

Д.Ю. ПОЧЕКУТОВ

ПОРЯДКИ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ ДИАГОНАЛЕЙ РЯДОВ ЛОРАНА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Рассматривается рациональная функция двух комплексных переменных и всевозможные ее разложения в ряды Лорана с центром в начале координат. Известно, что полная диагональ такого ряда Лорана является алгебраической функцией. Описан порядок точки ветвления диагонали в терминах логарифмического отображения Гаусса полярной кривой рациональной функции.

Ключевые слова: амеба алгебраической кривой, диагональ ряда Лорана, логарифмическое отображение Гаусса, порядок точки ветвления, торический морфизм.

УДК: 517.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-9-58-69

ВВЕДЕНИЕ

Метод производящих функций является одним из главных инструментов перечислительной комбинаторики [1], [2]. Многие свойства последовательностей, перечисляющих комбинаторные объекты, определяются аналитическими свойствами их производящих функций. Так, например, в случае, когда производящая функция

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

является алгебраической и имеет непустую область сходимости, главный член асимптотики последовательности ее коэффициентов при $k \rightarrow \infty$ является суммой вкладов от ее ближайших особых точек. При этом вид вклада определяется порядком ветвления и роста функции вблизи особой точки ([3], теорема 1).

К этому случаю приводит следующая конструкция. Рассмотрим голоморфный в начале координат двумерный ряд

$$F(z, w) = \sum_{\alpha, \beta} C_{\alpha, \beta} z^{\alpha} w^{\beta}, \quad (1)$$

сумма которого сходится к некоторой рациональной функции двух комплексных переменных. Для изучения асимптотики двумерной последовательности $\{C_{\alpha, \beta}\}$ его коэффициентов необходимо ограничивать ее на одномерное подпространство

$$\alpha = pk, \quad \beta = qk,$$

Поступила в редакцию 18.06.2024, после доработки 10.09.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00217).

где (p, q) — такой ненулевой целочисленный вектор с неотрицательными координатами, что $\gcd(p, q) = 1$. Тем самым возникает одномерная подпоследовательность $\{C_{pk, qk}\}_{k=0}^{\infty}$, производящая функция

$$d_{p,q}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{pk, qk} t^k$$

которой называется (p, q) -диагональю ряда Тейлора (1). Факт алгебраичности такой диагонали неоднократно отмечался в литературе (см., например, [4], п. 2 для $(p, q) = (1, 1)$; [5], предложение 1 в общем случае). Теорема 2 статьи [5] решает вопрос о нахождении особых точек (p, q) -диагонали ряда Тейлора (1) рациональной функции по особенностям этой функции. Наша цель состоит в описании порядков точек ветвления диагонали, лежащих на границе области сходимости диагонали $d_{p,q}(t)$.

Добиваться нашей цели будем в немного более общей постановке. Вместо голоморфной в нуле рациональной функции будем рассматривать дробь

$$F(z, w) = \frac{1}{Q(z, w)}, \quad (2)$$

где Q — полином Лорана. Через $Z^{\times}(Q)$ обозначим множество нулей Q в комплексном алгебраическом торе $(\mathbb{C}^{\times})^2 := (\mathbb{C} \setminus 0)^2$. Образ $\mathcal{A}_Q$ кривой $Z^{\times}(Q)$ относительно логарифмического отображения

$$\Lambda : (\mathbb{C}^{\times})^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \Lambda : (z, w) \mapsto (\log |z|, \log |w|),$$

называется *амебой многочлена Лорана Q* . Как было показано в ([6], п. 6.1), дополнение амебы $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}_Q$ разбивается на конечное число выпуклых компонент связности E (рис. 1). Компоненте E может быть приписан порядок $\nu \in \mathbb{Z}^2 \cap \Delta_Q$ ([7], п. 2), где Δ_Q — многоугольник Ньютона Q . Каждой области вида $\Lambda^{-1}(E)$ соответствует свое разложение

$$F(z, w) = \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2} C_{\alpha, \beta} z^{\alpha} w^{\beta} \quad (3)$$

рациональной дроби (2) в ряд Лорана. В частности, если рациональная функция (2) голоморфна в начале координат, то одно из разложений — это разложение в ряд Тейлора. Тем самым использование языка амеб позволяет глобализовать задачу, рассмотрев всевозможные ряды для заданной рациональной функции. Наша уточненная цель: описать порядки точек ветвления полных диагоналей всех этих рядов.

Для ряда Лорана (3) *полная (p, q) -диагональ* определяется как производящая функция

$$d_{p,q}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{pk, qk} t^k \quad (4)$$

одномерной подпоследовательности $\{C_{pk, qk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где (p, q) — несократимый вектор из $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbf{0}$ последовательности коэффициентов разложения Лорана.

