *Для слабо дополняемого правого R -модуля M следующие условия равносильны:*

- 1) модуль M является слабо эндоморфизм-поднимаемым;
- 2) модуль M является слабо эндоморфизм-поднимаемым[#].

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть M — слабо эндоморфизм-поднимаемый[#] модуль, A — немалый подмодуль модуля M и f — эндоморфизм модуля M/A . Покажем, что эндоморфизм f поднимается до некоторого эндоморфизма M . Существует такой собственный подмодуль N модуля M ,

что $A + N = M$ и $A \cap N \ll M$. Тогда $M/(A \cap N) = A/(A \cap N) \oplus N/(A \cap N)$. Рассмотрим изоморфизм $\varphi : N/(A \cap N) \rightarrow M/A$, действующий согласно правилу $\varphi(x + (A \cap N)) = x + A$ для любого $x \in N$. Пусть $\pi : A/(A \cap N) \oplus N/(A \cap N) \rightarrow N/(A \cap N)$ — естественная проекция и $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \pi \in \text{End}_R(M/(A \cap N))$. Так как $A/(A \cap N) \neq 0$, то $\text{Im } g \neq M/(A \cap N)$. Имеют место равенства

$$\sigma_{M/(A \cap N)}^{A/(A \cap N)} \circ g = \sigma_{M/(A \cap N)}^{A/(A \cap N)} \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \pi = f \circ \varphi \circ \pi = f \circ \sigma_{M/(A \cap N)}^{A/(A \cap N)}.$$

Поскольку M — слабо эндоморфизм-поднимаемый[#] модуль, то существует эндоморфизм g' модуля M такой, что $\sigma_M^{A \cap N} \circ g' = g \circ \sigma_M^{A \cap N}$. Таким образом,

$$\sigma_M^A \circ g' = \sigma_{M/(A \cap N)}^{A/(A \cap N)} \circ \sigma_M^{A \cap N} \circ g' = \sigma_{M/(A \cap N)}^{A/(A \cap N)} \circ g \circ \sigma_M^{A \cap N} = f \circ \sigma_{M/(A \cap N)}^{A/(A \cap N)} \circ \sigma_M^{A \cap N} = f \circ \sigma_M^A.$$

Следовательно, M является слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем. $\square$

Модуль M называется *сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым* (соответственно, *сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым*[#]), если для каждого его подмодуля (соответственно, малого подмодуля) A всякий гомоморфизм $f : M \rightarrow M/A$, удовлетворяющий условиям $\text{Im } f \neq M/A$ и $f(L) \leq L/A$ для некоторого подмодуля L модуля M такого, что $L/A \ll M/A$, поднимается до эндоморфизма модуля M .

Несложно заметить, что каждый слабо проективный модуль является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым и всякий сильно слабо эндоморфизм-поднимаемый модуль является слабо эндоморфизм-поднимаемым.

Теорема 18. *Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:*

- 1) *модуль M является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем;*
- 2) *модуль M является одновременно мало квазипроективным и слабо эндоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что модуль M является одновременно мало квазипроективным и слабо эндоморфизм-поднимаемым. Пусть A — подмодуль модуля M и $f : M \rightarrow M/A$ — гомоморфизм правых R -модулей, удовлетворяющий условиям $\text{Im } f \neq M/A$ и $f(L) \leq L/A$ для некоторого такого подмодуля L модуля M , что $L/A \ll M/A$. Поскольку $f(L) \leq L/A$, то $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f(L) = 0$, где $\sigma_{M/A}^{L/A}$ — естественный гомоморфизм, действующий из M/A в M/L . Тогда существует такой эндоморфизм g модуля M/L , что $g \circ \sigma_M^L = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ f$. Предположим, что g является эпиморфизмом. Тогда $\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f$ также является эпиморфизмом и, следовательно, $\text{Im } f + L/A = M/A$. Поскольку $L/A \ll M/A$, то $\text{Im } f = M/A$. Получили противоречие. Таким образом, $\text{Im } g \neq M/L$. Так как M является слабо эндоморфизм-поднимаемым, то существует такой эндоморфизм g' модуля M , что $g \circ \sigma_M^L = \sigma_M^L \circ g'$. Пусть $f' = \sigma_M^A \circ g'$. Тогда

$$\sigma_{M/A}^{L/A} \circ f' = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ \sigma_M^A \circ g' = \sigma_M^L \circ g' = g \circ \sigma_M^L = \sigma_{M/A}^{L/A} \circ f.$$

