

Краткое сообщение, представленное М.М. Арслановым

М.В. ЗУБКОВ

НИЗКИЙ РАЗРЕЖЕННЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ПОРЯДОК РАНГА 2, НЕ ИМЕЮЩИЙ ВЫЧИСЛИМОЙ КОПИИ

Аннотация. В обзоре Р. Дауни 1998 года был поставлен вопрос: описать свойства порядка P такие, что для любого низкого линейного порядка L , если $P(L)$ выполняется, то L имеет вычислимую копию. В данной работе показано, что свойство разреженности не является таким свойством. А именно, строится низкий разреженный линейный порядок ранга 2 без вычислимой копии.

Ключевые слова: низкий линейный порядок, разреженный линейный порядок, вычислимый линейный порядок.

УДК: 510.53, 512.562

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-10-88-93

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена описанию алгоритмических свойств линейных порядков, допускающих вычислимые представления. Дж. Найт (в неопубликованной работе) спросила, имеет ли каждый низкий линейный порядок вычислимую копию. Однако К. Джокуш и Р. Соар [1] опровергли эту гипотезу, построив низкий линейный порядок без вычислимой копии. С другой стороны, Р. Дауни и М. Мозес [2] доказали, что каждый низкий дискретный линейный порядок имеет вычислимую копию. Эти результаты естественным образом приводят к следующему вопросу (по сути, целой исследовательской программе), сформулированному Р. Дауни в 1998 году в его обзоре [3]: описать свойства P классических типов порядка, гарантирующие, что если $\mathcal{L}$ — низкий линейный порядок и его тип удовлетворяет P , то $\mathcal{L}$ изоморфен вычислимому линейному порядку.

Первоначально А.Н. Фролов [4] показал, что каждый низкий сильно η -схожий линейный порядок имеет вычислимую копию. Позже он обобщил этот результат [5]: каждый низкий k -квазидискретный линейный порядок имеет вычислимую копию. Кроме того, П.Е. Алаев, Дж. Тербер и А.Н. Фролов [6] доказали, что каждый 2-низкий 1-квазидискретный линейный порядок вычислимо представим. Первый результат может быть усилен в другом направлении: если низкий линейный порядок с η -конденсацией не имеет сильно η -схожих подынтервалов, то он имеет вычислимую копию [7]. Также отметим результат М.В. Зубкова [8]:

Поступила в редакцию 29.08.2025, после доработки 29.08.2025. Принята к публикации 26.09.2025.

Благодарности. Работа поддержана грантом Академии наук Республики Татарстан, предоставленным молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан, соглашение №19/2024-ПД.

если размеры левых и правых локальных максимальных блоков в низком η -схожем порядке ограничены фиксированным числом, то порядок имеет вычислимую копию.

Полное решение проблемы Р. Дауни кажется чрезвычайно сложным и, вероятно, недостижимым. Поэтому, как отмечалось выше, это не просто вопрос, а сложная исследовательская программа. Более того, наряду с положительными частичными результатами существуют отрицательные, также представляющие интерес. Напомним, что К. Джокуш и Р. Соар [1] построили низкий линейный порядок без вычислимой копии, имеющий ранг Хаусдорфа, равный двум. А.Н. Фролов [9] построил низкий η -схожий порядок без вычислимой копии. Отметим, что η -схожий порядок имеет ранг Хаусдорфа, равный единице, — минимально возможный. Построенный А.Н. Фроловым низкий порядок без вычислимой копии является ω -суммой сильных η -представлений множеств. Напомним, что линейный порядок $\mathcal{L}$ типа $\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \dots$ называется (сильным) η -представлением множества A , где $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ — перечисление $A \subset \omega$ (соответственно в порядке возрастания). Множество конечных неоднородных блоков сильного η -представления упорядочено как ω . Поскольку порядок Фролова является ω -суммой сильных η -представлений, его множество неоднородных блоков упорядочено как ω^2 .

Недавно А.Н. Фролов и М.В. Зубков [10] показали, что существует даже низкое сильное η -представление множества без вычислимой копии. Интересно сравнить этот результат с результатом М.В. Зубкова [11]: любой низкий линейный порядок вида $\mathcal{L} + \omega^*$, где $\mathcal{L}$ — некоторое η -представление, имеет вычислимую копию (подробности см. в обзорах [9], [12]).

