

А. БУКАРУ, С.Г. ГЕОРГИЕВ, К. БУХАЛИ, Х. ЗЕННИР

КЛАССИЧЕСКИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Аннотация. Для получения классических неотрицательных решений уравнения Власова предлагается новый подход, основанный на использовании неподвижной точки и определенных топологических свойств. Данный подход позволяет найти как минимум одно решение, а также как минимум два различных решения. Показано, как данный метод применяется к задаче нахождения классических неотрицательных решений уравнения Власова.

Ключевые слова: уравнение Власова, существование решений, итерационный метод, классическое решение.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-10-50-63

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Власова, известное самому А.А. Власову, является фундаментальным для описания плазменной физики. Оно было введено в работе [1] и в настоящее время все чаще используется вместо уравнений магнитогидродинамики при решении сложных задач плазменной физики, что стало возможным благодаря увеличению вычислительных мощностей. Однако это не главное: по-видимому, его основное достоинство заключается в более глубокой фундаментальности, сравнимой в некотором смысле с фундаментальностью уравнения Лиувилля. Уравнения власовского типа содержат решения задачи n -тел для любого n . Это свойство делает их сверхфундаментальными, что неоднократно отмечалось различными авторами. Представляется особенно важным тот факт, что уравнение Власова допускает микроскопические решения, соответствующие точным решениям классической механики [2]–[5]. Другая задача власовских моделей — описание интенсивных пучков заряженных частиц, эволюция которых характеризуется распределением плотности частиц. Такое распределение обычно допускает непрерывное множество стационарных состояний. Уравнение Власова связано с понятием самосогласованного поля, согласно которому сила, действующая на частицу со стороны других частиц, определяется как сила со стороны непрерывно распределенной среды, описывающей ансамбль частиц [6]–[8]. В данной работе рассматривается следующий класс уравнений:

$$\begin{aligned}\partial_t u + \partial_q H \partial_x u - \partial_x H \partial_q u &= 0, \quad q, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(t = 0, x, q) &= u^0(x, q), \quad q, x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{1}$$

здесь $u = u(t, x, q)$ представляет собой одночастичную функцию распределения, где x — координата, t — время, q — сопряженная переменная импульса. Функция H — это одночастичный гамильтониан, задаваемый формулой

$$H[u] = \frac{q^2}{2} + \varpi[u](t, x) + \varpi_{ext}(x).$$

Потенциал $\varpi[u](t, x)$ рассчитывается через потенциал взаимодействия двух тел v и распределение u как

$$\varpi[u](t, x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v(x - y) u(t, y, q) dq dy,$$

а $\varpi_{ext}(x)$ участвует во внешней силе

$$F_{ext}(y) = -\partial_y \varpi_{ext}(y).$$

(H1) Начальные данные u^0 — дифференцируемая непрерывная функция на $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, для которой

$$|u^0| \leq B, \quad |\partial_q u^0| \leq B, \quad |\partial_x u^0| \leq B$$

на $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ и существуют $v, \varpi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ такие, что

$$|v| \leq B, \quad |v'| \leq B, \quad |\varpi_{ext}| \leq B, \quad |\varpi'_{ext}| \leq B$$

на $\mathbb{R}$ для $B > 0$ и для $u \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times \mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Здесь u — неизвестная. Задача (1) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varpi(u)}{\partial x} + \varpi'_{ext}(x) \right) \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, \quad q, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(t = 0, x, q) &= u^0(x, q), \quad q, x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

В данной работе рассматривается задача (1) сначала с точки зрения существования по крайней мере одного решения, а затем — по крайней мере двух неотрицательных решений. Настоящая статья развивает подход, предложенный в работах [9]–[11], основанный на использовании замкнутых выпуклых множеств (см. также [12]–[14]). Этот подход позволяет исследовать существование как минимум одного, а также как минимум двух решений уравнения Власова.

Для случая, когда $\partial_x H \in W_{loc}^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, где Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, с гладкой границей и $u^0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, в работе [15] авторы доказали существование решения задачи (2) в $L^\infty(0, T; L^1(\Omega \times \mathbb{R}^n))$. Отметим, что условия, рассмотренные в работе [15], являются более ограничительными по сравнению с предложенными в настоящей статье, и в [15] обсуждается вопрос существования решений задачи (2). В настоящей работе рассматриваются существование и неединственность классических глобальных решений задачи (2).