Следовательно, $(f - f')(M) \leq \text{Ker}(\sigma_{M/A}^{L/A}) = L/A \ll M/A$. Поскольку модуль M является мало квазипроективным, то существует эндоморфизм g'' модуля M такой, что $\sigma_M^A \circ g'' = f - f'$. Таким образом,

$$\sigma_M^A \circ (g' + g'') = f' + (f - f') = f.$$

$\square$

Теорема 19. *Для правого R -модуля M следующие условия эквивалентны:*

- 1) модуль M является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым[#];
- 2) модуль M является одновременно мало квазипроективным[#] и слабо эндоморфизм-поднимаемым[#].

Доказательство аналогично доказательству теоремы 18.

Теорема 20. Пусть правый R -модуль M является слабо дополняемым модулем. Тогда M является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым модулем в точности тогда, когда M является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство следует из теорем 17–19 и ([30], теорема 18).

Лемма 13. Пусть M — правый R -модуль, у которого $J(M) \ll M$. Тогда M является слабо проективным[#] модулем в точности тогда, когда M является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем.

Доказательство. Пусть M является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, $A \ll M$ и $f : M \rightarrow M/A$ — гомоморфизм, у которого $\text{Im} f \neq M/A$. Согласно ([25], предложение 9.1.5) имеем $J(M)/A = J(M/A)$. Так как $f(J(M)) \leq J(M/A) = J(M)/A$ и M является сильно слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, то гомоморфизм f поднимается до некоторого эндоморфизма f' модуля M . Следовательно, модуль M является слабо проективным[#]. $\square$

Теорема 21. Пусть R — совершенное справа кольцо, M — правый R -модуль и $\pi : P \rightarrow M$ — проективная оболочка. Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) M — слабо проективный модуль;
- 2) M — слабо проективный[#] модуль;
- 3) M — сильно слабо эндоморфизм-поднимаемый модуль;
- 4) M — сильно слабо эндоморфизм-поднимаемый[#] модуль;
- 5) M — слабо эндоморфизм-поднимаемый модуль;
- 6) M — слабо эндоморфизм-поднимаемый[#] модуль;
- 7) для каждого эндоморфизма $f : P \rightarrow P$, у которого $\text{Im} f \neq P$, выполнено условие $f(\text{Ker} \pi) \leq \text{Ker} \pi$;
- 8) выполнено одно из следующих условий:
 - а) M — разложимый квазипроективный модуль;
 - б) модуль M является одновременно мало квазипроективным и полым.

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 7) вытекает из теоремы 16.

Импликации 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 5) и 2) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 6) очевидны.

Эквивалентность 5) $\Leftrightarrow$ 6) следует из теоремы 17.

