

В.А. КЛЯЧИН

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Аннотация. В статье вводится характеристика треугольника, отражающая меру его невырожденности. Важность исследования этой величины связана с построением качественных расчетных сеток. Показано, что если отображение класса Соболева кратно искажает эту характеристику, то это отображение является отображением с ограниченным искажением. Кроме этого доказано, что при выполнении вышеприведенного условия и дополнительно условия ограниченного искажения площади треугольника отображение является билипшицевым. В статье установлены оценки всех констант, характеризующих исследуемые отображения.

Ключевые слова: искажение треугольников, квазирегулярное отображение, билипшицево отображение.

УДК: 517.518: 517.17

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-9-50-57

ВВЕДЕНИЕ

Одним из способов конструирования расчетной сетки является метод, основанный на отображениях [1], [2] некоторой модельной сетки на заданную расчетную область. Такой подход требует от отображений выполнения определенных условий. В частности, для триангуляций должно выполняться следующее свойство: образ вершин каждого симплекса триангуляции имеет ту же ориентацию, что и вершины симплекса-прообраза. Важность этого условия установлена в ряде работ [3], [4]. Помимо условия сохранения ориентации, также требуется, чтобы отображение контролируемо изменяло параметры геометрии симплексов триангуляции, что позволит с предопределенной точностью аппроксимировать отображения и его производные (см., например [5], [6]). В настоящей статье вводится подобная геометрическая характеристика треугольника и исследуются свойства отображений, ограниченно искажающих эту характеристику. В частности, показано, что отображения класса $W_{\text{loc}}^{1,n}$, ограниченно искажающие введенную характеристику, являются отображениями с ограниченным искажением в классическом смысле [7]. При дополнительных условиях на искажение площадей треугольников доказана билипшицевость таких отображений.

Поступила в редакцию 02.06.2024, после доработки 30.09.2024. Принята к публикации 18.12.2024.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.

Пусть в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задан произвольный треугольник T с вершинами в точках p_0, p_1, p_2 . Пусть $a \geq c \geq b > 0$ обозначают его длины сторон. Положим

$$\mu(T) = \frac{b+c}{a}. \quad (1)$$

Ясно, что $\mu(T) \geq 1$, причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда треугольник T вырожден, т.е. все его вершины лежат на одной прямой. А поскольку $b \leq c \leq a$, то всегда $\mu(T) \leq 2$ с равенством только для равносторонних треугольников. Отметим, что введенная величина (1) в работе [8] использовалась как основа для конструкции метрики на множестве треугольников с пронумерованными вершинами.

Рассмотрим отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \leq 2$, определенное в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Отображение f называется билипшицевым с постоянными $l \leq L$, если для любых точек $x, y \in D$ выполнено

$$l|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|.$$

Через $r_D(x)$ будем обозначать расстояние от точки $x \in D$ до границы области, т.е.

$$r_D(x) = \inf_{y \in \partial D} |x-y|.$$

Обозначим через $f(T)$ треугольник с вершинами $f(p_i)$, $i = 0, 1, 2$. Несложно показать, что для билипшицевого отображения f и произвольного треугольника T имеют место неравенства

$$\frac{l}{L}\mu(T) \leq \mu(f(T)) \leq \frac{L}{l}\mu(T).$$

Отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n}$ называется отображением с ограниченным искажением с коэффициентом $K \geq 1$, если для почти всех $x \in D$ выполнено

$$||d_x f||^n \leq K J_f(x). \quad (2)$$

Здесь

$$||d_x f|| = \max_{|h|=1} |d_x f(h)|,$$

$d_x f$ — дифференциал, $J_f(x)$ — якобиан отображения f в точке $x \in D$. Определим также величину

$$K_f(x) = \frac{\max_{|h|=1} |d_x f(h)|}{\min_{|h|=1} |d_x f(h)|}.$$

Наименьшую постоянную в (2) обозначим через $K(f)$. Хорошо известно [9], [7] что

$$K(f) \leq \sup_{x \in D} (K_f(x))^{n-1}.$$

1. ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КВАЗИРЕГУЛЯРНОСТИ

Теорема 1. Пусть отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что найдется постоянная $1 < \lambda \leq \sqrt{2}$ такая, что для всякого равнобедренного прямоугольного треугольника T выполнено

