

Краткое сообщение, представленное С.М. Скрыбиным

А.Н. АБЫЗОВ, Д.Т. ТАПКИН

ПОЛЯ, МАТРИЦЫ НАД КОТОРЫМИ ПРЕДСТАВИМЫ В ВИДЕ СУММЫ ПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ И НИЛЬПОТЕНТНОЙ МАТРИЦЫ

Аннотация. Исследуются поля, каждая матрица над которыми представима в виде суммы двух потентных матриц и нильпотентной матрицы. В частности, показано, что над полем P всякая матрица представима в виде суммы двух идемпотентных матриц и нильпотентной матрицы в точности тогда, когда либо $P \cong \mathbb{F}_2$, либо $P \cong \mathbb{F}_3$.

Ключевые слова: q -потент, конечное поле, матрицы над конечными полями.

УДК: 512.552

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-10-78-82

ВВЕДЕНИЕ

Элемент a из кольца R называется потентным, если для некоторого натурального числа $n > 1$ выполнено равенство $a^n = a$. Кольца, матрицы над которыми представимы в виде суммы двух потентных матриц, были изучены в последнее время в ряде работ. Также были изучены кольца и, в частности, поля, каждая матрица над которыми представима в виде суммы потентной матрицы и нильпотентной матрицы. В работе [1] доказано, что над полем P каждая матрица представима в виде суммы идемпотентной матрицы и нильпотентной матрицы в точности тогда, когда $P \cong \mathbb{F}_2$. Обобщение этого утверждения на случай произвольного поля было получено в работе [2]. А именно, было показано, что если q — целое число, большее единицы, то над полем P каждая матрица представима в виде суммы q -потентной матрицы и нильпотентной матрицы в точности тогда, когда P — конечное поле и $|P| - 1$ делит $q - 1$. В дальнейшем результаты статьи [2] получили развитие в работах [3]–[5]. В статье [3] показано, что если F — поле, не изоморфное полю $\mathbb{F}_3$, и q — нечетное натуральное число, большее единицы, то каждая квадратная матрица над F представима в виде суммы идемпотентной матрицы и q -потентной матрицы в точности тогда, когда над полем F каждая квадратная матрица представима в виде суммы нильпотентной матрицы и q -потентной матрицы. В работе [5] показано, что для произвольного векторного пространства V над полем $\mathbb{F}_q$ всякий линейный оператор, действующий на V , представим в виде суммы q -потентного линейного оператора и локально нильпотентного линейного оператора.

Поступила в редакцию 17.09.2025, после доработки 17.09.2025. Принята к публикации 26.09.2025.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 25-11-00348) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

В [6] доказано, что каждая матрица на поле F представима в виде суммы двух трипотентных матриц в точности тогда, когда поле F изоморфно одному из полей: $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$. Общий подход к решению проблемы об описании полей, каждая матрица над которыми представима в виде суммы q_1 -потентной матрицы и q_2 -потентной матрицы, где $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, был предложен в работе [7].

В настоящей статье изучаются поля, каждая матрица над которыми представима в виде суммы двух потентных матриц и нильпотентной матрицы. В частности, показано, что над полем P всякая матрица представима в виде суммы двух идемпотентных матриц и нильпотентной матрицы в точности тогда, когда либо $P \cong \mathbb{F}_2$, либо $P \cong \mathbb{F}_3$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть над полем P каждая матрица представима в виде суммы p -потентной матрицы, q -потентной матрицы и нильпотентной матрицы, где p, q — натуральные числа, большие единицы, и q нечетно. Тогда для каждого векторного пространства над полем P и всякого линейного оператора $A \in \text{End}_P(V)$ имеет место равенство

$$A = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{N},$$

где $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{N} \in \text{End}_P(V)$, $\mathcal{E}_1^p = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2^q = \mathcal{E}_2$ и $\mathcal{N}$ — локально нильпотентный линейный оператор.

Как показали Я. Хирано и Х. Томинага, для любого ненулевого кольца R и $n > 1$ кольцо матриц $M_n(R)$ содержит элемент, который не представим в виде суммы двух идемпотентов (см. [8], лемма 3). При добавлении нильпотентной части ситуация становится интереснее.