В настоящей работе мы сосредоточимся на разреженных линейных порядках и ответим на следующий вопрос: изоморфен ли каждый низкий разреженный линейный порядок вычислимому?

Напомним, что линейный порядок называется *разреженным*, если он не содержит подпорядка типа η . Как известно (фольклор, восходящий к [13]), счетный линейный порядок дискретен тогда и только тогда, когда он имеет конечное или счетное число нисходящих разрезов. А. Монтальбан и А. Кач [14] доказали, что если n -низкий линейный порядок имеет только конечное число нисходящих разрезов, то он имеет вычислимую копию. Из результата М. Лермана [15] следует, что каждое 2-низкое (и следовательно, низкое) сильное ζ -представление имеет вычислимую копию, но существует 3-низкое сильное ζ -представление без вычислимой копии (определение (сильного) ζ -представления получается из определения (сильного) η -представления заменой η на ζ). Отметим, что нисходящие разрезы любого сильного ζ -представления имеют тип ω . А. Монтальбан и А. Кач [14] спросили: имеет ли каждый 2-низкий разреженный линейный порядок вычислимую копию? А.Н. Фролов [16] дал отрицательный ответ на этот вопрос.

Отметим недавнюю работу [17], в которой показано, что если бесконечные блоки в низком разреженном линейном порядке могут быть распознаны с помощью оракула $\mathbf{0}'$, то такой порядок имеет вычислимую копию. Дополнительно там предлагается следующее уточнение упомянутого выше вопроса: изоморфен ли низкий разреженный линейный порядок вычислимому? Если нет, то каков минимальный ранг Хаусдорфа α , для которого существует низкий разреженный линейный порядок ранга α без вычислимой копии? Может ли α быть конечным?

Очевидно, существует только три бесконечных типа разреженных линейных порядков ранга Хаусдорфа 1: тип натуральных чисел ω , тип отрицательных целых ω^* и тип целых чисел ζ . Отметим, что каждое сильное ζ -представление дискретно и имеет ранг Хаусдорфа, равный двум. Следовательно, основной результат данной работы дает полный ответ на поставленный вопрос. А именно, строится низкий разреженный линейный порядок ранга 2

без вычислимой копии. Мы следуем [18] для определений и обозначений в теории вычислимости и [13] для определений и обозначений для линейных порядков. Основы вычислимых линейных порядков освещены в обзоре [3].

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. *Существует низкий разреженный линейный порядок ранга 2 без вычислимой копии.*

Схема доказательства. Как известно (см. [19] или [5]), линейный порядок $\mathcal{L}$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда он имеет $\mathbf{0}'$ -вычислимую копию с $\mathbf{0}'$ -вычислимым отношением следования. Поэтому вместо низкого линейного порядка мы построим $\mathbf{0}'$ -вычислимый порядок с $\mathbf{0}'$ -вычислимым отношением следования.

Ясно, что любой вычислимый линейный порядок вычислимо изоморфен перечислимому подмножеству множества рациональных чисел (см., например, [3]). Позволяя себе вольность обозначений, пусть $\{W_e\}_{e \in \omega}$ — вычислимая нумерация всех перечислимых подмножеств $\mathbb{Q}$. Индуцированный подпорядок на перечислимом подмножестве также будем обозначать W_e .

Искомый порядок $\mathcal{L}$ построим в виде

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \omega} [(2i + 1) + \zeta + \mathcal{L}_i + \mathcal{R}_i + \zeta],$$

где $\mathcal{L}_i$ — конечный порядок или порядок типа ω , а $\mathcal{R}_i$ — конечный порядок или порядок типа ω^* .

Для доказательства теоремы необходимо удовлетворение следующих требований:

$$R_e : \mathcal{L} \text{ не изоморфен } W_e \text{ посредством } \varphi_e^{\mathbf{0}''},$$

что достаточно, поскольку по лемме 1, если $\mathcal{L}$ имеет вычислимую копию $\mathcal{L}'$, то изоморфизм между ними должен быть $\mathbf{0}''$ -вычислимым.