6) $\Rightarrow$ 7). Пусть $f : P \rightarrow P$ — эндоморфизм модуля P , для которого выполнено условие $\text{Im} f \neq P$. Покажем, что $f(\text{Ker} \pi) \leq \text{Ker} \pi$. Без ограничения общности предположим, что $M = P/\text{Ker} \pi$ и $\pi : P \rightarrow P/\text{Ker} \pi$ — проективная оболочка модуля $P/\text{Ker} \pi$. Пусть $C := \text{Ker} \pi + \sum_{i=1}^{\infty} f^i(\text{Ker} \pi)$. Поскольку $\text{Ker} \pi \ll P$, то $f^i(\text{Ker} \pi) \ll P$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда $C \leq J(P) \ll P$. Предположим, что $f(\text{Ker} \pi) \not\leq \text{Ker} \pi$. Тогда $C \neq \text{Ker} \pi$. Ясно, что C является наименьшим подмодулем модуля P , для которого выполнены условия $f(C) \leq C$ и $\text{Ker} \pi \leq C$. Пусть $\sigma : M \rightarrow P/C$ — естественный гомоморфизм. Поскольку $\sigma \circ \pi \circ f(C) = 0$, существует такой эндоморфизм g' модуля P/C , что $g' \circ \sigma \circ \pi = \sigma \circ \pi \circ f$. Если $\text{Im} g' = P/C$, то $\text{Im} f + C = P$. Так как $C \ll P$, то $\text{Im} f = P$, получили противоречие. Следовательно, $\text{Im} g' \neq P/C$. Так как M является слабо эндоморфизм-поднимаемым[#] модулем, то существует эндоморфизм f'

модуля M такой, что $\sigma \circ f' = g' \circ \sigma$. Из проективности модуля P следует, что существует эндоморфизм g модуля P такой, что $\pi \circ g = f' \circ \pi$. Таким образом, имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & P \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f'} & M \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ P/C & \xrightarrow{g'} & P/C \end{array}.$$

Тогда $\sigma \circ \pi \circ (f - g) = 0$ и, следовательно, $(f - g)(P) \leq C$.

Предположим, что $J(C) + \text{Ker}\pi = C$. Тогда $\pi(J(C)) = \pi(C)$. С другой стороны, $\pi(J(C)) \leq J(\pi(C)) \ll \pi(C)$ и, следовательно, $\pi(C) = 0$. Получено противоречие с тем фактом, что согласно сделанному предположению $C \neq \text{Ker}\pi$. Таким образом, $J(C) + \text{Ker}\pi < C$.

Поскольку $(f - g)(P) \leq C$, то $(f - g)(J(P)) \leq J(C)$. Следовательно, из включения $\text{Ker}\pi \leq J(P)$ вытекает $(f - g)(\text{Ker}\pi) \leq J(C)$. Так как $g(\text{Ker}\pi) \leq \text{Ker}\pi$, то $f(\text{Ker}\pi) \leq (f - g)(\text{Ker}\pi) + g(\text{Ker}\pi) \leq J(C) + \text{Ker}\pi$. Поскольку $f(C) \leq C$, то $f(J(C)) \leq J(C)$. Тогда $f(\text{Ker}\pi + J(C)) \leq \text{Ker}\pi + J(C)$. Получили противоречие с тем фактом, что C является наименьшим подмодулем модуля P , для которого выполнены условия $f(C) \leq C$ и $\text{Ker}\pi \leq C$. Следовательно, $f(\text{Ker}\pi) \leq \text{Ker}\pi$.

8) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 11.

1) $\Rightarrow$ 8). Пусть M — слабо проективный модуль. Если M является разложимым модулем, то согласно следствию 4 M является квазипроективным модулем. Предположим, что M — неразложимый модуль и для некоторых собственных подмодулей U, V модуля M выполнено равенство $U + V = M$. Поскольку R — совершенное справа кольцо, согласно ([24], 43.9) существуют такие подмодули U' и V' соответственно подмодулей U и V , что U' — аддитивное дополнение для V' в M , и наоборот. Из ([32], 20.9) и леммы 9 следует $M = U' \oplus V'$. Получили противоречие. Таким образом, M — полый модуль и согласно лемме 11 M является мало квазипроективным модулем. $\square$

Предложение 4. *Каждая слабо эндоморфизм-поднимаемая абелева группа без кручения является свободной.*

Доказательство. Пусть A — абелева группа без кручения. В A существует собственная подгруппа F , порожденная максимальным независимым подмножеством из A . Ясно, что A/F — периодическая группа.

