

К.К. САБИРОВ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $1 < \alpha < 2$ НА МЕТРИЧЕСКИХ
ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ГРАФАХ**

Аннотация. В данной работе рассматриваются нелинейные стационарные дробно-пространственные дифференциальные уравнения порядка $1 < \alpha < 2$ на метрическом звездообразном графе с тремя конечными ребрами. В точке разветвления звездообразного графа выполняется условие непрерывности веса и применяется обобщенное правило Кирхгофа. Найдены точные решения нелинейных стационарных дробных дифференциальных уравнений на звездообразном графе. Эти решения могут быть обобщены на звездообразные графы с любым числом ребер.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение дробного порядка, метрический звездообразный граф, дробный интеграл, производная Римана–Лиувилля.

УДК: 517.9: 519.17

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-11-42-47

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия теория дробных дифференциальных уравнений привлекла к себе большое внимание благодаря ее применению в многочисленных, разнообразных и широко распространенных областях науки и техники [1]–[3]. Она находится в постоянном развитии, подпитываемом идеями и результатами различных направлений математики. Одним из таких направлений являются нелинейные обыкновенные и частные дифференциальные уравнения, рассматриваемые на разветвленных структурах, так называемых метрических графах.

Применение дифференциальных уравнений на метрических графах в квантовой теории подробно описано в работах [4], [5]. В [6] изучались законы сохранения, такие как энергия и норма, для вывода граничных условий на вершинах метрических графов рассматривалось решение в виде бегущего солитона. Статические солитонные решения стационарных нелинейных уравнений Шрёдингера с граничным условием на вершинах метрических графов изучались в работах [7]–[10]. Статические нелинейные волны в сетях, описываемых нелинейным уравнением Шрёдингера с точечными нелинейностями на метрических графах, были изучены, были получены явные решения, удовлетворяющие граничным условиям на вершинах графа, и было обнаружено спонтанное нарушение симметрии, вызванное бифуркациями в работе [11].

В данной работе изучаются два типа нелинейных дробно-пространственных стационарных уравнений на метрическом звездообразном графе с тремя конечными ребрами. В разделе 2 дается формулировка задачи, описываемой нелинейным дробно-пространственным

стационарным дифференциальным уравнением порядка $1 < \alpha < 2$, и в качестве граничных условий используются условие непрерывности веса и обобщенное правило Кирхгофа на вершине разветвления. А также получено статическое решение на метрическом звездообразном графе, удовлетворяющее склеиваниям граничных условий на вершинах. В разделе 4 рассматривается другое нелинейное стационарное дробно-пространственное стационарное уравнение порядка $1 < \alpha < 2$ на звездообразном графе.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1. Пусть $\Omega = [a; b]$ — конечный интервал на вещественной оси R . Дробные интегралы Римана–Лиувилля, обозначаемые $I_{a,x}^\alpha$ и $I_{x,b}^\alpha$ порядка $\alpha \in C(\operatorname{Re}(\alpha) > 0)$, определяются как

$$(I_{a,x}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a, \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (1)$$

$$(I_{x,b}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b, \operatorname{Re}(\alpha) > 0) \quad (2)$$

соответственно, где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, интегралы (1) и (2) называются левосторонним и правосторонним дробными интегралами.

Определение 2. Левосторонняя и правосторонняя производные Римана–Лиувилля, обозначаемые $D_{a,x}^\alpha y$ и $D_{x,b}^\alpha y$ порядка $\alpha \in \mathbf{C}(\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0)$, определяются как

$$(D_{a,x}^\alpha y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, x > a),$$

$$(D_{x,b}^\alpha y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, x < b)$$

соответственно, где $[\operatorname{Re}(\alpha)]$ означает целую часть $\operatorname{Re}(\alpha)$. В частности, $0 < \alpha < 1$, тогда

$$(D_{a,x}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha} \quad (x > a),$$

$$(D_{x,b}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^\alpha} \quad (x < b).$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим звездообразный граф G с тремя ребрами e_j , $j = 1, 2, 3$, для которых задана координата x_j (см. рис.). Выбрав начало координат в вершине L_j , для ребер e_j положим $x_j \in [0; L_j]$. Используем сокращенную запись $y_j(x)$ вместо $y_j(x_j)$, где x — координата на ребре j , к которой относится компонента y_j .