Теорема 1 статьи [8] гласит, что полная (p, q) -диагональ (4) ряда Лорана (3) рациональной функции двух переменных является алгебраической функцией. Поэтому такая диагональ может иметь точки ветвления только конечного порядка. В ([9], п. 1) показано, что описание точек ветвления диагонали может быть получено в терминах так называемого *логарифмического отображения Гаусса γ_Q* (см. п. 2 данной статьи) полярной для F кривой $Z^{\times}(Q)$. Точнее говоря, если для полной (p, q) -диагонали ряда Лорана (3), сходящегося в $\Lambda^{-1}(E)$, на полярной кривой $Z^{\times}(Q)$ найдется такая точка (z_0, w_0) , что

$$\Lambda(z_0, w_0) \in \partial E \text{ и } \gamma_Q(z_0, w_0) = [p : q], \quad (5)$$

то $t_0 = z_0^p w_0^q$ будет точкой ветвления диагонали. В случае, если обладающая указанными свойствами точка (z_0, w_0) является регулярной для γ_Q , то соответствующая точка t_0 имеет порядок ветвления 2 ([9], теорема 1). Следующее утверждение показывает, как в двумерном случае меняется порядок ветвления в случае критической точки логарифмического отображения Гаусса.

Теорема 1. Пусть $d_{p,q}(t)$ — полная диагональ ряда Лорана (3), сходящегося в области $\Lambda^{-1}(E)$. Пусть (z_0, w_0) — гладкая точка кривой $Z^\times(\tilde{Q})$, удовлетворяющая условию (5). Если точка (z_0, w_0) является критической точкой отображения Гаусса γ_Q конечной кратности μ ($\mu = 0$ соответствует регулярной точке), то точка $t_0 = z_0^p w_0^q$ является точкой ветвления диагонали $d_{p,q}(t)$ порядка $\mu + 2$.

Доказательство теоремы приводится в п. 3 настоящей статьи. В пп. 1, 2 излагаются предварительные сведения о логарифмическом отображении Гаусса и торических морфизмах, носящие вспомогательный характер. В п. 4 разобран иллюстрирующий теорему 1 пример.

1. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ГАУССА

Напомним, что комплексно-алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^2$ является комплексной группой Ли относительно операции покомпонентного умножения с нейтральным элементом $e := (1, 1)$. Умножение в группе на обратный элемент индуцирует канонический изоморфизм касательных плоскостей

$$T_p(\mathbb{C}^\times)^2 \simeq T_e(\mathbb{C}^\times)^2, \quad p := (z, w) \in (\mathbb{C}^\times)^2,$$

координатная запись которого имеет вид

$$\epsilon : (\xi_1, \xi_2) \mapsto (z^{-1}\xi_1, w^{-1}\xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in T_p(\mathbb{C}^\times)^2.$$

Вложение комплексной алгебраической кривой $Z^\times(Q)$ в тор $(\mathbb{C}^\times)^2$ индуцирует включение

$$\iota : T_p Z^\times(Q) \rightarrow T_p(\mathbb{C}^\times)^2,$$

где $p \in \text{reg } Z^\times(Q)$ — гладкая точка кривой. Таким образом, можем рассмотреть композицию $\epsilon \circ \iota : T_p Z^\times(Q) \rightarrow T_e(\mathbb{C}^\times)^2$, с помощью которой определяется логарифмическое отображение Гаусса

$$\gamma_Q : \text{reg } Z^\times(Q) \rightarrow \mathbb{CP}^1,$$

сопоставляющее гладкой точке p класс образа $(\epsilon \circ \iota)(T_p Z^\times(Q))$ в проективизации линейного пространства $T_e(\mathbb{C}^\times)^2$. Заметим, что для вектора (ξ_1, ξ_2) из $T_p Z^\times(Q)$ справедливо равенство

$$zQ_z(z, w)\frac{\xi_1}{z} + wQ_w(z, w)\frac{\xi_2}{w} = 0.$$

Поэтому в координатах логарифмическое отображение Гаусса имеет вид

$$\gamma_Q(z, w) = [zQ_z(z, w) : wQ_w(z, w)].$$

Рассмотрим окрестность $U \subset (\mathbb{C}^\times)^2$ регулярной точки p кривой $Z^\times(Q)$ и зафиксируем в ней ветвь

$$\log(z, w) := \Lambda(z, w) + \iota A(z, w),$$

где $A(z, w) = (\arg z, \arg w) \in (-\pi; \pi]^2$ — отображения многозначного логарифма. Нетрудно проверить, что направляющий вектор нормальной прямой к образу $\log(Z^\times(Q) \cap U)$ в точке $\log(z, w)$ имеет координаты $(zQ_z(z, w), wQ_w(z, w))$.

Если $\Pi(z, w) := (\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w)$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{reg} Z^\times(Q) \cap U & \xrightarrow{\log} & \log(Z^\times(Q) \cap U) \\ & \searrow \Lambda \quad \swarrow \Pi & \\ & \mathcal{A}_Q & \end{array}$$

коммутативна. Поскольку $\log$ биголоморфно в U , ограничение отображения Λ на $\operatorname{reg} Z^\times(Q)$ может иметь особенность в точке (z, w) в том и только том случае, если дифференциал отображения Π в точке $\log(z, w)$ имеет ненулевое ядро. Такая ситуация возникает, если только касательное пространство к $\log(Z^\times(Q) \cap U)$ в точке $\log(z, w)$ является чисто мнимым, т. е. $\gamma_Q(z, w) \in \mathbb{RP}^1$. Множество критических значений $\mathcal{C}_Q$ ограничения Λ на $\operatorname{reg} Z^\times(Q)$ называется *контуром амёбы* $\mathcal{A}_Q$ ([10]). Оно является подмножеством амёбы, которое, очевидно, содержит ее границу $\partial \mathcal{A}_Q$. Как мы только что увидели,

$$\mathcal{C}_Q = \Lambda(\gamma_Q^{-1}(\mathbb{RP}^1)).$$

Более того, если $\gamma_Q(z, w) = [p : q] \in \mathbb{RP}^1$, то нормальный вектор к $\mathcal{C}_Q$ в точке $\Lambda(z, w)$ имеет координаты (p, q) при условии, что он определен.