Лемма 1. *Пусть*

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \omega} [(2i + 1) + \zeta + \mathcal{L}_i + \mathcal{R}_i + \zeta]$$

— линейный порядок, где для каждого i :

- $\mathcal{L}_i$ — непустой конечный порядок или порядок типа ω ,
- $\mathcal{R}_i$ — непустой конечный порядок или порядок типа ω^* .

Тогда $\mathcal{L}$ является относительно Δ_3^0 -категоричным.

Справедливость данной леммы может быть установлена непосредственным построением изоморфизма между двумя различными представлениями $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ порядка такого вида, для чего потребуются оракул $(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)''$.

Перейдем к описанию конструкции линейного порядка. Областью определения линейного порядка будет множество ω . Будем строить его как последовательность конечных линейных порядков, на каждом шаге определяя порядок и отношение следования с помощью оракула $\mathbf{0}'$. Требование R_e будет работать только в интервале $\mathcal{L}_e + \mathcal{R}_e$. Разные требования будут удовлетворяться каждый в своем интервале и не будут взаимодействовать, поэтому итоговый порядок будет суммой интервалов, построенных отдельными требованиями.

Для удовлетворения одного требования зафиксируем оракул $\mathbf{0}'$ и пусть $\varphi_e^{\mathbf{0}'}(\cdot, s)$ будет приближением $\varphi_e^{\mathbf{0}''}$. Обозначим $\mathcal{L}_s$ и $W_{e,s}$ для приближений $\mathcal{L}$ и W_e на шаге s соответственно. Отметим, что как только мы добавляем новые элементы в $\mathcal{L}_s$, для каждой пары элементов объявляем, являются ли они соседями, и это не меняется на последующих шагах. Однако

может случиться, что мы объявили пару элементов x и y не соседями, но между ними в $\mathcal{L}_s$ еще нет элементов. Это означает, что мы добавим их на дальнейших шагах. Поскольку мы зафиксировали оракул $\mathbf{O}'$, для любых элементов в $W_{e,s}$ знаем, являются ли они соседями в W_e . Далее, говоря о соседях и блоках без указания порядка, подразумеваем отношение следования в смысле $\mathcal{L}$ или W_e соответственно. Основная идея удовлетворения одного требования повторяет идею конструкции Джокуша–Соара [1], хоть и в более простой ситуации.

Построение для R_e .

Пусть $e = \langle e_1, e_2 \rangle$. Как упомянуто выше, требование работает только в интервале $\mathcal{L}_e + \mathcal{R}_e$.

Шаг $s = 0$. Для четырех наименьших неиспользованных элементов положим $\mathcal{L}_e(0) = \{l_0^e <_{\mathcal{L}} l_1^e\}$, $\mathcal{R}_e(0) = \{r_1^e <_{\mathcal{L}} r_0^e\}$. Объявим пары (l_0^e, l_1^e) , (r_1^e, r_0^e) соседями. Требование R_e не удовлетворено, тип $\mathcal{L}_e$ установлен в ω , а тип $\mathcal{R}_e$ — в ω^* .

Отметим, что l_0 — левая предельная точка $\mathcal{L}_i$, а r_0 — правая предельная точка $\mathcal{R}_i$. Будучи определенными, они не изменятся в ходе построения.

Шаг $s + 1$. После шага s уже построены $\mathcal{L}_e(s) = \{l_0^e <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} l_{k_s}^e\}$ и $\mathcal{R}_e(s) = \{r_{m_s}^e <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} r_0^e\}$. Возможны следующие случаи.

Случай 1. На шаге $s + 1$ мы начинаем работать над требованием R_e впервые или после инициализации. Тогда $\mathcal{L}_e(s)$ и $\mathcal{R}_e(s)$ имеют объявленные типы ω и ω^* соответственно. Вычислим $a_e(s + 1) = \varphi_{e_2}^{\mathbf{O}'}(l_0^e, s + 1)$ и $b_e(s + 1) = \varphi_{e_2}^{\mathbf{O}'}(r_0^e, s + 1)$. Используя оракул $\mathbf{O}'$, мы можем либо найти $m + k + 3$ элементов между $a_e(s + 1)$ и $b_e(s + 1)$ в W_{e_1} , либо убедиться, что они соединены цепочкой соседей и, следовательно, лежат в одном блоке.