Если X — подгруппа A , то для любого эндоморфизма $f : A/X \rightarrow A/X$, у которого $\text{Im} f \neq A/X$, существует эндоморфизм f' абелевой группы A такой, что $\sigma_A^X \circ f' = f \circ \sigma_A^X$. При этом, очевидно, разным f соответствуют разные f' . Таким образом, для произвольной подгруппы X группы A существует инъективное отображение из множества всех несюръективных эндоморфизмов A/X в кольцо эндоморфизмов A .

Рассмотрим два случая.

Случай 1. A — абелева группа конечного ранга. Пусть ранг группы A равен n . Предположим, что группа A/F бесконечна. Без ограничения общности можно считать, что $F = \mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Z}^n \leq A \leq \mathbb{Q}^n$. Тогда

$$A/\mathbb{Z}^n \leq \mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p^n.$$

Таким образом, поскольку каждая примарная компонента группы A/F имеет конечный ранг, то либо группа A/F представима в виде счетной прямой суммы ненулевых циклических групп, либо A/F изоморфна группе вида $\mathbb{Z}_p^\infty \oplus H$. Через S обозначим множество

эндоморфизмов $f \in \text{End}(A/F)$, у которых $\text{Im} f \neq A/F$. Если A/F — счетная прямая сумма ненулевых циклических групп, то множество всех прямых слагаемых A/F имеет мощность континуума. Следовательно, $|S| = \aleph$. Если $A/F \cong \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus H$, где $H \neq 0$, то из равенства $|\text{End}(\mathbb{Z}_{p^\infty})| = \aleph$, очевидно, следует, что $|S| = \aleph$. Если $A/F \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, то для подмодуля qF , где q — простое число, отличное от p , имеет место изоморфизм $A/Fq \cong \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_q^n$. Тогда согласно рассуждениям, аналогичным приведенным выше, множество S' , состоящее из всех эндоморфизмов $f \in \text{End}(A/qF)$, у которых $\text{Im} f \neq A/qF$, имеет мощность континуума. Согласно изложенному выше существуют инъективные отображения из рассмотренных выше множеств S и S' в кольцо $\text{End}(A)$. С другой стороны, из конечности ранга A следует равенство $|\text{End}(A)| = \aleph_0$. Таким образом, получаем противоречие. Тогда A/F — конечная группа и, следовательно, A — конечно-порожденная свободная абелева группа.

Случай 2. Группа A имеет бесконечный ранг. Несложно заметить, что в этом случае $F \cong \mathbb{Z}^{(I)}$ и $A \leq A \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{(I)}$, где I — множество, равномощное F . Следовательно, $|F| = |A|$. Тогда для некоторой подгруппы H группы F существует изоморфизм $\varphi : A/F \rightarrow F/H$. Рассмотрим эндоморфизм $\Phi : A/H \rightarrow A/H$, действующий по правилу $\Phi(a + H) = \varphi(a + F)$ для любого $a \in A$. Тогда $\text{Ker}(\Phi) = F/H$ и $\text{Im}(\Phi) = F/H < A/H$. Поскольку A — слабо эндоморфизм-поднимаемая абелева группа, то существует эндоморфизм f группы A такой, что $\sigma_A^H \circ f = \Phi \circ \sigma_A^H$. Так как $\text{Im}(\Phi) = F/H$, то $\text{Im}(f) \leq F$. Поскольку F — свободная абелева группа, то $\text{Im}(f)$ — свободная абелева группа. Тогда $A \cong \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$. Для любого $a \in A \setminus F$ имеем

$$\sigma_A^H \circ f(a) = \Phi \circ \sigma_A^H(a) = \Phi(a + H) = \varphi(a + F) \neq 0.$$

Следовательно, $\text{Ker}(f) \leq F$. Поскольку F — свободная группа, то $\text{Ker}(f)$ — свободная группа. Таким образом, A — свободная абелева группа. $\square$

Теорема 22. *Для абелевой группы G следующие условия равносильны:*

- 1) G — слабо проективная абелева группа;
- 2) выполнено одно из следующих условий
 - a) G — свободная абелева группа,
 - b) G — разложимая периодическая абелева группа такая, что каждая ее p -компонента изоморфна группе вида $\bigoplus_I \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$.
 - c) G — неразложимая периодическая абелева группа, т. е. для некоторых $p \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть G — слабо проективная абелева группа. Предположим, что G — разложимая периодическая абелева группа. Согласно следствию 4 группа G является квазипроективной. Тогда из ([28], с. 128, теорема 11.2) следует, что каждая p -компонента группы G изоморфна группе вида $\bigoplus_I \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$.