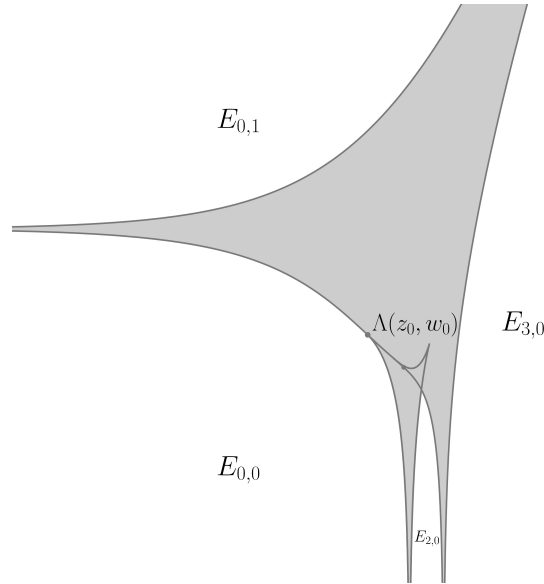


Рис. 1. Амёба (закрашенная область) многочлена $Q = -\frac{18}{5} + \frac{24}{5}z - \frac{14}{5}z^2 + \frac{3}{5}z^3 + w$ и ее контур (граница амёбы и линия внутри)

Для описания контура необходимо рассматривать систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} Q(z, w) &= 0, \\ qzQ_z(z, w) - pwQ_w(z, w) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

задающую слой $\gamma_Q^{-1}([p : q])$ логарифмического отображения Гаусса, где $(p, q) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$. Отметим, что такая система возникла в [5] при нахождении особых точек (p, q) -диагонали ряда Тейлора (1) вне контекста теории амёб и без связи с логарифмическим отображением

Гаусса. Точнее говоря, в ([5], п. 2) было показано, что точки ветвления диагонали $d_{p,q}(t)$ ряда Тейлора рациональной функции двух переменных со знаменателем Q определяются с помощью ненулевых решений такой системы. Известно, что число корней системы (6) в торе $(\mathbb{C}^\times)^2$ не превосходит целочисленной площади многоугольника Ньютона Δ_Q ([11], лемма 2).

2. ТОРИЧЕСКИЕ МОРФИЗМЫ

Рассмотрим взаимнообратные унимодулярные матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix}.$$

Они определяют взаимно обратные *торические морфизмы*

$$(u, v) \mapsto (z, w) = (u, v)^{\mathbf{A}}, \quad (z, w) \mapsto (u, v) = (z, w)^{\mathbf{B}},$$

где по определению $(u, v)^{\mathbf{A}} := (u^{a_1^1} v^{a_2^1}, u^{a_1^2} v^{a_2^2})$.

Если $Q(z, w)$ — многочлен Лорана от переменных z, w , то

$$\tilde{Q}(u, v) := Q((u, v)^{\mathbf{A}})$$

тоже является многочленом Лорана (от переменных u, v). Многоугольники Ньютона Δ_Q и $\Delta_{\tilde{Q}}$ многочленов Лорана Q и $\tilde{Q}$ соответственно комбинаторно эквивалентны. Амеба $\mathcal{A}_Q$ под действием линейного преобразования, заданного матрицей $\mathbf{B}$, переходит в амебу $\mathcal{A}_{\tilde{Q}}$ ([12], предложение 1). При этом компонента E дополнения $\mathcal{A}_Q$ порядка $\boldsymbol{\nu} := (\nu^1, \nu^2)$ переводится этим отображением в компоненту $\tilde{E}$ амебы $\mathcal{A}_{\tilde{Q}}$ порядка $\boldsymbol{\mu} := (\mu^1, \mu^2)$, где

$$\mu^i = a_1^i \nu^1 + a_2^i \nu^2, \quad i = 1, 2$$

(см рис. 1, 2, где $\tilde{Q}$ получен из Q с помощью морфизма $z = v, w = uv^{-1}$).

Здесь уместно напомнить ([7], п. 2), что если точка $\mathbf{x}$ из компоненты E порядка $\boldsymbol{\nu}$, то первая координата ν^1 вектора $\boldsymbol{\nu}$ равна разности между количеством нулей и количеством полюсов многочлена Лорана $Q(z, w_0)$ по переменной z в круге $|z| < |z_0|$, в то время как ν^2 — разность между числом нулей и полюсов многочлена Лорана $Q(z_0, w)$ по переменной w в круге $|w| < |w_0|$, где $(z_0, w_0) \in \Lambda^{-1}(\mathbf{x})$. Причем порядок компоненты E не зависит от выбора точки $\mathbf{x}$ внутри компоненты.