$$\mu(f(T)) \geq \lambda. \quad (3)$$

Тогда в каждой точке дифференцируемости отображения f выполнено

$$K_f(x) \leq \frac{1 + \lambda\sqrt{2 - \lambda^2}}{\lambda^2 - 1}.$$

Доказательство. Пусть x — точка дифференцируемости отображения f и $A = d_x f$ обозначает дифференциал этого отображения в точке $x \in D$. Рассмотрим единичный шар

$$B = \{y : |x - y| = 1\}.$$

Множество $E = A(B)$ представляет собой эллипсоид с центром в точке $q_0 = f(x)$. Пусть точки $q_1, q_2 \in \partial E$ выбраны так, что

$$|q_1 - q_0| = \max_{|h|=1} |A(h)|, \quad |q_2 - q_0| = \min_{|h|=1} |A(h)|.$$

Поэтому

$$K_f(x) = \frac{|q_1 - q_0|}{|q_2 - q_0|}. \quad (4)$$

Найдем точки p_1, p_2 так, чтобы $q_i = A(p_i)$. Известно, что векторы $p_1 - x, p_2 - x$ и $q_1 - q_0, q_2 - q_0$ ортогональны. Пусть $r_D(x)$ — расстояние от точки x до границы ∂D . Для $0 < r < r_D(x)$ определим точки

$$p_i^r = x + r(p_i - x), \quad i = 1, 2.$$

Ясно, что

$$A(p_i^r) = q_0 + r(q_i - q_0), \quad i = 1, 2.$$

Поскольку отображение f дифференцируемо, в точке x будет выполнено

$$f(p_i^r) - f(x) = A(p_i^r - x) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2,$$

где $\varepsilon_i = o(r)$ при $r \rightarrow 0$. Используя вышеприведенные равенства, получаем

$$f(p_i^r) - f(x) = r(q_i - q_0) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2,$$

$$f(p_1^r) - f(p_2^r) = r(q_1 - q_2) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Тогда для длин соответствующих отрезков имеем

$$|f(p_i^r) - f(x)| = r|q_i - q_0| + \tilde{\varepsilon}_i, \quad i = 1, 2,$$

$$|f(p_1^r) - f(p_2^r)| = r|q_1 - q_2| + \tilde{\varepsilon}_3.$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}_i = o(r)$, $i = 1, 2, 3$, при $r \rightarrow 0$. Обозначим через T^r треугольник с вершинами в точках x, p_1, p_2 . Ясно, что это равнобедренный прямоугольный треугольник. Из вышеприведенных равенств для длин сторон треугольника $f(T^r)$ имеем

$$\mu(f(T^r)) = \frac{|f(p_1^r) - f(x)| + |f(p_2^r) - f(x)|}{|f(p_1^r) - f(p_2^r)|} = \frac{|q_1 - q_0| + |q_2 - q_0| + \tilde{\varepsilon}_1/r + \tilde{\varepsilon}_2/r}{|q_1 - q_2| + \tilde{\varepsilon}_3/r}.$$

По условию теоремы $\mu(f(T^r)) \geq \lambda$. Поэтому, переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ в последнем равенстве и применяя условия теоремы, получим соотношение

$$\frac{|q_1 - q_0| + |q_2 - q_0|}{|q_1 - q_2|} \geq \lambda.$$

Учитывая ортогональность векторов $q_1 - q_0, q_2 - q_0$ и равенство (4), имеем

$$\frac{K_f(x) + 1}{\sqrt{K_f^2(x) + 1}} \geq \lambda,$$

откуда легко выводится требуемое неравенство для $K_f(x)$. $\square$

Следствие 1. Пусть отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$, для которого найдется постоянная $1 < \lambda \leq \sqrt{2}$ такая, что для всякого равнобедренного прямоугольного треугольника T выполнено (3). Тогда f есть отображение с ограниченным искажением.

Теорема 2. Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — такое отображение, что найдутся два числа $1 < \mu_0 \leq 2$, $\lambda > 1/\mu_0$, для которых выполнено следующее условие: для всякого треугольника T с вершинами в области D с $\mu(T) \geq \mu_0$

$$\mu(f(T)) \geq \lambda\mu(T).$$

Тогда в каждой точке x дифференцируемости отображения f имеет место неравенство

$$K_f(x) \leq \frac{2}{\lambda\mu_0 - 1}. \quad (5)$$

Доказательство. Начало доказательства дословно повторяет начало доказательства теоремы 1.