Если G — абелева группа без кручения, то из предложения 4 следует, что G — свободная абелева группа.

Если G — смешанная абелева группа, то G разложима. Тогда согласно следствию 4 G — квазипроективная абелева группа. С другой стороны, согласно ([28], с. 128, теорема 11.2) квазипроективной смешанной группы не существует. Таким образом, всякая слабо проективная абелева группа удовлетворяет одному из условий п. 2).

2) $\Rightarrow$ 1) Если абелева группа G удовлетворяет либо условию а), либо условию б) п. 2), то G является квазипроективной абелевой группой и, следовательно, G является слабо проективной абелевой группой.

Если G является неразложимой периодической группой, то для некоторого $p \in \mathbb{P}$ либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^n}$, либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Ясно, что $\mathbb{Z}_{p^n}$ — слабо проективная абелева группа. Слабая

проективность абелевой группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ следует из того факта, что всякий эндоморфизм $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, у которого образ отличен от $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, является нулевым. $\square$

Пример 4. Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -модуль $M := \mathbb{Z}_{2^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{3^\infty}$. Согласно ([28], с. 128, теорема 11.2) M не является квазипроективным модулем. Из теоремы 22 следует, что M не является слабо проективным модулем. Согласно ([33], 2.58) M является эндоморфизм-поднимаемым модулем и, в частности, M — слабо эндоморфизм-поднимаемая абелева группа.

Теорема 23. *Для периодической абелевой группы A следующие условия равносильны:*

- 1) A — эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 2) A — автоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 3) A — слабо эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 4) A — π -проективная абелева группа;
- 5) A — дуально ADS-абелева группа;
- 6) $A = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где для каждого $p \in \mathbb{P}$ A_p — p -компонента A и либо $A_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $A_p \cong \bigoplus_I \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ для некоторого $n_p \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Импликации $1) \Rightarrow 2)$, $1) \Rightarrow 3)$ очевидны, $4) \Rightarrow 5)$ следует из леммы 10.

$3) \Rightarrow 4)$ вытекает из леммы 9.

$2) \Rightarrow 5)$ следует из ([12], предложение 6).

$5) \Rightarrow 6)$ вытекает из ([34], предложение 5).

$6) \Rightarrow 1)$ проверяется непосредственно. $\square$

Теорема 24. *Пусть A — абелева группа без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) A — свободная абелева группа;
- 2) A — квазипроективная абелева группа;
- 3) A — эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 4) A — слабо эндоморфизм-поднимаемая абелева группа.

Доказательство. Импликации $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)$ проверяются непосредственно.

$4) \Rightarrow 1)$ следует из предложения 4. $\square$

Теорема 25. *Пусть A — смешанная абелева группа. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) A — эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 2) A — слабо эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 3) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ группа A имеет вид $A \cong (\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p) \oplus (\mathbb{Z}^n)$, где для каждого простого числа $p \in \mathbb{P}$ либо $A_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ для некоторого $n_p \in \mathbb{N}$.

Доказательство. $1) \Rightarrow 2)$ очевидно.