Настоящая статья имеет следующую структуру. В разделе 1 формулируются вспомогательные утверждения и полезные результаты. В разделах 2, 3 на первом этапе доказывается существование по крайней мере одного классического решения задачи (2), а затем устанавливается существование по крайней мере двух неотрицательных классических решений. В разделе 4 приведен иллюстративный пример, демонстрирующий основные полученные результаты.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathcal{K}$ — вещественное банахово пространство. Напомним определения компактных и вполне непрерывных отображений в банаховых пространствах.

Определение 1. Пусть $K : M \subset \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ — отображение. Говорят, что K является компактным, если образ $K(M)$ содержится в компактном подмножестве множества $\mathcal{K}$. Отображение K называется вполне непрерывным, если оно непрерывно и переводит любое ограниченное множество в относительно компактное множество.

Предложение ([16]). Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$ такое, что $0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{C}$, здесь $\mathcal{U}$ — открытое множество. Пусть $h : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{C}$ — компактное и непрерывное отображение. Тогда

- а) либо h имеет неподвижную точку в $\bar{\mathcal{U}}$,
- б) либо $\exists x \in \partial\mathcal{U}$ и $0 < \nu < 1$ такие, что $x = \nu h(x)$.

Для доказательства нашего результата существования воспользуемся следующей теоремой о неподвижной точке, являющейся следствием предложения.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство, $\mathcal{Y}$ — выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$, $\mathcal{U}$ — произвольное открытое подмножество в $\mathcal{Y}$ такое, что $0 \in \mathcal{U}$. Пусть T и S — два оператора такие, что

$$Tx = \varepsilon x, \quad x \in \bar{\mathcal{U}},$$

для $\varepsilon > 0$ и

$$S : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{E},$$

причем

- i) $I - S : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывное и компактное,
- ii) $\{x \in \bar{\mathcal{U}} : x = \nu(I - S)x, x \in \partial\mathcal{U}\} = \emptyset \quad \forall \nu \in \left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Тогда $\exists \chi^* \in \bar{\mathcal{U}}$ такой, что

$$T\chi^* + S\chi^* = \chi^*.$$

Доказательство. Оператор $\frac{1}{\varepsilon}(I - S) : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{Y}$ компактен и непрерывен. Если $\exists x_0 \in \partial\mathcal{U}$ и $\mu_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$x_0 = \mu_0 \frac{1}{\varepsilon}(I - S)x_0,$$

т. е.

$$x_0 = \nu_0 (I - S)x_0,$$

где $\nu_0 = \mu_0 \frac{1}{\varepsilon} \in \left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$, то это противоречит условию ii). В силу нелинейной альтернативы Лере–Шаудера следует, что существует $\chi^* \in \bar{\mathcal{U}}$ такой, что

$$\chi^* = \frac{1}{\varepsilon}(I - S)\chi^*,$$

или

$$\varepsilon \chi^* + S\chi^* = \chi^*,$$

или

$$T\chi^* + S\chi^* = \chi^*.$$

□

Определение 2. Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{E}$ — вещественные банаховы пространства. Говорят, что отображение $K : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}$ является расширяющим, если существует число $a > 1$ такое, что

$$\|Kx - Kz\|_{\mathcal{E}} \geq a\|x - z\|_{\mathcal{K}} \quad \forall x, z \in \mathcal{K}.$$

Определение 3. Говорят, что выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{P}$ в $\mathcal{K}$ является конусом, если

- 1) $\alpha x \in \mathcal{P} \quad \forall \alpha \geq 0, \forall x \in \mathcal{P};$
- 2) $x, -x \in \mathcal{P} \implies x = 0.$

Пусть $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{0\}.$

Теорема 2 ([17], [18]). Пусть $\mathcal{P}$ — конус в банаховом пространстве $\mathcal{E}$ и Γ — подмножество множества $\mathcal{P}$. Предположим, что W_1, W_2 и W_3 — три ограниченных открытых подмножества в $\mathcal{P}$ такие, что

$$\overline{W}_1 \subset \overline{W}_2 \subset W_3$$

и $0 \in W_1$. Предположим также, что

$$T : \Gamma \rightarrow \mathcal{P}$$

— расширяющее отображение и

$$S : \overline{W}_3 \rightarrow \mathcal{E}$$

— вполне непрерывное отображение, причем

$$S(\overline{W}_3) \subset (I - T)(\Gamma).$$

Пусть

$$(W_2 \setminus \overline{W}_1) \cap \Gamma \neq \emptyset, \quad (W_3 \setminus \overline{W}_2) \cap \Gamma \neq \emptyset$$

и $\exists u^0 \in \mathcal{P}^*$ такой, что:

- i) для любого $\nu > 0$

$$Sx \neq (I - T)(x - \nu u^0),$$

где

$$x \in \partial W_1 \cap (\Gamma + \nu u^0);$$

- ii) для любого $\nu \geq 1 + \epsilon \quad \exists \epsilon \geq 0$ такой, что

$$Sx \neq (I - T)(\nu x),$$

где $x \in \partial W_2$ и $\nu x \in \Gamma$;

- iii) для любого $\nu > 0$

$$Sx \neq (I - T)(x - \nu u^0),$$

где

$$x \in \partial W_3 \cap (\Gamma + \nu u^0).$$

Тогда $T + S$ имеет по крайней мере две ненулевые неподвижные точки $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ такие, что

$$x_1 \in \partial W_2 \cap \Gamma \text{ и } x_2 \in (\overline{W}_3 \setminus \overline{W}_2) \cap \Gamma,$$

либо

$$x_1 \in (W_2 \setminus W_1) \cap \Gamma \text{ и } x_2 \in (\overline{W}_3 \setminus \overline{W}_2) \cap \Gamma.$$

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ ОДНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим пространство $\mathcal{K} = \mathcal{C}^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ с нормой

$$\|u\| = \max \left\{ \sup_{(t,x,q) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2} (t^2+1)(x^2+1)(q^2+1)|u|, \sup_{(t,x,q) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2} (t^2+1)(x^2+1)(q^2+1) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|, \right. \\ \left. \sup_{(t,x,q) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2} (t^2+1)(x^2+1)(q^2+1) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \sup_{(t,x,q) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2} (t^2+1)(x^2+1)(q^2+1) \left| \frac{\partial u}{\partial q} \right| \right\},$$

если она существует. Для $u \in \mathcal{K}$ определим

$$S_1(u) = u - u^0(x, q) - q \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, x, q) ds - \int_0^t \left(\frac{\partial \varpi(u)}{\partial x}(s, x) + \varpi'_{ext}(x) \right) \frac{\partial u}{\partial q}(s, x, q) ds.$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия (H1) и элемент $u \in \mathcal{K}$ такой, что

$$S_1(u) = 0, \quad (3)$$

тогда u является решением задачи (2).

Доказательство. Ввиду (3) имеем

$$0 = u - u^0(x, q) - q \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, x, q) ds - \int_0^t \left(\frac{\partial \varpi(u)}{\partial x}(s, x) + \varpi'_{ext}(x) \right) \frac{\partial u}{\partial q}(s, x, q) ds. \quad (4)$$

Продифференцируем (4) по t , чтобы найти первое уравнение из (2). Положив $t = 0$ в (4), получаем второе уравнение из (2). $\square$

Пусть

$$B_1 = \max\{2B + (\pi^2 B^2 + B)\pi B, \pi B\}.$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия (H1) и элемент $u \in \mathcal{K}$ такой, что $\|u\| = B$, тогда

$$|S_1(u)| \leq B_1(1 + |q|).$$

Доказательство. Имеем

$$\left| \frac{\partial \varpi(u)}{\partial x}(t, x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} v'(x - \tau) u(t, \tau, q) dp d\tau \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v'(x - \tau)| |u(t, \tau, q)| dp d\tau \leq \\ \leq B \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(t, \tau, q)| dp d\tau = \frac{B}{t^2 + 1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(t^2 + 1)(q^2 + 1)(\tau^2 + 1)}{(q^2 + 1)(\tau^2 + 1)} |u(t, \tau, q)| dp d\tau \leq \\ \leq B^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q^2 + 1} dp \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\tau^2 + 1} d\tau \right) = \pi^2 B^2, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$|S_1(u)| = \left| u - u^0(x, q) - q \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, x, q) ds - \int_0^t \left(\frac{\partial \varpi(u)}{\partial x}(s, x) + \varpi'_{ext}(x) \right) \frac{\partial u}{\partial q}(s, x, q) ds \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq |u| + |u^0(x, q)| + |q| \int_0^t \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, x, q) \right| ds + \int_0^t \left(\left| \frac{\partial \varpi(u)}{\partial x}(s, x) \right| + |\varpi'_{ext}(x)| \right) \left| \frac{\partial u}{\partial q}(s, x, q) \right| ds \leq \\
 &\leq \frac{(t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1)|u|}{(t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1)} + B + \frac{|q|}{(x^2 + 1)(q^2 + 1)} \int_0^t \frac{(s^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1)}{s^2 + 1} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, x, q) \right| ds + \\
 &\quad + \frac{\pi^2 B^2 + B}{(x^2 + 1)(q^2 + 1)} \int_0^t \frac{(s^2 + 1)(x^2 + 1)(t^2 + 1)}{s^2 + 1} \left| \frac{\partial u}{\partial q}(s, x, q) \right| ds \leq \\
 &\leq 2B + B|q| \int_0^t \frac{1}{s^2 + 1} ds + (\pi^2 B^2 + B)B \int_0^t \frac{1}{s^2 + 1} ds \leq \\
 &\leq 2B + \pi B|q| + (\pi^2 B^2 + B)\pi B \leq B_1(1 + |q|), \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