Теорема 2. Для поля F следующие условия эквивалентны:

- 1) для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ каждая матрица из $M_n(F)$ представима в виде суммы двух идемпотентных матриц и нильпотентной матрицы;
- 2) для каждого $n > 1$ каждая матрица из $M_n(F)$ представима в виде суммы идемпотента, трипотента и нильпотента;
- 3) для каждого векторного пространства V над полем F всякий линейный оператор $A \in \text{End}_F(V)$ представим в виде $A = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{N}$, где $\mathcal{E}_1^2 = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2^2 = \mathcal{E}_2$ и $\mathcal{N}$ — локально нильпотентный оператор;
- 4) для каждого векторного пространства V над полем F всякий линейный оператор $A \in \text{End}_F(V)$ представим в виде $A = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{N}$, где $\mathcal{E}_1^2 = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2^3 = \mathcal{E}_2$ и $\mathcal{N}$ — локально нильпотентный оператор;
- 5) F изоморфно либо $\mathbb{F}_2$, либо $\mathbb{F}_3$.

Отсюда и из ([9], теорема 1.1) следует

Теорема 3. Для поля F и каждого натурального n следующие условия эквивалентны:

- 1) каждая матрица из $M_n(F)$ представима в виде суммы двух идемпотентных матриц и нильпотентной матрицы;
- 2) каждая матрица из $M_n(F)$ представима в виде суммы трех идемпотентных матриц.

В связи с теоремой 2 интерес представляет следующая проблема.

Открытый вопрос 1. Пусть V — счетномерное векторное пространство над полем F , которое изоморфно либо $\mathbb{F}_2$, либо $\mathbb{F}_3$. Верно ли, что каждый линейный оператор из $\text{End}_F(V)$ представим в виде суммы двух проекторов и нильпотентного оператора?

В статье [10] исследовался вопрос представимости матриц в виде суммы нескольких идемпотентов. В частности, было показано, что для каждого простого конечного поля F найдется натуральное число N такое, что для всех $n > N$ все элементы кольца матриц $M_n(F)$ представимы в виде суммы четырех идемпотентов. Так как представимость в виде суммы трех идемпотентов равносильна представимости в виде суммы двух идемпотентов и нильпотента, то естественно возникает

Открытый вопрос 2. Верно ли, что для каждого простого конечного поля F найдется натуральное число N такое, что для всех $n > N$ все элементы кольца матриц $M_n(F)$ представимы в виде суммы трех идемпотентов и нильпотента?

В формулировке теоремы 2 отсутствует условие вида “для некоторого $n \in \mathbb{N}$ каждая матрица из $M_n(F)$ представима в виде идемпотента, трипотента и нильпотента”. Данное ограничение существенно. Более того, имеет место

Теорема 4. *Для каждого натурального числа n любая матрица из кольца $M_{2n}(\mathbb{F}_5)$ представима в виде суммы идемпотента, трипотента и нильпотента.*

Для колец матриц малых нечетных порядков ситуация иная.

Предложение 1. *Имеют место следующие эквивалентности:*

- 1) *каждая матрица из $M_3(\mathbb{F})$ представима в виде суммы идемпотента, трипотента и нильпотента в точности тогда, когда F изоморфно либо $\mathbb{F}_2$, либо $\mathbb{F}_3$;*
- 2) *каждая матрица из $M_5(\mathbb{F})$ представима в виде суммы идемпотента, трипотента и нильпотента в точности тогда, когда F изоморфно либо $\mathbb{F}_2$, либо $\mathbb{F}_3$.*

В связи с этим возникает следующий

Открытый вопрос 3. Верно ли, что для каждого нечетного n имеет место следующая эквивалентность:

- 1) *каждая матрица из $M_n(F)$ представима в виде суммы идемпотента, трипотента и нильпотента;*
- 2) *F изоморфно либо $\mathbb{F}_2$, либо $\mathbb{F}_3$?*

Ситуация с суммой двух трипотентов также представляет интерес. В ([6], теорема 1) показано, что в кольце матриц $M_n(F)$ над полем F каждая матрица есть сумма двух трипотентов в точности тогда, когда F изоморфно либо $\mathbb{F}_2$, либо $\mathbb{F}_3$, либо $\mathbb{F}_5$. При добавлении нильпотентной части в кольцо матриц второго порядка ситуация снова становится богаче.

Предложение 2. *Каждая матрица из $M_2(F)$ представима в виде суммы двух трипотентов и нильпотента в точности тогда, когда F изоморфно одному из полей $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$.*

Особый интерес представляет кольцо матриц $M_3(\mathbb{F}_7)$. Компьютерная проверка показывает, что каждая матрица в $M_3(\mathbb{F}_7)$ также представима в виде суммы двух трипотентов и нильпотента. В связи с этим можно поставить

Открытый вопрос 4. Верно ли, что для каждого натурального $n > 1$ все элементы кольца матриц $M_n(\mathbb{F}_7)$ представимы в виде суммы двух трипотентов и нильпотента?