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть A — смешанная абелева группа, которая является слабо эндоморфизм-поднимаемой. Поскольку $t(A)$ является вполне инвариантной подгруппой A , то согласно лемме 7 $A/t(A)$ является слабо эндоморфизм-поднимаемой группой. Так как $A/t(A)$ — абелева группа без кручения, то согласно предложению 4 абелева группа $A/t(A)$ является свободной. Тогда $A = t(A) \oplus H$, где H — свободная абелева группа. Согласно условию $t(A) \neq 0$ и $H \neq 0$. Из леммы 8 и теоремы 23 следует $t(A) \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где для каждого $p \in \mathbb{P}$ либо $A_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $A_p \cong \bigoplus_{I_p} \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ для некоторого $n_p \in \mathbb{N}$. Поскольку абелева группа $\mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ ($n_p \geq 1$) не является $\mathbb{Z}$ -проективной, то из леммы 10 следует, что для каждого $p \in \mathbb{P}$ либо $A_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, либо $A_p = 0$.

Поскольку A — смешанная абелева группа, то существует простое число p такое, что $A_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Предположим, что H — абелева группа бесконечного ранга. Тогда $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — гомоморфный образ H , т. е. для некоторой подгруппы F группы H имеет место изоморфизм

$\mathbb{Z}_p^\infty \cong H/F$. Так как $\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^\infty, H) = 0$, то $\mathbb{Z}_p^\infty$ не является H -проективной, что противоречит тому факту, что A является дуальной ADS -группой. Таким образом, $H \cong \mathbb{Z}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Импликация $3) \Rightarrow 1)$ проверяется непосредственно. $\square$

Из теорем 23–25 вытекает

Теорема 26. Пусть A — абелева группа. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A — эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 2) A — слабо эндоморфизм-поднимаемая абелева группа;
- 3) выполнено одно из следующих условий
 - а) A — свободная абелева группа;
 - б) A — смешанная абелева группа и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеет место изоморфизм $A \cong (\oplus_{p \in \mathbb{P}} A_p) \oplus (\mathbb{Z}^n)$, где для каждого $p \in \mathbb{P}$ A_p — p -компонента A и либо $A_p \cong \mathbb{Z}_p^\infty$, либо $A_p = 0$;
 - с) A — периодическая абелева группа и $A \cong \oplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$, где для каждого $p \in \mathbb{P}$ A_p — p -компонента A и либо $A_p \cong \mathbb{Z}_p^\infty$, либо $A_p \cong \oplus_I \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ для некоторого $n_p \in \mathbb{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Johnson R.E., Wong E.T. *Quasi-injective modules and irreducible rings*, J. London Math. Soc. **36** (1), 260–268 (1961).
- [2] Jain S.K., Singh S. *On pseudo-injective modules and self pseudo injective rings*, J. Math. Sci. **2** (1), 23–31 (1967).
- [3] Dickson S.E., Fuller K.R. *Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope*, Pacific J. Math. **31** (3), 655–658 (1969).
- [4] Er N., Singh S., Srivastava A. *Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls*, J. Algebra **379**, 223–229 (2013).
- [5] Santa-Clara C. *Extending modules with injective or semisimple summands*, J. Pure Appl. Algebra **127** (2), 193–203 (1998).
- [6] Abyzov A.N., Quynh T.C., Ha N.T.T., Yildirim T. *Modules close to the automorphism-invariant and coinvariant*, J. Algebra Appl. **18** (12), 1950235 (2019).
- [7] Tuganbaev A.A. *Automorphism-invariant semi-Artinian modules*. J. Algebra Appl. **16** (2), 1750029 (2017).
- [8] Tuganbaev A.A. *Semidistributive modules and rings* (Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Boston, London, 1998).
- [9] Абызов А.Н., Буй Т.Д. *Существенно квазиинъективные модули и их прямые суммы*, Изв. вузов. Матем. (7), 9–23 (2024).
- [10] Туганбаев А.А. *Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули*, Вестн. МГУ. Сер. Матем., мех. (3), 48–51 (1979).
- [11] Singh S., Srivastava A.K. *Dual automorphism-invariant modules*, J. Algebra **371**, 262–275 (2012).
- [12] Abyzov A.N., Quynh T.C. *Lifting of automorphisms of factor modules*, Commun. Algebra **46** (11), 5073–5082 (2018).
- [13] Мишина А.П. *Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. (4), 39–43 (1962).
- [14] Мишина А.П. *Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп*. II, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. (1), 62–66 (1972).
- [15] Tuganbaev A.A. *Arithmetical Rings and Endomorphisms* (Walter de Gruyter, Berlin-Boston, 2019).
- [16] Tuganbaev A.A. *Automorphism-extendable and endomorphism-extendable modules*, J. Math. Sci. **245** (2), 234–284 (2020).
- [17] Кильп М.А. *Квазиинъективные абелевы группы*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. (3), 3–4 (1967).
- [18] Fuchs L., Rangaswamy K.M. *Quasi-projective abelian groups*. Bull. Soc. Math. France **98**, 5–8 (1970).
- [19] Fuchs L. *Infinite Abelian Groups*. I, Pure Appl. Math. **36** (Acad. Press, 1970).
- [20] Burgess W.D., Raphael R. *On modules with the absolute direct summand property*, 137–148 (World Sci. Publ., River Edge, 1993).
- [21] Koşan T.M., Žemlička J. *ADS Abelian groups*, J. Algebra Appl. **24**50182 (2023).