Пусть $\alpha \in (0, \pi/3]$ — единственное решение уравнения

$$1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \mu_0.$$

Положим

$$p_\alpha^r = p_0 + r(p_1 - p_0) \cos \alpha + r(p_2 - p_0) \sin \alpha.$$

Тогда для треугольника T^r с вершинами в точках p_0, p_1, p_α^r легко вычислить, что

$$\mu(T^r) = \mu_0.$$

Тогда по условию теоремы

$$\mu(f(T^r)) \geq \lambda\mu_0. \quad (6)$$

В силу дифференцируемости отображения f в точке x получим равенства

$$\begin{aligned} f(p_1^r) - f(p_0) &= rA(p_1 - p_0) + \varepsilon_1 = r|q_1 - q_0| + \varepsilon_1, \\ f(p_\alpha^r) - f(p_0) &= rA(p_1 - p_0) \cos \alpha + rA(p_2 - p_0) \sin \alpha + \varepsilon_2 + \\ &\quad + r(q_1 - q_0) \cos \alpha + r(q_2 - q_0) \sin \alpha + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = o(r)$ при $r \rightarrow 0$. Тогда для длин сторон треугольника $f(T^r)$ имеем

$$\begin{aligned} |f(p_1^r) - f(p_0)| &= r|q_1 - p_0| + \tilde{\varepsilon}_1, \\ |f(p_\alpha^r) - f(p_0)| &= \sqrt{r^2|q_1 - q_0|^2 \cos^2 \alpha + r^2|q_2 - q_0|^2 \sin^2 \alpha} + \tilde{\varepsilon}_2, \\ |f(p_\alpha^r) - f(p_1^r)| &= \sqrt{r^2|q_1 - q_0|^2 (1 - \cos \alpha)^2 + r^2|q_2 - q_0|^2 \sin^2 \alpha} + \tilde{\varepsilon}_3, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varepsilon}_i = o(r)$ при $r \rightarrow 0$. По определению величины $\mu(f(T^r))$ выполнено

$$\begin{aligned} \mu(f(T^r)) &\leq \frac{|f(p_\alpha^r) - f(p_0)| + |f(p_\alpha^r) - f(p_1^r)|}{|f(p_1^r) - f(p_0)|} = \\ &= \frac{\sqrt{r^2|q_1 - q_0|^2 \cos^2 \alpha + r^2|q_2 - q_0|^2 \sin^2 \alpha} + \tilde{\varepsilon}_2}{r|q_1 - p_0| + \tilde{\varepsilon}_1} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{r^2|q_1 - q_0|^2 (1 - \cos \alpha)^2 + r^2|q_2 - q_0|^2 \sin^2 \alpha} + \tilde{\varepsilon}_3}{r|q_1 - p_0| + \tilde{\varepsilon}_1}. \end{aligned}$$

Из неравенства $\sqrt{u^2 + v^2} \leq u + v$, $u, v \geq 0$, получим оценку

$$\mu(f(T^r)) \leq \frac{|q_1 - q_0| + 2|q_2 - q_0| \sin \alpha + (\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\varepsilon}_3)/r}{|q_1 - q_0| + \tilde{\varepsilon}_1/r}.$$

Применяя (6), учитывая (4) и выполняя предельный переход $r \rightarrow 0$ имеем

$$\lambda\mu_0 \leq 1 + \frac{2 \sin \alpha}{K_f(x)} \leq 1 + \frac{2}{K_f(x)},$$

откуда следует (5). □

Следствие 2. Пусть отображение $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$ такое, что найдутся два числа $1 < \mu_0 \leq 2$, $\lambda > 1/\mu_0$, для которых выполнено следующее условие: для всякого треугольника T с вершинами в области D с $\mu(T) \geq \mu_0$

$$\mu(f(T)) \geq \lambda\mu(T).$$

Тогда f есть отображение с ограниченным искажением.