□

Пусть к тому же

(H2) существуют функция $g \in \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ такая, что $0 < g$ на $(0, \infty) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$
и

$$g(t = 0, x, q) = g(t, x = 0, q) = g(t, x, q = 0) = 0,$$

и число $A > 0$ такое, что

$$(t+1)^2(t^2+1)(1+|q|)^2(q^2+1)(|x|+1)^2(x^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^q g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq A, \quad t \geq 0, \quad q, x \in \mathbb{R}.$$

Пусть $u \in \mathcal{K}$, определим

$$S_2(u) = \int_0^t \int_0^x \int_0^q (t-s)(x-\tau)(q-z)g(s, \tau, z)S_1(u)(s, \tau, z) ds d\tau dz, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Лемма 3. Пусть выполняются условия (H1) и (H2). Если $u \in \mathcal{K}$ и $\|u\| \leq B$, то

$$\|S_2 u\| \leq AB_1.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 &(t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1)|S_2(u)| = \\
 &= (t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p (t-s)(x-\tau)(q-z)g(s, \tau, z)S_1(u)(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq (t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |t-s||x-\tau||q-z|g(s, \tau, z)|S_1(u)(s, \tau, z)| ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq B_1(t^2 + 1)(q^2 + 1)(x^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |t-s||x-\tau||q-z|g(s, \tau, z)(1 + |\tau|) ds d\tau dz \right| \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq B_1 t(t^2 + 1)|x|(x^2 + 1)|q|(1 + |q|)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq B_1(t + 1)^2(t^2 + 1)(|x| + 1)^2(x^2 + 1)(1 + |q|)^2(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq AB_1, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \frac{\partial}{\partial t} S_2(u) \right| = \\
&= (t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p (x - \tau)(q - z)g(s, \tau, z)S_1(u)(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq (t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |x - \tau||q - z|g(s, \tau, z)|S_1(u)(s, \tau, z)| ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq B_1(t^2 + 1)(q^2 + 1)(x^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |x - \tau||q - z|g(s, \tau, z)(1 + |\tau|) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq B_1(t^2 + 1)|x|(x^2 + 1)|q|(1 + |q|)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq B_1(t + 1)^2(t^2 + 1)(|x| + 1)^2(x^2 + 1)(1 + |q|)^2(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq AB_1, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \frac{\partial}{\partial x} S_2(u) \right| = \\
&= (t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p (t - s)(q - z)g(s, \tau, z)S_1(u)(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq (t^2 + 1)(x^2 + 1)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |t - s||q - z|g(s, \tau, z)|S_1(u)(s, \tau, z)| ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq B_1(t^2 + 1)(q^2 + 1)(x^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |t - s||q - z|g(s, \tau, z)(1 + |\tau|) ds d\tau dz \right| \leq \\
&\leq B_1 t(t^2 + 1)(x^2 + 1)|q|(1 + |q|)(q^2 + 1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq B_1(t+1)^2(t^2+1)(|x|+1)^2(x^2+1)(1+|q|)^2(q^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq AB_1, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}, \\
 &(t^2+1)(x^2+1)(q^2+1) \left| \frac{\partial}{\partial q} S_2(u) \right| = \\
 &= (t^2+1)(x^2+1)(q^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p (t-s)(x-\tau)g(s, \tau, z)S_1(u)(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq (t^2+1)(x^2+1)(q^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |t-s||x-\tau|g(s, \tau, z)|S_1(u)(s, \tau, z)| ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq B_1(t^2+1)(q^2+1)(x^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p |t-s||x-\tau|g(s, \tau, z)(1+|\tau|) ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq B_1 t(t^2+1)|x|(x^2+1)(1+|q|)(q^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq B_1(t+1)^2(t^2+1)(|x|+1)^2(x^2+1)(1+|q|)^2(q^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g(s, \tau, z) ds d\tau dz \right| \leq \\
 &\leq AB_1, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\|S_2 u\| \leq AB_1$. □

Лемма 4. Пусть выполняются условия (H1) и (H2). Если элемент $u \in \mathcal{K}$ такой, что

$$S_2(u) = D, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

для некоторой константы D , то u является решением (2).