- [22] Trang D.T., Koşan T.M., Tasdemir O., Quynh T.C. *On modules and rings having large absolute direct summands*, Comm. Algebra **51** (12), 4949–4961 (2023).
- [23] Туганбаев А.А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* (М., МЦНМО, 2009).
- [24] Wisbauer R. *Foundations of module and ring theory* (Gordon and Sci. Publ., 1991).
- [25] Каш Ф. *Модули и кольца* (Мир, М., 1981).
- [26] Dung N.V., Huynh D.V., Smith P.F., Wisbauer R. *Extending modules* (SRC Press, 1994).
- [27] Quynh T.C., Koşan M.T. *On ADS modules and rings*, Commun. Algebra **42** (8), 3541–3551 (2014).
- [28] Fuchs L. *Abelian Groups* (Springer Monographs Mathematics, 2015).
- [29] Mohamed S.H., Müller B.J. *Continuous and discrete modules* **147** (Cambridge Univ. Press, 1990).
- [30] Абызов А.Н., Буй Т.Д. *Мало квазипроективные модули*, Матем. Теорет. комп. науки **2** (3), 4–28 (2024).
- [31] Tuganbaev A.A. *Automorphism-liftable modules*, J. Algebra Appl. **21** (6), 2250106 (2022).
- [32] Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R. *Lifting modules: Supplements and projectivity in module theory* (Birkhauser Verlag, Basel, 2006).
- [33] Абызов А.Н., Куинь Ч.К., Туганбаев А.А. *Модули, инвариантные относительно автоморфизмов и идемпотентных эндоморфизмов своих оболочек и накрытий*, Итоги науки и техн. Серия Совр. матем. и ее прил. Темат. обз. **159**, 3–45 (2019).
- [34] Feigelshtock S., Raphael R. *A Problem on relative projectivity for Abelian groups*. Canad. Math. Bull. **29** (1), 114–122 (1986).

Адель Наилевич Абызов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: aabyzov@ksu.ru

Тиен Дат Буй

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;
Технологический университет Кантхо,
ул. Нгуен Ван Ку, д. 256, г. Кантхо, Вьетнам,
e-mail: btat@ctu.edu.vn

A.N. Abyzov and T.D. Bui

Weakly injective modules and weakly projective modules

Abstract. Weakly injective and weakly projective modules, which are extensions of the classes of quasi-injective modules and quasi-projective modules respectively, are studied. Descriptions are obtained for weakly injective and weakly projective Abelian groups, as well as for some classes of Abelian groups closely related to them.

Keywords: weakly injective module, weakly projective module, weakly endomorphism-extendable module, weakly endomorphism-liftable module, Abelian group.

Adel Nailevich Abyzov

Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: aabyzov@ksu.ru

Tien Dat Bui

Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia;
Can Tho University of Technology,
256 Nguyen Van Cu str., Can Tho City, Vietnam,
e-mail: btat@ctu.edu.vn