- Если $a_e(s + 1)$ и $b_e(s + 1)$ лежат в одном блоке W_{e_1} , объявим требование R_e удовлетворенным, тип $\mathcal{L}_e$ — ω , тип $\mathcal{R}_e$ — ω^* .
- Иначе найдем элемент $c_e(s + 1)$ такой, что между $a_e(s + 1)$ и $c_e(s + 1)$ есть не менее $k_s + 1$ элементов, а между $c_e(s + 1)$ и $b_e(s + 1)$ — не менее $m_s + 1$ элементов. Объявим тип $\mathcal{L}_e$ — ω , тип $\mathcal{R}_e$ — ω^* .

Случай 2. На шаге $s + 1$ мы начинаем работать над требованием R_e , которое ранее было активно (и вероятно, уже удовлетворено). Возможны следующие подслучаи.

Подслучай 1. Выполняются равенства $a_e(s) = \varphi_{e_2}^{\mathbf{O}'}(l_0^e, s + 1)$ и $b_e(s) = \varphi_{e_2}^{\mathbf{O}'}(r_0^e, s + 1)$.

- Если требование уже удовлетворено, оставим его удовлетворенным и расширим $\mathcal{L}_e$ и $\mathcal{R}_e$ в соответствии с их типами. А именно, если тип $\mathcal{L}_e$ — ω , добавим два новых элемента: $\mathcal{L}_e(s + 1) = \{l_0^e <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} l_{k_s}^e <_{\mathcal{L}} l_{k_s+1}^e <_{\mathcal{L}} l_{k_s+2}^e\}$. Объявим пары $(l_{k_s}^e, l_{k_s+1}^e)$, $(l_{k_s+1}^e, l_{k_s+2}^e)$ соседями. Если тип $\mathcal{L}_e$ конечен и равен некоторому числу $r + 1 \geq k_s + 1$ (заметим, что по построению $r + 1 < k_s + 1$ невозможно), то добавим недостающие элементы: $\mathcal{L}_e(s + 1) = \{l_0^e <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} l_{k_s}^e <_{\mathcal{L}} l_{k_s+1}^e <_{\mathcal{L}} l_r^e\}$ (если $r + 1 = k_s + 1 > 1$, новые элементы добавлять не нужно) и объявим пары $(l_{k_s}^e, e_{k_s+1})$, $(l_{k_s+1}^e, e_{k_s+2})$, $\dots$, (l_{r-1}^e, e_r) соседями. Для $\mathcal{R}_e$ поступим симметрично.
- Если требование не удовлетворено, то на предыдущем шаге, помимо $\mathcal{L}_e$ и $\mathcal{R}_e$, определен параметр $c_e(s)$. Более того, число элементов между $a_e(s)$ и $c_e(s)$ не менее $k + 1$, а между $c_e(s)$ и $b_e(s)$ — не менее $m + 1$. Тогда, используя оракул $\mathbf{O}'$, поищем два новых элемента в интервалах $(a_e(s), c_e(s))_{W_{e_1}}$ и $(c_e(s), b_e(s))_{W_{e_1}}$. Возможны четыре варианта:

- 1) Найдены два элемента в каждом интервале (т.е. не менее $k_s + 3$ элементов между $a_e(s)$ и $c_e(s)$, и не менее $m + 3$ между $c_e(s)$ и $b_e(s)$). Добавим два новых элемента: $\mathcal{L}_e(s + 1) = \{l_0^e <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} l_{k_s}^e <_{\mathcal{L}} l_{k_s+1}^e <_{\mathcal{L}} l_{k_s+2}^e\}$ и два элемента: $\mathcal{R}_e(s + 1) = \{r_{m_s+2}^e <_{\mathcal{L}} r_{m_s+1}^e <_{\mathcal{L}} r_{m_s}^e <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} r_0^e\}$. Объявим пары $(l_{k_s}^e, l_{k_s+1}^e)$,