Доказательство. Дифференцируя дважды по t , x и q , получим

$$g(t, x, q)S_1(u) = 0, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R},$$

откуда

$$S_1(u) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Так как $S_1 u(\cdot, \cdot, \cdot) \in \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$, имеем

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} S_1(u) = S_1(u)(t=0, x, q) = \lim_{x \rightarrow 0} S_1(u) = S_1(u)(t, x=0, q) = \\
 &= \lim_{q \rightarrow 0} S_1(u) = S_1(u)(t, x, q=0).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_1(u) = 0, \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}.$$

Тогда, применяя лемму 1, получаем, что u — решение (2). □

Теорема 3. Пусть выполняются условия (H1) и (H2). Тогда (2) имеет по крайней мере одно решение в $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{Y}}$ — множество всех равностепенно непрерывных семейств в $\mathcal{K}$ с нормой $\|\cdot\|$. Положим $Y = \overline{\tilde{\mathcal{Y}}}$ и

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathcal{Y} : \|u\| < B, \quad \text{и если} \quad \|u\| \geq \frac{B}{2}, \quad \text{то} \quad u(t=0, x, q) > \frac{B}{2}, \quad x, q \in \mathbb{R} \right\}.$$

Для $u \in \overline{\mathcal{U}}$ и $\epsilon > 0$ определим

$$\begin{aligned} T(u) &= \epsilon u, \\ S(u) &= u - \epsilon u - \epsilon S_2(u). \end{aligned}$$

Если $u \in \overline{\mathcal{U}}$, получим

$$\|(I - S)(u)\| = \|\epsilon u + \epsilon S_2(u)\| \leq \epsilon \|u\| + \epsilon \|S_2(u)\| \leq \epsilon B_1 + \epsilon AB_1.$$

Тогда отображение $S : \overline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{K}$ является непрерывным и $(I - S)(\overline{\mathcal{U}})$ лежит в компактном подмножестве множества $\mathcal{Y}$. Предположим, что $\exists u \in \partial \mathcal{U}$ такой, что

$$u = \nu(I - S)(u),$$

или

$$u = \nu \epsilon (u + S_2(u)), \tag{7}$$

для $0 < \nu < \frac{1}{\epsilon}$. Тогда, учитывая, что

$$S_2(u)(t=0, x, q) = 0$$

и $\|u\| = B > \frac{B}{2}$, получим $u(t=0, x, q) \neq 0$, $x, q \in \mathbb{R}$, и

$$u(t=0, x, q) = \nu \epsilon (u(t=0, x, q) + S_2(u)(0, x, q)) = \nu \epsilon u(t=0, x, q), \quad x, q \in \mathbb{R},$$

откуда $\nu \epsilon = 1$ — получили противоречие. Следовательно,

$$\{u \in \overline{\mathcal{U}} : u = \nu_1(I - S)(u), \quad u \in \partial \mathcal{U}\} = \emptyset$$

для любого $\nu_1 \in \left(0, \frac{1}{\epsilon}\right)$. Тогда по теореме 1 получаем, что $T + S$ имеет неподвижную точку $u^* \in \mathcal{Y}$. Тогда

$$u^* = T(u^*) + S(u^*) = \epsilon u^* + u^* - \epsilon u^* - \epsilon S_2(u^*), \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}.$$

И тогда

$$S_2(u^*) = 0.$$

Итак, u^* — решение (2). Ввиду леммы 4 u — решение (2). □

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ ДВУХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть B и A , указанные в (H1) и (H2), удовлетворяют условию

(H3) $AB_1 < \frac{L}{5}$ и $L > 0$ такое, что

$$r < L < R_1 \leq B,$$

где r и R_1 — положительные константы.