Укажем, что происходит с логарифмическим отображением Гаусса при торических морфизмах. Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться в равенстве

$$\begin{pmatrix} u \tilde{Q}_u \\ v \tilde{Q}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z Q_z \\ w Q_w \end{pmatrix},$$

которое можно трактовать как

$$\gamma_{\tilde{Q}}(u, v) = \mathbf{A} \gamma_Q(z, w),$$

если смотреть на $\gamma_{\tilde{Q}}(u, v)$ и $\gamma_Q(z, w)$ как на элементы $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$.

В [12] было показано, что торические морфизмы предоставляют полезный инструмент для работы с диагоналями рядов Лорана. В случае полной (p, q) -диагонали удобно рассмотреть морфизм, заданный матрицей $\mathbf{B}$, столбцы которой состоят из таких целочисленных векторов (p, q) и (r, s) , что

$$ps - qr = 1.$$

Целые r, s с указанным соотношением существуют в силу взаимной простоты p и q . Обратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s & -r \\ -q & p \end{pmatrix}$$

задает замену

$$z = u^s v^{-q}, \quad w = u^{-r} v^p. \quad (7)$$

Тогда в силу указанных выше соотношений, если $\gamma_Q(z_0, w_0) = [p : q]$ и $(u_0, v_0) = (z_0^p w_0^q, z_0^r w_0^s)$, то $\gamma_{\tilde{Q}}(u_0, v_0) = [1 : 0]$.

Слой $\gamma_{\tilde{Q}}^{-1}([1 : 0])$ логарифмического отображения Гаусса над точкой $[1 : 0]$ состоит из точек (u, v) , удовлетворяющих системе алгебраических уравнений

$$\tilde{Q}(u, v) = 0, \quad \tilde{Q}_v(u, v) = 0.$$

Производная $\tilde{Q}_u(u_0, v_0) \neq 0$ в силу гладкости кривой $Z^\times(\tilde{Q})$ в точке (u_0, v_0) . Поэтому в некоторой окрестности U точки (u_0, v_0) кривая $Z^\times(\tilde{Q})$ задается в виде графика

$$\Gamma_f := \{(u, v) \in (\mathbb{C}^\times)^2 : u = f(v)\} \quad (8)$$

некоторой аналитической в U функции такой, что $f(v_0) \neq 0$. Поэтому в локальных координатах логарифмическое отображение Гаусса можно записать в виде

$$\lambda(v) = -v \frac{f'(v)}{f(v)},$$

где λ — аффинная координата на $\mathbb{CP}^1$.

Из теоремы о неявной функции известно, что в U производная

$$f'(v) = -\frac{\tilde{Q}_v(f(v), v)}{\tilde{Q}_u(f(v), v)}. \quad (9)$$

Поэтому $\gamma_{\tilde{Q}}(u_0, v_0) = [1 : 0]$, если и только если v_0 — кратный корень уравнения $\tilde{Q}(u_0, v)$. Более того, справедлива

Лемма. Пусть $\gamma_{\tilde{Q}}(u_0, v_0) = [1 : 0]$. Тогда

$$\lambda^{(1)}(v_0) = \dots = \lambda^{(\mu)}(v_0) = 0 \text{ и } \lambda^{(\mu+1)}(v_0) \neq 0 \quad (10)$$

в том и только том случае, если

$$\frac{\partial^j \tilde{Q}}{\partial v^j}(u_0, v_0) = 0, \quad j = 1, \dots, \mu + 1, \text{ и } \frac{\partial^{\mu+2} \tilde{Q}}{\partial v^{\mu+2}}(u_0, v_0) \neq 0, \quad (11)$$

где $\mu \geq 0$ целое.

Доказательство. В силу условия $\gamma_{\tilde{Q}}(u_0, v_0) = [1 : 0]$ значение $\lambda(v_0) = 0$, производная $f'(v_0) = 0$. Значит, при этом условии из равенства

$$\lambda^{(1)}(v) = -\frac{f'(v)}{f(v)} + v \left(\frac{f'(v)}{f(v)} \right)^2 - v \frac{f''(v)}{f(v)} = \frac{\lambda(v)}{v} + \frac{\lambda^2(v)}{v} - v \frac{f''(v)}{f(v)}$$

вытекает, что $\lambda^{(1)}(v_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $f''(v_0) = 0$.

Для всякого целого $k \geq 1$ с помощью формулы Лейбница находим

$$\lambda^{(k+1)}(v) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{(j)}(v) \left(\frac{1 + \lambda(v)}{v} \right)^{(k-j)} - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} v^{(j)} \left(\frac{f''(v)}{f(v)} \right)^{(k-j)}.$$

Если $\lambda^{(j)}(v_0) = 0$ для $j = 0, \dots, k$, то

$$\lambda^{(k+1)}(v_0) = -v_0 \left(\frac{f''}{f} \right)^{(k)}(v_0) - k \left(\frac{f''}{f} \right)^{(k-1)}(v_0) = -v_0 \frac{f^{(k+2)}(v_0)}{f(v_0)}.$$