Рассмотрим следующее нелинейное стационарное дифференциальное уравнение с дробным порядком $1 < \alpha < 2$ на каждом ребре:

$$(D_{0,x}^\alpha y_j)(x) = \lambda_j x^{\beta_j} [y_j(x)]^{m_j}, \quad 0 < x < L_j, \quad m_j \neq 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

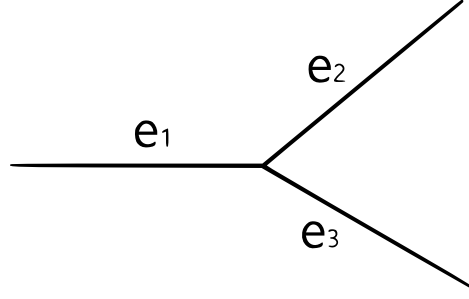


Рис. Метрический звездообразный граф с тремя конечными ребрами

с граничными условиями в точке разветвления

$$\lambda_1^{\frac{1}{m_1-1}} y_1(x)|_{x=L_1} = \lambda_2^{\frac{1}{m_2-1}} y_2(x)|_{x=L_2} = \lambda_3^{\frac{1}{m_3-1}} y_3(x)|_{x=L_3}, \quad (4)$$

$$\lambda_1^{\frac{m_1}{m_1-1}} \left(D_{0,x}^{\alpha-1} y_1 \right) (L_1-) = \lambda_2^{\frac{m_2}{m_2-1}} \left(D_{0,x}^{\alpha-1} y_2 \right) (L_2-) + \lambda_3^{\frac{m_3}{m_3-1}} \left(D_{0,x}^{\alpha-1} y_3 \right) (L_3-), \quad (5)$$

и в концах ребер

$$\left(I_{0,x}^{2-\alpha} y_j \right) (+0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где $y_j(x) \in C_{\gamma_j^*-\alpha}[0, L_j]$ для $0 < \gamma_j^* - \alpha < 1$, $\gamma_j^* = \frac{\beta_j + m_j \alpha}{1 - m_j}$, $\lambda \neq 0$.

Теорема 1. Задача (3)-(6) имеет точное решение.

Доказательство. Ищем решение уравнения (3) в виде

$$y_j(x) = A_j x^{\gamma_j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где A_j, γ_j — константы. После непосредственной подстановки (7) в (3) точное решение уравнения (3) имеет вид

$$y_j(x) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_j + \alpha}{1 - m_j} + 1\right)}{\lambda_j \Gamma\left(\frac{\beta_j + m_j \alpha}{1 - m_j} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{m_j-1}} x^{\frac{\beta_j + \alpha}{1 - m_j}}. \quad (8)$$

Выполняя граничные условия (4), (5) на вершине графа, имеем следующую систему трансцендентных уравнений относительно λ_j , $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_1 + \alpha}{1 - m_1} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1 + m_1 \alpha}{1 - m_1} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{m_1-1}} L_1^{\frac{\beta_1 + \alpha}{1 - m_1}} &= \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_2 + \alpha}{1 - m_2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_2 + m_2 \alpha}{1 - m_2} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{m_2-1}} L_2^{\frac{\beta_2 + \alpha}{1 - m_2}} = \\ &= \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_3 + \alpha}{1 - m_3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_3 + m_3 \alpha}{1 - m_3} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{m_3-1}} L_3^{\frac{\beta_3 + \alpha}{1 - m_3}}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_1}{\left(\frac{\beta_1 + m_1\alpha}{1 - m_1} + 1\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_1 + \alpha}{1 - m_1} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1 + m_1\alpha}{1 - m_1} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{m_1-1}+1} L_1^{\frac{\beta_1+\alpha}{1-m_1}+1} = \\
& = \frac{\lambda_2}{\left(\frac{\beta_2 + m_2\alpha}{1 - m_2} + 1\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_2 + \alpha}{1 - m_2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_2 + m_2\alpha}{1 - m_2} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{m_2-1}+1} L_2^{\frac{\beta_2+\alpha}{1-m_2}+1} + \\
& + \frac{\lambda_3}{\left(\frac{\beta_3 + m_3\alpha}{1 - m_3} + 1\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta_3 + \alpha}{1 - m_3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_3 + m_3\alpha}{1 - m_3} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{m_3-1}+1} L_3^{\frac{\beta_3+\alpha}{1-m_3}+1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