Главным результатом этого раздела является

Теорема 4. Пусть выполняются условия (H1)–(H3). Тогда задача (2) имеет по крайней мере два неотрицательных решения в $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть

$$\tilde{P} = \{u \in \mathcal{K} : u \geq 0 \text{ на } t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}\},$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех равностепенно непрерывных семейств в $\tilde{P}$. Пусть $v \in \mathcal{K}$, определим

$$T_1(v) = (1 + m\epsilon)v - \epsilon \frac{L}{10},$$

$$S_3(v) = -\epsilon S_2(v) - m\epsilon v - \epsilon \frac{L}{10},$$

где $\epsilon > 0$, $m > 0$ достаточно велико и S_2 указано в (5). Все неподвижные точки $w \in \mathcal{K}$ отображения $T_1 + S_3$ являются решениями (2). Пусть

$$\Gamma = \mathcal{P},$$

$$W_1 = \mathcal{P}_r = \{w \in \mathcal{P} : \|w\| < r\},$$

$$W_2 = \mathcal{P}_L = \{w \in \mathcal{P} : \|w\| < L\},$$

$$W_3 = \mathcal{P}_{R_1} = \{w \in \mathcal{P} : \|w\| < R_1\}.$$

1) Для $w_1, w_2 \in \Gamma$ имеем

$$\|T_1(w_1) - T_1(w_2)\| = (1 + m\epsilon)\|w_1 - w_2\|,$$

тогда

$$T_1 : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}$$

является расширяющим при $h = 1 + m\epsilon > 1$.

2) Для $w \in \overline{\mathcal{P}}_{R_1}$ имеем

$$\|S_3(w)\| \leq \epsilon\|S_2(w)\| + m\epsilon\|w\| + \epsilon \frac{L}{10} \leq \epsilon \left(AB_1 + mR_1 + \frac{L}{10} \right).$$

Тогда оператор $S_3(\overline{\mathcal{P}}_{R_1})$ является равномерно ограниченным. Поскольку отображение $S_3 : \overline{\mathcal{P}}_{R_1} \rightarrow \mathcal{K}$ непрерывно, получаем, что $S_3(\overline{\mathcal{P}}_{R_1})$ равностепенно непрерывно. Таким образом, $S_3 : \overline{\mathcal{P}}_{R_1} \rightarrow \mathcal{K}$ вполне непрерывно.

3) Пусть $w_1 \in \overline{\mathcal{P}}_{R_1}$. Положим

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{m}S_2(w_1) + \frac{L}{5m},$$

где $S_2(w_1) + \frac{L}{5} \geq 0$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$. Имеем $w_2 \geq 0$ на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$. Тогда для $w_2 \in \Gamma$ и

$$-\epsilon m w_2 = -\epsilon m w_1 - \epsilon S_2(w_1) - \epsilon \frac{L}{10} - \epsilon \frac{L}{10},$$

или

$$(I - T_1)(w_2) = -\epsilon m w_2 + \epsilon \frac{L}{10} = S_3(w_1),$$

имеем $S_3(\overline{\mathcal{P}}_{R_1}) \subset (I - T_1)(\Gamma)$.

4) Пусть $\forall w_0 \in \mathcal{P}^* \exists \nu \geq 0$ и $w \in \partial \mathcal{P}_r \cap (\Gamma + \nu w_0)$ или $w \in \partial \mathcal{P}_{R_1} \cap (\Gamma + \nu w_0)$ такие, что

$$S_3(w) = (I - T_1)(w - \nu w_0).$$

Тогда

$$-\epsilon S_2(w) - m\epsilon w - \epsilon \frac{L}{10} = -m\epsilon(w - \nu w_0) + \epsilon \frac{L}{10},$$

или

$$-S_2(w) = \nu m w_0 + \frac{L}{5}.$$

Следовательно,

$$\|S_2(w)\| = \left\| \nu m w_0 + \frac{L}{5} \right\| \geq \frac{L}{5},$$

что противоречит нашим предположениям.

5) Пусть $\epsilon_1 = \frac{2}{5m}$. Предположим, что $\exists w_1 \in \partial \mathcal{P}_L$ и $\nu_1 \geq 1 + \epsilon_1$ такие, что

$$S_3(w_1) = (I - T_1)(\nu_1 w_1). \quad (8)$$

Тогда

$$-\epsilon S_2(w_1) - m \epsilon w_1 - \epsilon \frac{L}{10} = -\nu_1 m \epsilon w_1 + \epsilon \frac{L}{10},$$

или

$$S_2(w_1) + \frac{L}{5} = (\nu_1 - 1)m w_1.$$

Откуда

$$2\frac{L}{5} > \left\| S_2(w_1) + \frac{L}{5} \right\| = (\nu_1 - 1)m \|w_1\| = (\nu_1 - 1)mL,$$

$$\frac{2}{5m} + 1 > \nu_1,$$

что является противоречием.