В приведенных выше результатах интересно ведет себя кольцо матриц $M_2(F)$ над полем F . Это мотивирует исследовать вопрос представимости элементов $M_2(F)$ в виде суммы идемпотента, q -потента и нильпотента. Как показано в ([3], лемма 9, теорема 14), следующие условия эквивалентны для поля F и нечетного $q > 1$:

- 1) каждая матрица в $M_2(F)$ представима в виде суммы идемпотента и q -потента;
- 2) $|F| - 1 \mid q - 1$.

Ниже приведена выдержка из результатов компьютерных экспериментов.

q	Поля, для которых каждая матрица в $M_2(F)$ представима в виде суммы идемпотента и q -потента	Поля, для которых каждая матрица в $M_2(F)$ представима в виде суммы идемпотента, q -потента и нильпотента; $ F < 50$
3	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$
5	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{13}$
7	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_7$	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{13}$
9	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_9$	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{13}, \mathbb{F}_{17}, \mathbb{F}_{25}$
11	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_{11}$	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_{11}, \mathbb{F}_{16}, \mathbb{F}_{31}, \mathbb{F}_{41}$
13	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{13}, \mathbb{F}_{25}, \mathbb{F}_{37}, \mathbb{F}_{49}$

Похоже, что задача описания полей, для которых каждая матрица в $M_2(F)$ представима в виде суммы идемпотента, q -потента и нильпотента носит комбинаторный характер и не имеет явного решения. Однако интерес вызывает следующий

Открытый вопрос 5. Верно ли, что для любого нечетного $q \geq 3$ найдется поле F такое, что каждая матрица в $M_2(F)$ представима в виде суммы идемпотента, q -потента и нильпотента, но существует матрица $A \in M_2(F)$, которая не представима в виде суммы идемпотента и q -потента?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Breaz S., Călugăreanu G., Danchev P., Micu T. *Nil-clean matrix rings*, Linear Algebra Appl. **439** (10), 3115–3119 (2013).
- [2] Абызов А.Н., Мухаметгалиев М.И. *О некоторых матричных аналогах малой теоремы Ферма*, Матем. заметки **101** (2), 163–168 (2017).
- [3] Абызов А.Н., Тапкин Д.Т. *Кольца, матрицы над которыми представимы в виде суммы идемпотентной матрицы и q -потентной матрицы*, Сиб. матем. журн. **62** (1), 3–18 (2021).
- [4] Breaz S. *Matrices over finite fields as sums of periodic and nilpotent elements*, Linear Algebra Appl. **555**, 92–97 (2018).
- [5] Abyzov A.N., Tapkin D.T. *When is every linear transformation a sum of a q -potent one and a locally nilpotent one?*, Linear Algebra Appl. **709**, 124–131 (2025).
- [6] Abyzov A.N., Tapkin D.T. *When is every matrix over a ring the sum of two tripotents?*, Linear Algebra Appl. **630**, 316–325 (2021).
- [7] Абызов А.Н., Тапкин Д.Т. *Представимость матриц над коммутативными кольцами в виде суммы двух потентных матриц*, Сиб. матем. журн. **65** (6), 1039–1060 (2024).
- [8] Hirano Y., Tominaga H. *Rings in which every element is the sum of two idempotents*, Bull. Austral. Math. Soc. **37** (2), 161–164 (1988).
- [9] Tang G., Zhou Y., Su H. *Matrices over a commutative ring as sums of three idempotents or three involutions*, Linear Multilinear Algebra **67** (2), 267–277 (2019).
- [10] Pazzis C. de S. *On sums of idempotent matrices over a field of positive characteristic*, Linear Algebra Appl. **433** (4), 856–866 (2010).

Адель Наилевич Абызов

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I,

Московский просп., д. 9, г. Санкт-Петербург, 190031, Россия,

e-mail: adel.abyzov@kpfu.ru

Даниль Тагирзянович Тапкин

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I,

Московский просп., д. 9, г. Санкт-Петербург, 190031, Россия,

e-mail: danil.tapkin@yandex.ru

A.N. Abyzov and D.T. Tapkin

Fields over which matrices can be represented as the sum of potent and nilpotent matrices

Abstract. We study fields over which every matrix can be represented as a sum of two potent matrices and a nilpotent matrix. In particular, it is shown that over a field P every matrix can be represented as a sum of two idempotent matrices and a nilpotent matrix exactly when either $P \cong \mathbb{F}_2$, or $P \cong \mathbb{F}_3$.

Keywords: q -potent, finite field, matrices over finite fields.

Adel Nailevich Abyzov

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia;

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University,

9 Moskovsky Ave., Saint Petersburg, 190031 Russia,

e-mail: adel.abyzov@kpfu.ru

Danil Tagirzyanovich Tapkin

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia;

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University,

9 Moskovsky Ave., Saint Petersburg, 190031 Russia,

e-mail: danil.tapkin@yandex.ru