Тогда условие (10) эквивалентно выражению

$$f^{(1)}(v_0) = \dots = f^{(\mu+1)}(v_0) = 0 \text{ и } f^{(\mu+2)}(v_0) \neq 0. \quad (12)$$

Из (9) следует, что $f'(v_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{Q}_v(u_0, v_0) = 0$, где $u_0 = f(v_0)$. Тогда из справедливого для всех целых $k \geq 2$ равенства

$$f^{(k)}(v) = - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\tilde{Q}_v(f(v), v))^{(j)} \left(\frac{1}{\tilde{Q}_u(f(v), v)} \right)^{(k-j)}$$

вытекает, что (12) эквивалентно условию (11). $\square$

Эта лемма показывает, что точка (u_0, v_0) является критической точкой кратности μ для логарифмического отображения Гаусса тогда и только тогда, когда многочлен $Q(u, v)$ имеет корень v_0 кратности $\mu + 2$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть компонента дополнения E , в прообразе которой сходится ряд Лорана (3), имеет порядок $\nu = (\nu^1, \nu^2)$. Обозначим через $T \subset \mathbb{C}^\times$ множество всех таких параметров t , что амеба многочлена Лорана $z^p w^q - t$, т. е. прямая в $\mathbb{R}^2$ с уравнением $p \log |z| + q \log |w| = \log |t|$, разбивает компоненту E на две открытые в $\mathbb{R}^2$ части E_+ и E_- , которые расположены выше и ниже прямой соответственно. В силу выпуклости и открытости E множество T является кольцом $\{r_- < |t| < r_+\}$ с радиусами $r_- \in [0; +\infty)$ и $r_+ \in (0; +\infty]$. Из условия (5) вытекает, что точка $t_0 = z_0^p w_0^q$ лежит на границе кольца T .

Согласно ([8], предложение 1) полную (p, q) -диагональ для такого ряда можем представить в виде

$$d_{p,q}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{1}{Q(z, w)} \frac{z^p w^q}{z^p w^q - t} \frac{dz dw}{zw}, \quad t \in T, \quad (13)$$

где в двумерном цикле $\Gamma := \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_+) - \Lambda^{-1}(\mathbf{x}_-)$, лежащем в дополнении

$$(\mathbb{C}^\times)^2 \setminus Z^\times(Q(z^p w^q - t)),$$

задающие его точки $\mathbf{x}_\pm := (x_\pm^1, x_\pm^2)$ выбираются из $E_\pm$. Классы $[\Lambda^{-1}(\mathbf{x}_\pm)]$ в группе целочисленных гомологий $H_2((\mathbb{C}^\times)^2 \setminus Z^\times(Q(z^p w^q - t)))$ не зависят от выбора точек $\mathbf{x}_\pm$ внутри частей разбиения в силу их выпуклости.

С помощью торического морфизма (7), как было показано в ([12], пп. 3, 4), можем переписать интеграл (13) в виде

$$d_{p,q}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{1}{\tilde{Q}(u, v)} \frac{du dv}{(u - t)v}, \quad (14)$$

где $\tilde{\Gamma} := \Lambda^{-1}(\mathbf{y}_+) - \Lambda^{-1}(\mathbf{y}_-)$, а $\mathbf{y}_\pm := (y_\pm^1, y_\pm^2)$ — такие точки из компоненты $\tilde{E}$ дополнения амебы многочлена Лорана $\tilde{Q}$ порядка $\mu = (\mu^1, \mu^2)$, что

$$y_-^1 < \log |t| < y_+^1,$$

т. е. из разных частей разбиения $\tilde{E}_\pm$ компоненты $\tilde{E}$ амебой многочлена $u - t$, где $t \in T$.

Напомним, что по условию теоремы точка (z_0, w_0) имеет образ $\Lambda(z_0, w_0) \in \partial E$. Под действием обратного к (7) диффеоморфизма она переходит в такую точку $(u_0, v_0) \in Z^\times(\tilde{Q})$, что $\Lambda(u_0, v_0) \in \partial \tilde{E}$. При этом кратность логарифмического отображения Гаусса $\gamma_{\tilde{Q}}$ в точке (u_0, v_0) равна кратности γ_Q в точке (z_0, w_0) , т. е. μ . Поскольку пересечение $Z^\times(\tilde{Q})$ и $Z^\times(u-t)$ состоит из точек $(t, v(t))$, где $v(t)$ — решение алгебраического уравнения $\tilde{Q}(t, v) = 0$, то по лемме из условия на кратность критической точки (u_0, v_0) логарифмического отображения Гаусса следует, что при $t_0 = u_0$ многочлен $\tilde{Q}(u_0, v)$ имеет в точке $v_0 = v(u_0)$ корень кратности $\mu + 2$. Таким образом, пересечение $Z^\times(\tilde{Q})$ и $Z^\times(u - t_0)$ содержит точку (u_0, v_0) , которая для $t \neq t_0$ из некоторой малой окрестности V точки t_0 распадется на $\mu + 2$ простых точек $\mathbf{o}_1(t), \dots, \mathbf{o}_{\mu+2}(t)$. Обозначим через $\sigma_k(t)$ цикл на проколотой кривой C_t , полученной из $Z^\times(\tilde{Q})$ удалением всех точек пересечения $Z^\times(\tilde{Q}) \cap Z^\times(u - t)$, окружающий только выколотую точку $\mathbf{o}_k(t)$, $k = 1, \dots, \mu + 2$.