Тогда все требования теоремы 2 выполнены. Итак, задача (2) имеет по крайней мере два неотрицательных решения u^1 и u^2 таких, что

$$\|u^1\| = L < \|u^2\| < R_1,$$

или

$$r < \|u^1\| < L < \|u^2\| < R_1.$$

□

4. ПРИМЕР

Приведем пример, иллюстрирующий основные результаты статьи. Пусть $B = 1$, F и m — положительные константы такие, что $\frac{F}{m} \leq 1$. Пусть также

$$u^0(x, q) = \frac{1}{(1 + 3x^4)(1 + q^4)}, \quad x, q \in \mathbb{R},$$

$$\varpi_{ext}(x) = -\frac{F}{m}x, \quad \bar{w}(u)(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$R_1 = \frac{9}{10}, \quad L = \frac{3}{5}, \quad r = \frac{2}{5}, \quad m = 10^{50}, \quad A = \frac{1}{10B_1}.$$

Тогда

$$B_1 = 2 + \pi(1 + \pi^2).$$

Далее,

$$r < L < R_1 < B, \quad AB_1 < \frac{L}{5},$$

т. е. условие (НЗ) выполняется. Возьмем

$$h(s) = \log \frac{s^{22} + s^{11}\sqrt{2} + 1}{s^{22} - s^{11}\sqrt{2} + 1}, \quad l(s) = \arctan \frac{s^{11}\sqrt{2}}{1 - s^{22}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad s \neq \pm 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{22\sqrt{2}s^{10}(1-s^{22})}{(s^{22}-s^{11}\sqrt{2}+1)(s^{22}+s^{11}\sqrt{2}+1)}, \\ l'(s) &= \frac{11\sqrt{2}s^{10}(s^{22}+1)}{s^{44}+1}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad s \neq \pm 1, \\ -\infty &< \lim_{s \rightarrow \pm\infty} (s^2+s+1)h(s) < \infty, \\ -\infty &< \lim_{s \rightarrow \pm\infty} (s^2+s+1)l(s) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда $\exists D_1 > 0$ такое, что

$$(1+|s|)^2(s^2+1) \left(\frac{1}{44\sqrt{2}} \log \frac{s^{22}+s^{11}\sqrt{2}+1}{1-s^{11}\sqrt{2}+s^{22}} + \frac{1}{22\sqrt{2}} \arctan \frac{s^{11}\sqrt{2}}{1-s^{22}} \right) \leq D_1, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Имеем

$$\lim_{s \rightarrow \pm 1} l(s) = \frac{\pi}{2},$$

и ввиду ([19], с. 707, интеграл 79) получаем

$$\int \frac{dz}{1+z^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+z\sqrt{2}+z^2}{1-z\sqrt{2}+z^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{s^{10}}{(s^{44}+1)(s^2+s+1)^2}, \quad s \in \mathbb{R}, \\ g_1(t, x, q) &= Q(t)Q(x)Q(q), \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тогда $\exists D_1 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} (t+1)^2(t^2+1)(|x|+1)^2(x^2+1)(1+|q|)^2(q^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^p g_1(\tau, y, z) d\tau dy dz \right| &\leq D_1, \\ t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Пусть

$$g(t, x, q) = \frac{A}{D_1} g_1(t, x, q), \quad t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (t+1)^2(t^2+1)(|x|+1)^2(x^2+1)(1+|q|)^2(q^2+1) \left| \int_0^t \int_0^x \int_0^q g(\tau, y, z) d\tau dy dz \right| &\leq A, \\ t \geq 0, \quad x, q \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

т. е. условие (H2) выполняется. Следовательно, для задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, \quad t > 0, \quad x, q \in \mathbb{R}, \\ u(t=0, x, q) &= \frac{1}{(1+3x^4)(1+q^4)}, \quad x, q \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{9}$$