В частном случае, когда $m_j = m$, $\beta_j = \beta$, $L_j = L$, $j = 1, 2, 3$, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$, поэтому система трансцендентных уравнений (9), (10) имеет решение. Теперь ясно, что точное решение (8) удовлетворяет не только граничным условиям (6), но и условиям

$$\left(D_{0,x}^{\alpha-1} y_j\right)(+0) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Следовательно, рассматриваемая задача имеет точное решение в виде (8). $\square$

3. ДРУГОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ

Рассмотрим нелинейное стационарное дифференциальное уравнение с дробным порядком $1 < \alpha < 2$ на каждом ребре метрического звездообразного графа

$$\left(D_{0,x}^{\alpha} y_j\right)(x) = \lambda_j x^{\beta_j} [y_j(x)]^{m_j} + b_j x^{\nu_j}, \quad 0 < x < L_j, \quad m_j > 0, \quad m_j \neq 1, \quad j = 1, 2, 3, \tag{12}$$

с граничным условием непрерывности веса (4) и (5) в точке разветвления и условиями (6) на конце ребер, где $y_j(x) \in C_{\gamma_j^*-\alpha}^*[0, L_j]$ для $0 < \gamma_j^* - \alpha < 1$, $\gamma_j^* = \frac{\beta_j + m_j\alpha}{1 - m_j}$, $\lambda \neq 0$.

Ищем решение уравнения (12) в виде (7), где A_j удовлетворяет следующему трансцендентному уравнению:

$$\Gamma\left(\frac{\beta_j + \alpha}{1 - m_j} + 1 - \alpha\right) (\lambda_j A_j^{m_j} + b_j) - \Gamma\left(\frac{\beta_j + \alpha}{1 - m_j} + 1\right) A_j = 0.$$

Предполагаем, что

$$\nu_j = \frac{\beta_j + m_j\alpha}{1 - m_j}.$$

Тогда легко проверить, что нелинейное уравнение (12) имеет решение

$$y_j(x) = A_j x^{\frac{\beta_j + \alpha}{1 - m_j}}. \tag{13}$$

Итак, $\gamma_j = \frac{\beta_j + \alpha}{1 - m_j} + 1$. Ясно, что точное решение (13) удовлетворяет не только граничным условиям (6), но и условиям (11). После подстановки решения (13) в вершинные граничные

условия (4), (5) получаем следующую систему трансцендентных уравнений относительно λ_j , $j = 1, 2, 3$:

$$\lambda_1^{\frac{1}{m_1-1}} A_1 L_1^{\gamma_1-1} = \lambda_2^{\frac{1}{m_2-1}} A_2 L_2^{\gamma_2-1} = \lambda_3^{\frac{1}{m_3-1}} A_3 L_3^{\gamma_3-1}, \quad (14)$$

$$\lambda_1^{\frac{m_1}{m_1-1}} A_1 \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_1 - \alpha)} L_1^{\gamma_1 - \alpha - 1} = \lambda_2^{\frac{m_2}{m_2-1}} A_2 \frac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_2 - \alpha)} L_2^{\gamma_2 - \alpha - 1} + \lambda_3^{\frac{m_3}{m_3-1}} A_3 \frac{\Gamma(\gamma_3)}{\Gamma(\gamma_3 - \alpha)} L_3^{\gamma_3 - \alpha - 1}. \quad (15)$$

В частном случае, когда $m_j = m$, $\gamma_j = \gamma$, $L_j = L$, $j = 1, 2, 3$, имеем $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$, поэтому система трансцендентных уравнений (14), (15) имеет решение.