Все точки $\mathbf{o}_k(t)$ содержатся в некотором шаре $B(u_0, v_0)$ с центром в точке (u_0, v_0) малого радиуса. Для удобства будем считать, что этот шар совпадает с окрестностью U из (8), т. е.

$$Z^\times(\tilde{Q}) \cap B(u_0, v_0) = \Gamma_f.$$

Будем рассматривать интегральное представление (14) для параметров t из $V \cap T$. Тогда точки $\mathbf{y}_\pm$, определяющие цикл интегрирования $\tilde{\Gamma}$, лежат в пересечении частей $\tilde{E}_\pm$ с образом $\Lambda(B(u_0, v_0) \cap (\mathbb{C}^\times)^2)$.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ круг

$$h_\theta(\mathbf{y}) := \{u = \exp(y^1 + i\theta)\} \times \{|v| < \exp(y^2)\},$$

где $\theta \in (-\pi; \pi]$. Поскольку точка $\mathbf{y} := (y^1, y^2)$ лежит в компоненте $\tilde{E}$ порядка $\mu = (\mu^1, \mu^2)$, то для любого фиксированного $\theta \in (-\pi; \pi]$ в круге $h_\theta(\mathbf{y})$ разница между количеством нулей и полюсов (с учетом кратностей) многочлена Лорана $\tilde{Q}(u, v)$ от переменной v равна μ^2 . Все корни этого многочлена, попавшие в круг $h_\theta(\mathbf{y})$, обозначим через $v_k(\theta; \mathbf{y})$, $k = 1, \dots, s$.

Зафиксируем некоторое $t \in V \cap T$, если $\theta_t := \arg t$, а точка $\mathbf{y}_t \in \tilde{E}$ лежит на амебе многочлена $u - t$, то все точки пересечения $Z^\times(\tilde{Q})$ и $Z^\times(u - t)$, попадающие во внутрь круга $h_{\theta_t}(\mathbf{y}_t)$, имеют вид

$$\mathbf{p}_k(t) := (t, v_k(\theta_t; \mathbf{y}_t)), \quad k = 1, \dots, s.$$

Циклы $\Lambda^{-1}(\mathbf{y}_\pm)$ гомологичны в группе $H_2((\mathbb{C}^\times)^2 \setminus Z^\times(\tilde{Q}(u - t)))$ сумме $\tilde{\Gamma}_\pm$ всех циклов вида

$$\bigcup_{\theta \in (-\pi; \pi]} \{u = \exp(y_\pm^1 + i\theta)\} \times \{|v - v_k(\theta; \mathbf{y}_\pm)| = \varepsilon_k\},$$

где $\varepsilon_k > 0$ такие, что в круге $|v - v_k(\theta; \mathbf{y}_\pm)| < \varepsilon_k$ нет других корней кроме $v_k(\theta; \mathbf{y}_\pm)$, и цикла

$$\tilde{\Gamma}_0 = \bigcup_{\theta \in (-\pi; \pi]} \{u = \exp(y_\pm^1 + i\theta)\} \times \{|v| = \varepsilon_0\},$$

где $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в круге $|v| < \varepsilon_0$ нет корней $v_k(\theta; \mathbf{y}_\pm)$, $k = 1, \dots, s$.

Как видно из конструкции, циклы $\tilde{\Gamma}_\pm$ являются кограницами (трубками) Лере (см. [13], п. 2.3 или [14], п. 16) $\delta\sigma_\pm$ одномерных циклов

$$\sigma_\pm = \{|u| = e^{y_\pm^1}\} \times \{|v| < e^{y_\pm^2}\} \cap Z^\times(\tilde{Q})$$

на кривой C_t . Таким образом, в группе $H_2((\mathbb{C}^\times)^2 \setminus Z^\times(\tilde{Q}(u - t)))$ выполняется равенство

$$[\tilde{\Gamma}] = \delta[\sigma_+ - \sigma_-] + [\tilde{\Gamma}_0].$$

Цикл $\sigma_+ - \sigma_-$ на кривой C_t гомологичен сумме одномерных циклов $\tau_k(t)$ на C_t , каждый из которых окружает единственную выколотую точку $\mathbf{p}_k(t)$, $k = 1, \dots, s$.

Обозначим через $\tilde{\omega}(t)$ нормированную на $(2\pi i)^2$ подинтегральную форму в (14). Тогда полная (p, q) -диагональ разбивается в сумму двух интегралов:

$$d_{p,q}(t) = \int_{\delta(\sigma_+ - \sigma_-)} \tilde{\omega}(t) + \int_{\tilde{\Gamma}_0} \tilde{\omega}(t). \quad (15)$$

Заметим, что последний интеграл является рациональной функцией от t , это можно показать повторным применением интегральной формулы Коши. Поэтому он не имеет точек ветвления.

Пересечение наборов $\{\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_{\mu+2}(t)\}$ и $\{\mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_s(t)\}$ очевидно не пусто, можно считать, что оно состоит из точек

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{o}_1(t), \dots, \mathbf{p}_l(t) = \mathbf{o}_l(t), \quad 1 \leq l \leq s.$$

Тогда первый интеграл в (15) можно переписать в виде

$$\int_{\delta(\sigma_+ - \sigma_-)} \tilde{\omega}(t) = \sum_{k=1}^l \int_{\delta\sigma_k(t)} \tilde{\omega}(t) + \sum_{k=l+1}^s \int_{\delta\tau_k(t)} \tilde{\omega}(t). \quad (16)$$

Интеграл (16) является аналитической функцией параметра t . Рассмотрим малую петлю $\varkappa$ на $\mathbb{C}^\times$ вокруг исключительного значения параметра t_0 . Обход этой петли определяет оператор монодромии, действующий из $H_1(C_t)$ в $H_1(C_t)$. Для описания аналитического продолжения интеграла (16) вдоль $\varkappa$ достаточно проследить за действием указанного оператора на одномерные циклы $\sigma_k(t)$, $k = 1, \dots, l$, и $\tau_k(t)$, $k = l+1, \dots, s$, лежащие на проколотой кривой C_t .

Поскольку при обходе параметра t вдоль $\varkappa$ циклы $\tau_{l+1}(t), \dots, \tau_s(t)$ разбиваются на группы, представители которых циклически переставляются внутри (сама группа при этом может состоять из единственного цикла), сумма $\tau_{l+1}(t) + \dots + \tau_s(t)$ не изменяется при таком обходе. Следовательно, второе слагаемое в правой части (16) не имеет ветвления в точке t_0 .

Для $k = 1, \dots, \mu+2$ обход t вдоль $\varkappa$ индуцирует перестановку

$$\sigma_k(t) \mapsto \sigma_{m_k}(t),$$

где $m_k \equiv k+1 \pmod{\mu+2}$. Согласно формуле вычета Лере ([14], теорема 16.4) интеграл можем переписать в виде

$$\int_{\delta\sigma_k(t)} \tilde{\omega}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_k(t)} \frac{1}{f(v) - t} \frac{dv}{v},$$

где в локальной координате v , действующей в $C_t \cap B(u_0, v_0)$, цикл $\sigma_k(t)$ записывается в виде $\{|v - v_k(\theta_t; \mathbf{y}_t)| = \varepsilon_k\}$. Тогда $\mu+2$ является наименьшим среди положительных целых m , оставляющих первую сумму в (16) неизменной при аналитическом продолжении при m -кратных обходах вдоль $\varkappa$.

Таким образом, точка t_0 является точкой ветвления порядка $\mu+2$ для диагонали $d_{p,q}(t)$.

4. ПРИМЕР

Рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{1}{Q(z, w)} = \frac{1}{-\frac{18}{5} + \frac{24}{5}z - \frac{14}{5}z^2 + \frac{3}{5}z^3 + w}.$$

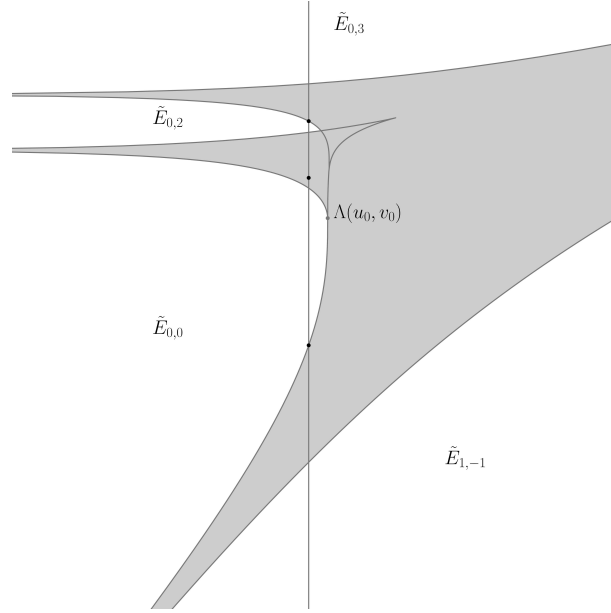


Рис. 2. Амеба (закрашенная область) многочлена Лорана $\tilde{Q} = \frac{18}{5} + \frac{24}{5}v - \frac{14}{5}v^2 + \frac{3}{5}v^3 + \frac{u}{v}$ и ее контур (граница амебы и линия внутри); амеба многочлена $u = t$ (вертикальная прямая)

Как было указано во введении, разложение этой дроби в ряд Тейлора сходится в области $\Lambda^{-1}(E_{0,0})$, где $E_{0,0}$ — компонента дополнения амебы знаменателя Q . Зафиксируем вектор $(1, 1) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathbf{0}$, определяющий диагональное направление. Слой $\gamma_Q^{-1}([1 : 1])$ логарифмического отображения Гаусса состоит из точек $(z_0, w_0) = (1, 1)$ и $(z_1, w_1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{40}\right)$, при этом точка (z_0, w_0) является критической точкой кратности 1 для логарифмического отображения Гаусса, в то время как точка (z_1, w_1) является регулярной точкой. Заметим, что образ $\Lambda(z_0, w_0) = (0, 0) \in \partial E_{0,0}$, образ же $\Lambda(z_1, w_1)$ лежит на внутренней части контура амебы полинома Q (рис. 1). Поэтому согласно теореме 1 точка $t_0 = 1$ является точкой ветвления порядка три для диагонали $d_{1,1}(t)$ разложения Тейлора для дроби $1/Q(z, w)$.

Мы можем проверить это и непосредственным образом. Рассмотрим интеграл (13) и сделаем в нем замену $z = v$, $w = \frac{u}{v}$:

$$d_{1,1}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{1}{-\frac{18}{5} + \frac{24}{5}v - \frac{14}{5}v^2 + \frac{3}{5}v^3 + \frac{u}{v}} \frac{dudv}{(u-t)v},$$

в качестве цикла интегрирования $\tilde{\Gamma}$ можно взять $\{|u| = \rho\} \times \{|v| = 1\}$ с $|t| < \rho < 1$. Воспользовавшись интегральной формулой Коши при интегрировании по переменной u , получим

$$d_{1,1}(t) = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{|v|=1} \frac{dv}{t - \frac{18}{5}v + \frac{24}{5}v^2 - \frac{14}{5}v^3 + \frac{3}{5}v^4}.$$

При $|t| < 1$ нули знаменателя имеют следующую структуру:

$$|v_1(t)| < 1 < |v_2(t)| = |v_3(t)| < |v_4(t)|.$$

Образы точек $(t, v_j(t))$ при отображении Λ изображены на рис. 2 черными точками, лежащими на вертикальной прямой. Поэтому диагональ может быть вычислена как

$$d_{1,1}(t) = \operatorname{Res}_{v=v_1(t)} \frac{1}{t - \frac{18}{5}v + \frac{24}{5}v^2 - \frac{14}{5}v^3 + \frac{3}{5}v^4}.$$

Полный вид полученного выражения довольно громоздок, но с помощью системы компьютерной алгебры MAPLE можем выписать несколько начальных членов разложения диагонали в окрестности $t_0 = 1$ в ряд Пуизо:

$$d_{1,1}(t) = -\frac{\sqrt[3]{20}}{6} \frac{1}{(t-1)^{\frac{2}{3}}} - \frac{\sqrt[3]{20^2}}{12} \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{3}}} - \frac{15}{8} - \frac{175}{72} \sqrt[3]{20}(t-1)^{\frac{1}{3}} + O\left((t-1)^{\frac{2}{3}}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lando S.K. *Lectures on generating functions (Student mathematical library)*, V. 23 (AMS, Providence, Rhode Island, 2003).
- [2] Stanley R. *Enumerative combinatorics*, V. 2 (Cambridge Univ. Press, 1999).
- [3] Orlov A.G. *On asymptotic behavior of the Taylor coefficients of algebraic functions*, Sib. Math. J. **35** (5), 1002–1013 (1994).
- [4] Furstenberg H. *Algebraic functions over finite fields*, J. Algebra **7** (2), 271–277 (1967).
- [5] Сафонов К.В., Цих А.К. *Об особенностях параметрического вычета Гротендика и диагонали двойного степенного ряда*, Изв. вузов. Матем. (4), 51–58 (1984).
- [6] Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants* (Birkhäuser, 1994).
- [7] Forsberg M., Passare M., Tsikh A. *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas*, Adv. Math. **151** (1), 45–70 (2000).
- [8] Почекутов Д.Ю. *Диагонали рядов Лорана рациональных функций*, Сиб. матем. журн. **50** (6), 1370–1383 (2009).
- [9] Pochekutov D.Yu. *Analytic continuation of diagonals of Laurent series for rational functions*, J. Sib. Fed. Math. Phys. **14** (3), 360–368 (2021).
- [10] Passare M., Tsikh A. *Amoebas: their spines and their contours*, Cont. Math. **377**, 204–258 (2005).
- [11] Mikhalkin G. *Real algebraic curves, the moment map and amoebas*, Ann. Math. **151** (1), 309–326 (2000).
- [12] Pochekutov D.Yu., Senashov A.V. *Toric morphisms and diagonals of the Laurent series of rational functions*, Sib. Electron. Math. Izv. **19** (2), 651–661 (2022).
- [13] Vassiliev V.A. *Applied Picard–Lefschetz Theory* (AMS, Providence, Rhode Island, 2002).
- [14] Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis (Translations of Mathematical Monographs)*, V. 58 (AMS, Providence, Rhode Island, 1983).

Дмитрий Юрьевич Почекутов

Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, д. 79, г. Красноярск, 660041, Россия,

e-mail: dpotchekutov@sfu-kras.ru

D.Yu. Pochekutov

Orders of branch points of complete diagonals for Laurent series of rational functions of two variables

Abstract. A rational function of two complex variables and all its Laurent expansions centered at an origin are considered. It is known that the complete diagonal of such an expansion is an algebraic function. The order of a branch point of the diagonal by means of the logarithmic Gauss mapping of a polar curve of the rational function is described.

Keywords: amoeba of an algebraic curve, diagonal of Laurent series, logarithmic Gauss mapping, order of a branch point, toric morphism.

Dmitry Yurevich Pochekutov

Siberian Federal University,

79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk, 660041 Russia,

e-mail: dpotchekutov@sfu-kras.ru