все условия теорем 3, 4 выполняются. Если q — скорость, $F = mE$ — сила взаимодействия, E — гравитационное поле, m — взаимодействующая масса, то в оригинальной работе Дж. Джинса [20] уравнение Власова записано как первое уравнение в (9).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов А.В. *О вибрационных свойствах электронного газа*, ЖЭТФ **8** (3), 291–318 (1968).
- [2] Bogolyubov N.N. *Studies in statistical mechanics*, V. 1 (North-Holland, Amsterdam; Interscience, New York, 1962).
- [3] Fijalkow E. *Numerical solution to the Vlasov equation: The 1D code*, Comput. Phys. Commun. **116** (2–3), 329–335 (1999).
- [4] Trocheris M. *On the derivation of the one dimensional Vlasov equation*, Transp. Theory Stat. Phys. **15** (5), 597–628 (1986).
- [5] Власов А.А. *Нелокальная статистическая механика* (Наука, М., 1978).
- [6] Cottet G.H., Raviart P.A. *Particle methods for the one-dimensional Vlasov–Poisson equations*, SIAM J. Numer. Anal. **21** (1), 52–76 (1984).
- [7] Lee F.M., Shadwick B.A. *Cauchy-type integral method for solving the linearized one-dimensional Vlasov–Poisson equation*, Phys. Rev. E. **107**, L063201 (2023).
- [8] Yen R.N.V., Sonnendruker E., Schneider K., Farge M. *Particle-in-wavelets scheme for the 1D Vlasov–Poisson equations*, ESAIM: Proc. **32**, 134–148 (2011).
- [9] Georgiev S., Zennir Kh. *Multiple fixed-point theorems and applications in the theory of ODEs, FDEs and PDEs* (Chapman and Hall/CRC, New York, 2020).
- [10] Georgiev S., Zennir Kh. *Classical solutions for a class of IVP for nonlinear two-dimensional wave equations via new fixed point approach*, Part. Diff. Equat. Appl. Math. **2**, 100014 (2020).
- [11] Georgiev S., Zennir Kh. *Existence of solutions for a class of nonlinear impulsive wave equations*, Ricerche Matem. **71**, 211–225 (2022).
- [12] Ahmad N., Al-Rawashdeh A., Mehmood N. et al. *Fixed points of monotone mappings via generalized-measure of noncompactness*, Vietnam J. Math. **50**, 275–285 (2022).
- [13] Himonas A.A., Yan F. *On well-posedness of nonlocal evolution equations*, Vietnam J. Math. **51**, 811–844 (2023).
- [14] Taiwo A., Mewomo O.T. *Inertial-viscosity-type algorithms for solving generalized equilibrium and fixed point problems in Hilbert spaces*, Vietnam J. Math. **50**, 125–149 (2022).
- [15] Mellet A., Mischler S. *Uniqueness and semigroup for the Vlasov equation with elastic-diffusive reflexion boundary conditions*, Appl. Math. Lett. **17**, 827–832 (2004).
- [16] Agarwal R.P., Meehan M., O'Regan D. *Fixed point theory and applications*, V. 12 (Cambridge Univ. Press, 2001).
- [17] Djebali S., Mebarki K. *Fixed point index theory for perturbation of expansive mappings by k -set contractions*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **54** (2A), 613–640 (2019).
- [18] Mouhous M., Georgiev S., Mebarki K. *Existence of solutions for a class of first order boundary value problems*, Arch. Math. **58**, 141–158 (2022).
- [19] Полянин А.Д., Манжиров А.В. *Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения* (Факториал, М., 1998).
- [20] Jeans J. *On the theory of star-streaming and the structure of the universe*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **76** (71), 799–814 (1915).

Аисса Букару

Университет науки и технологий имени Хуари Бумедьена,
г. Баб-Эззуар, 16000, Алжир,
e-mail: boukarouaissa@gmail.com

Светлин Г. Георгиев

Университет Сорбонна,
г. Париж, 75005, Франция,
e-mail: svetlingeorgiev1@gmail.com

Келтум Бухали

Университет Касима,
г. Бурайда, 51452, Саудовская Аравия,
e-mail: k.bouhali@qu.edu.sa

Халед Зеннир

*Университет Касима,
г. Бурайда, 51452, Саудовская Аравия,*

e-mail: k.zennir@qu.edu.sa

A. Boukarou, S.G. Georgiev, K. Bouhali, and Kh. Zennir

Classical non-negative solutions for one-dimensional Vlasov equation

Abstract. New fixed point approach based on certain topological properties is applied on the Vlasov equation to find classical non-negative solutions. This approach allows finding at least one solution and at least two solutions. It is shown how to apply this approach to the problem of finding classical non-negative solutions of the Vlasov equation.

Keywords: Vlasov equation, existence of solutions, iterative method, classical solution.

Aissa Boukarou

*University of Science and Technology Houari Boumediene,
Bab Ezzouar, 16000 Algeria,*

e-mail: boukarouaissa@gmail.com

Svetlin G. Georgiev

*Sorbonne University,
Paris, 75005 France,*

e-mail: svetlingeorgiev1@gmail.com

Keltoum Bouhali

*Qassim University,
Buraydah, 51452 Saudi Arabia,*

e-mail: k.bouhali@qu.edu.sa

Khaled Zennir

*Qassim University,
Buraydah, 51452 Saudi Arabia,*

e-mail: k.zennir@qu.edu.sa