Теорема 2. *Задача (12) с граничными условиями (4)–(6) имеет точное решение в виде (7).*

ВЫВОДЫ

В данной работе рассмотрели нелинейные стационарные дифференциальные уравнения дробного порядка $1 < \alpha < 2$ на метрическом звездообразном графе с тремя конечными ребрами. В точке разветвления звездообразного графа применили непрерывность веса и обобщенное правило Кирхгофа. Сначала искали решение на каждом ребре, а после склеивания условий в вершине графа и концах ребер были найдены точные решения нелинейных стационарных дробных уравнений на звездообразном графе. Эти решения могут быть обобщены на звездообразные графы с любым числом ребер.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics* (Stuttgart, Germany, 2000).
- [2] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations* (Amsterdam, the Netherlands, 2006).
- [3] Umarov S. *Introduction to fractional and pseudo-differential equations with singular symbols* (Springer, 2015).
- [4] Kottos T., Smilansky U. *Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs*, Annals Phys. **274** (1), 76–124 (1999).
- [5] Exner P., Kovarik H. *Quantum waveguides* (Springer, 2015).
- [6] Sobirov Z., Matrasulov D., Sabirov K., Sawada S., Nakamura K. *Integrable nonlinear Schrödinger equation on simple networks: Connection formula at vertices*, Phys. Rev. E **81**, 066602 (2010).
- [7] Adami R., Cacciapuoti C., Finco D., Noja D. *Fast solitons on star graphs*, Rev. Math. Phys. **23** (04), 409–451 (2011).
- [8] Adami R., Cacciapuoti C., Finco D., Noja D. *Stationary states of NLS on star graphs*, EPL **100** (1), 19901 (2012).
- [9] Sabirov K.K., Sobirov Z.A., Babajanov D., Matrasulov D.U. *Stationary nonlinear Schrödinger equation on simplest graphs*, Phys. Lett. A **377** (12), 860–865 (2013).
- [10] Noja D. *Nonlinear Schrödinger equation on graphs: recent results and open problems*, Philosoph. Trans. Royal Soc. A: Math., Phys. Engin. Sci. **372** (2007), 20130002 (2014).
- [11] Sabirov K. K., Yusupov J. R., Matyokubov Kh. Sh., Susanto H., Matrasulov D.U. *Networks with point-like nonlinearities*, Наносистемы: физика, химия, матем. **13** (1), 30–35 (2022).

Каримжон Кабилджанович Сабиров

Ташкентский государственный экономический университет,
ул. Ислама Каримова, д. 49, г. Ташкент, 100066, Республика Узбекистан,

e-mail: karimjonsabirov80@gmail.com

K.K. Sabirov

Nonlinear stationary differential equations of fractional order $1 < \alpha < 2$ on metric star graphs

Abstract. In this paper, nonlinear stationary fractional-in-space differential equations with order $1 < \alpha < 2$ on a metric star graph with three finite bonds are considered. At the branching point of the star graph, the continuity condition for the weight is satisfied, and the generalized Kirchhoff rule is applied. They are found the exact solutions to nonlinear stationary fractional equations on the star graph. These solutions can be extended to star graphs with any number of bonds.

Keywords: Nonlinear differential equation of fractional order, metric star graph, fractional integral, Riemann–Lioville derivative.

Karimjon Kabildjanovich Sabirov

Tashkent State University of Economics,

49 Islam Karimov str., Tashkent, 100066 Republic of Uzbekistan,

e-mail: karimjonsabirov80@gmail.com