2. Билипшицевость отображений

В этом разделе находим условия, при которых отображение с ограниченным искажением треугольников будет билипшицевым. Для доказательства соответствующих утверждений нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть T — произвольный невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Пусть $S(T)$ и $P(T)$ обозначают его площадь и периметр соответственно. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{1}{2\mu(T)} \left(\frac{\mu(T) - 1}{\mu(T) + 1} \right)^{3/2} P^2(T) \leq S(T) \leq \frac{\sqrt{3}}{36} P^2(T). \quad (7)$$

Доказательство. Правое неравенство следует из того, что среди треугольников заданной площади минимальный периметр имеет равносторонний треугольник. Докажем левое неравенство. Обозначим через $a \geq c \geq b$ длины сторон треугольника T . Пусть $\varphi \geq \psi$ — углы при стороне a . Ясно, что эти углы острые и φ прилегает к стороне b , а ψ — к стороне c . Тогда

$$a = b \cos \varphi + c \cos \psi \geq (b + c) \cos \varphi.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \frac{b+c}{a} \leq \frac{1}{\cos \varphi}, \\ \cos \varphi &\leq \frac{1}{\mu(T)}, \quad \sin \varphi \geq \frac{\sqrt{\mu(T)^2 - 1}}{\mu(T)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $c \leq a$, то $b \geq a(\mu(T) - 1)$. Наконец,

$$P(T) = a + b + c = a(1 + \mu(T)).$$

Из последних двух соотношений и неравенства (8) будем иметь

$$S(T) = \frac{1}{2} ab \sin \varphi \geq \frac{a^2}{2\mu(T)} \sqrt{\mu(T)^2 - 1} = \frac{1}{2\mu(T)} \left(\frac{\mu(T) - 1}{\mu(T) + 1} \right)^{3/2} P^2(T).$$

□

Замечание. Левая часть неравенства (7) является точной и достигается на равносторонних треугольниках, для которых $\mu(T) = 2$.

Теорема 3. Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 1$, — некоторое отображение, для которого найдутся числа $1 < \mu_0 \leq 2$, $\lambda > 1/\mu_0$, $\Lambda > 0$ такие, что

а) для треугольника T с вершинами в D и $\mu(T) \geq \mu_0$ выполнено

$$\mu(f(T)) \geq \lambda\mu(T); \quad (9)$$

б) для всякого треугольника T с вершинами в D выполнено

$$S(f(T)) \leq \Lambda S(T). \quad (10)$$

Тогда для всякой пары точек $x, y \in D$, $x \neq y$, $|x - y| < r_D(x)$, имеет место неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

с постоянной

$$L = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\lambda^2 \mu_0^2 (\lambda \mu_0 + 1)}{\lambda \mu_0 - 1} \right)^{3/4} \sqrt{\Lambda}.$$

Доказательство. Поскольку $1 < \mu_0 \leq 2$, то величина

$$\alpha = 2 \arcsin \left(\frac{\mu_0 - 1}{2} \right)$$

удовлетворяет неравенству $0 < \alpha \leq \pi/3$. Построим треугольник с вершинами в точках x, y, z , выбрав точку z так, что $|x - z| = |x - y|$ и $\angle yxz = \alpha$. В таком случае $\mu(T) = \mu_0$. Пусть $T' = f(T)$. Из (9) вытекает $\mu(T') \geq \lambda \mu_0 > 1$. Поэтому из (7) получаем

$$P(T') \leq \sqrt{2} \left(\frac{\mu(T')^{2/3} (\mu(T') + 1)}{\mu(T') - 1} \right)^{3/4} \sqrt{S(T')} \leq \sqrt{2} \left(\frac{(\lambda \mu_0)^{2/3} (\lambda \mu_0 + 1)}{\lambda \mu_0 - 1} \right)^{3/4} \sqrt{\Lambda S(T)}.$$

Здесь воспользовались условием (10) и тем, что функция

$$\frac{t^{2/3}(t+1)}{t-1}$$

не возрастает на полуинтервале $(1, 2]$. Используя правую часть (7), получаем

$$P(T') \leq \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{6} \left(\frac{\lambda^2 \mu_0^2 (\lambda \mu_0 + 1)}{\lambda \mu_0 - 1} \right)^{3/4} \sqrt{\Lambda} P(T). \quad (11)$$

Далее, используя неравенство треугольника будем иметь

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{|f(x) - f(y)| + |f(x) - f(y)|}{2} \leq \\ &\leq \frac{|f(x) - f(y)| + |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|}{2} = \frac{1}{2} P(T'). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$P(T) = |x - y| + |x - z| + |z - y| = 2|x - y| + |z - x + x - y| \leq 4|x - y|.$$

Сопоставляя эти неравенства с оценкой (11) получаем

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\lambda^2 \mu_0^2 (\lambda \mu_0 + 1)}{\lambda \mu_0 - 1} \right)^{3/4} \sqrt{\Lambda} |x - y|.$$