- $(l_{k_s+1}^e, l_{k_s+2}^e), (r_{m_s+2}^e, r_{m_s+1}^e), (r_{m_s+1}^e, r_{m_s}^e)$ соседями. Тип $\mathcal{L}_e$ остается ω , тип $\mathcal{R}_e - \omega^*$.
- 2) Найдены два элемента только в $(a_e(s), c_e(s))$ (т.е. не менее $k_s + 3$ элементов между $a_e(s)$ и $c_e(s)$, но $b_e(s)$ и $c_e(s)$ лежат в одном блоке W_{e_1}). Добавим два новых элемента: $\mathcal{L}_e(s+1) = \{l_0^e <_{\mathcal{L}} \dots <_{\mathcal{L}} l_{k_s}^e <_{\mathcal{L}} l_{k_s+1}^e <_{\mathcal{L}} l_{k_s+2}^e\}$, объявим пары $(l_{k_s}^e, l_{k_s+1}^e), (l_{k_s+1}^e, l_{k_s+2}^e)$ соседями. Объявим требование удовлетворенным, тип $\mathcal{L}_e - \omega$, тип $\mathcal{R}_e - m_s + 1$ (конечный).
- 3) Найдены два элемента только в $(c_e(s), b_e(s))$ (т.е. не менее $m_s + 3$ элементов между $c_e(s)$ и $b_e(s)$, но $a_e(s)$ и $c_e(s)$ лежат в одном блоке W_{e_1}). Добавим два новых элемента: $\mathcal{R}_e(s+1) = \{r_{m_s+2}^e <_{\mathcal{R}} r_{m_s+1}^e <_{\mathcal{R}} r_{m_s}^e <_{\mathcal{R}} \dots <_{\mathcal{R}} r_0^e\}$, объявим пары $(r_{m_s+2}^e, r_{m_s+1}^e), (r_{m_s+1}^e, r_{m_s}^e)$ соседями. Объявим требование удовлетворенным, тип $\mathcal{L}_e - k_s + 1$ (конечный), тип $\mathcal{R}_e - \omega^*$.
- 4) Не найдено двух новых элементов ни в одном интервале (т.е. $a_e(s), c_e(s), b_e(s)$ лежат в одном блоке W_{e_1}). Добавим два новых элемента в $\mathcal{L}_e$ и $\mathcal{R}_e$, как в варианте 1. Объявим требование удовлетворенным, тип $\mathcal{L}_e - \omega$, тип $\mathcal{R}_e - \omega^*$.

Во всех подвариантах положим $a_e(s+1) = a_e(s)$, $b_e(s+1) = b_e(s)$, $c_e(s+1) = c_e(s)$.

Подслучай 2. Нарушено хотя бы одно из условий $a_e(s) = \varphi_{e_2}^{0'}(l_0^e, s+1)$ или $b_e(s) = \varphi_{e_2}^{0'}(r_0^e, s+1)$. Инициализируем требование: сбросим параметры, объявим требование неудовлетворенным. Добавим два новых элемента в $\mathcal{L}_e$ и $\mathcal{R}_e$, как на шаге 0. Объявим тип $\mathcal{L}_e - \omega$, тип $\mathcal{R}_e - \omega^*$.

Во всех случаях пары элементов, не объявленные явно соседями, объявляются не соседями.

Нетрудно видеть, что для проверки корректности построения достаточно доказать следующие леммы.

Лемма 2. *Если для требования R_e ($e = \langle e_1, e_2 \rangle$) случай 1 выполняется бесконечно часто, то требование R_e удовлетворено, $\mathcal{L}_e$ будет иметь тип ω , $\mathcal{R}_e -$ тип ω^* .*

Пусть s_0 — шаг, после которого подслучай 2 случая 2 никогда не выполняется.

Лемма 3. *Если на некотором шаге $s_1 > s_0$ выполняется вариант 4 подслучая 1, то требование R_e удовлетворено, $\mathcal{L}_e$ будет иметь тип ω , $\mathcal{R}_e -$ тип ω^* .*

Лемма 4.

- 1) *Если на шаге $s_1 > s_0$ выполняется вариант 2 подслучая 1, то требование R_e удовлетворено, $\mathcal{L}_e$ будет иметь тип ω , $\mathcal{R}_e -$ тип $m + 1$ (конечный).*
- 2) *Если на шаге $s_1 > s_0$ выполняется вариант 3 подслучая 1, то требование R_e удовлетворено, $\mathcal{L}_e$ будет иметь тип $k + 1$ (конечный), $\mathcal{R}_e -$ тип ω^* .*

Лемма 5. *Если на всех шагах $s > s_0$ выполняется вариант 1 подслучая 1, то требование R_e удовлетворено, $\mathcal{L}_e$ будет иметь тип ω , $\mathcal{R}_e -$ тип ω^* .*

Осталось заметить, что конструкция для одного требования равномерна по e и не выходит за пределы интервала $\mathcal{L}_e + \mathcal{R}_e$, т.е. отсутствует взаимодействие между требованиями. Таким образом, нетрудно организовать общую конструкцию итогового линейного порядка. Стандартные детали оставляем читателю.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jockusch C.G., Soare R.I. *Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings*, Ann. Pure Appl. Logic **52** (1-2), 39–61 (1991).
- [2] Downey R.G., Moses M.F. *On choice sets and strongly nontrivial self-embeddings of recursive linear orders*, Math. Logic Quart. **35**, 237–246 (1989).
- [3] Downey R.G. *Computability theory and linear orderings*, Handbook of recursive mathematics, V. 2, 823–976 (North-Holland, Amsterdam, 1998).
- [4] Фролов А.Н. Δ_2^0 -копии линейных порядков, Алгебра и логика **45** (3), 354–370 (2006).
- [5] Фролов А.Н. *Линейные порядки низкой степени*, Сиб. матем. журн. **51** (5), 1147–1162 (2010).
- [6] Алаев П.Е., Тербер Дж., Фролов А.Н. *Вычислимость на линейных порядках, обогащенных предикатами*, Алгебра и логика **48** (5), 549–563 (2009).
- [7] Frolov A.N. *Low linear orderings*, J. Logic and Comput. **22** (4), 745–754 (2012).
- [8] Зубков М.В. *Достаточные условия существования $\mathbf{0}'$ -предельно монотонных функций для вычислимых η -схожих линейных порядков*, Сиб. матем. журн. **58** (1), 107–121 (2017).
- [9] Фролов А.Н. *Вычислимая представимость счетных линейных порядков*, Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. **158**, 81–115 (2018).
- [10] Frolov A., Zubkov M. *The simplest low linear order with no computable copies*, J. Symb. Logic **89** (1), 97–111 (2024).
- [11] Зубков М.В. *Об одном классе низких линейных порядков, имеющих вычислимые представления*, Алгебра и логика **61** (5), 552–570 (2022).
- [12] Зубков М.В., Фролов А.Н. *Вычислимые линейные порядки и предельно монотонные функции*, Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. **157**, 70–105 (2018).
- [13] Rosenstein J.G. *Linear orderings* (Acad. Press Inc., New York–London, 1982).
- [14] Kach A., Montalbán A. *Cuts of linear orders*, Order **28**, 593–600 (2011).
- [15] Lerman M. *On recursive linear orderings*, Lect. Notes Math. **859**, 132–142 (1981).
- [16] Frolov A. *Scattered linear orderings with no computable presentation*, Lobachevskii J. Math. **35** (1), 19–22 (2014).
- [17] Frolov A., Zubkov M. *Low scattered linear orders*, J. Logic and Comput. **35** (2), article exae008 (2025).
- [18] Soare R.I. *Recursively enumerable sets and degrees* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1987).
- [19] Montalbán A. *Notes on the jump of a structure*, J. Logic and Comput. **5635**, 372–378 (2009).

Максим Витальевич Зубков

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru

M.V. Zubkov

A low scattered linear order of rank 2 with no computable copy

Abstract. In R. Downey’s 1998 survey, the question was posed: describe order properties P such that for any low linear order L , if $P(L)$ holds, then L has a computable copy. This paper shows that the property of being scattered is not such a property. Namely, a low scattered linear order of rank 2 with no computable copy is constructed.

Keywords: low linear order, scattered linear order, computable linear order.

Maxim Vitalyevich Zubkov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: maxim.zubkov@kpfu.ru