□

Теорема 4. Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — липшицево отображение такое, что для всех $x, y \in D$ выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

с постоянной $L > 0$. Если найдутся такие постоянные $\lambda > 0, 1 < \mu_0 \leq 2$, что для всякого треугольника T с вершинами в D и $\mu(T) \geq \mu_0$ справедливо неравенство

$$S(f(T)) \geq \lambda S(T),$$

то для всякой пары точек $x, y \in D, x \neq y, |x - y| < r_D(x)$, будет выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{\lambda \sqrt{\mu_0^2 - 1}}{L \mu_0} |x - y|.$$

Доказательство. Найдем точку $z \in D$ такую, что $|x - z| = |x - y| < r_D(x)$ и угол $\angle yxz = \alpha$ такой, что

$$1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \mu_0, \quad 0 < \alpha \leq \pi/3.$$

В этом случае для треугольника T с вершинами в точках x, y, z будем иметь

$$\mu(T) = \mu_0.$$

С одной стороны,

$$S(f(T)) \leq \frac{1}{2} |f(x) - f(y)| |f(z) - f(x)|,$$

с другой стороны, по условию теоремы

$$S(f(T)) \geq \lambda S(T).$$

Воспользуемся оценкой площади треугольника из леммы. Получим

$$S(f(T)) \geq \lambda \frac{1}{2} |x - y| |z - x| \frac{\sqrt{\mu(T)^2 - 1}}{\mu(T)}.$$

Объединяя полученные неравенства, имеем

$$|f(x) - f(y)| |f(z) - f(x)| \geq \lambda |x - y| |z - x| \frac{\sqrt{\mu(T)^2 - 1}}{\mu(T)}.$$

Поскольку функция $\sqrt{t^2 - 1}/t$ возрастает при $t > 1$, приходим к оценке

$$|f(x) - f(y)| |f(z) - f(x)| \geq \lambda |x - y| |z - x| \frac{\sqrt{\mu_0^2 - 1}}{\mu_0}.$$

Используя условие Липшица на отображение f , окончательно получаем неравенство

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \frac{\lambda \sqrt{\mu_0^2 - 1}}{L \mu_0}.$$

□

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гаранжа В.А. *Билипшицевы параметризации негладких поверхностей и построение поверхностных расчетных сеток*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **45** (8), 1383–1398 (2005).
- [2] Гаранжа В.А., Каменски Л., Кудрявцева Л.Н. *Построение несимплициальных сеток Делоне посредством аппроксимации радикальными разбиениями*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **62** (8), 1237–1250 (2022).
- [3] Прохорова М.В. *Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории сеток*, Тр. ИММ УрО РАН **14** (1), 112–129 (2008).
- [4] Клячин В.А. *О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию*, Зап. сем. “Сверхмедленные процессы” (4), 169–182 (2009).
- [5] Клячин В.А., Широкий А.А. *Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства*, Изв. вузов. Матем. (1), 31–39 (2012).
- [6] Субботин Ю.Н. *Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции*, Тр. МИАН СССР **189**, 117–137 (1989).
- [7] Решетняк Ю.Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением* (Наука, Новосибирск, 1982).
- [8] Игумнов А.Ю. *О сохранении ориентации треугольника при квазиизометрическом отображении*, Матем. физ. и комп. моделир. **21** (2), 5–12 (2018).
- [9] Миклюков В.М. *Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения* (Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2007).

Владимир Александрович Клячин

*Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, д. 100, г. Волгоград, 400062, Россия;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru*

V.A. Klyachin

On mappings with bounded distortion of triangles

Abstract. The article introduces a characteristic of a triangle, reflecting the measure of its non-degeneracy. The importance of studying this quantity is associated with the construction of high-quality computational grids. It is shown that if a Sobolev class mapping distorts this characteristic multiple times, then this mapping is a mapping with limited distortion. In addition, it is proved that if the above condition and additionally the condition of limited distortion of the area of the triangle are satisfied, then the mapping is bi-Lipschitz. The article establishes estimates for all constants characterizing the mappings under study.

Keywords: distortion of triangles, quasiregular mapping, bilipschitz mapping.

Vladimir Aleksandrovich Klyachin

*Volgograd State University,
100 University Ave., Volgograd, 400062 Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogova str., Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru*