

Г. ВИНАЙ, СИДДАРАДЖУ, К.С. ШИВАКУМАР СВАМИ

ТОЖДЕСТВА ДЛЯ РЯДОВ ЭЙЗЕНШТЕЙНА УРОВНЯ 20 И ИХ КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА

Аннотация. Т. Хубер, Д. Шульц и Д. Ёе получили четыре тождества для рядов Эйзенштейна уровня 20 и использовали их для вывода нового разложения для $\frac{1}{\pi}$. Как продолжение этих результатов в данной статье получены девять новых тождеств для рядов Эйзенштейна уровня 20 и установлены их комбинаторные свойства.

Ключевые слова: тета-функция, модулярное уравнение, ряд Эйзенштейна.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-9-25-37

ВВЕДЕНИЕ

Для любых комплексных чисел a и q положим

$$(a; q)_{\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n), \quad |q| < 1,$$
$$(a; q)_n = \frac{(a; q)_{\infty}}{(aq^n; q)_{\infty}},$$

где n — целое число. В шестнадцатой главе своей второй тетради С. Рамануджан определил обобщенную тета-функцию

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad |ab| < 1.$$

По известному тождеству тройного произведения Якоби имеем

$$f(a, b) = (-a; ab)_{\infty} (-b; ab)_{\infty} (ab; ab)_{\infty}.$$

Также он рассмотрел частные случаи функции $f(a, b)$:

$$\varphi(q) := f(q, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = (-q; q^2)_{\infty}^2 (q^2; q^2)_{\infty},$$
$$\psi(q) := f(q, q^3) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(q^2; q^2)_{\infty}}{(q; q^2)_{\infty}},$$
$$f(-q) := f(-q, -q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} = (q; q)_{\infty}.$$

Можно заметить, что (классическая) тета-функция Якоби $\theta_3(0, \tau) = \varphi(q)$, где $q = e^{\pi i \tau}$ ([1], с. 463). Для удобства положим $f(-q^n) = f_n$ для положительных целых n . Легко проверить, что

$$\varphi(q) = \frac{f_2^5}{f_1^2 f_4^2}, \quad \psi(-q) = \frac{f_1 f_4}{f_2}, \quad \chi(q) = \frac{f_2^2}{f_1 f_4}. \quad (1)$$

Гипергеометрический ряд Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — ряд вида

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \quad |z| < 1.$$

Полный эллиптический интеграл первого рода обозначается как $K(k)$ и определяется следующим образом:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad |k| < 1.$$

Назовем k модулем, а $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительным модулем $K(k)$. Этот полный эллиптический интеграл первого рода связан с гипергеометрическим рядом Гаусса уравнением

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

Положим $\alpha = k^2$, $\beta = l_1^2$, $\gamma = l_2^2$ и $\delta = l_3^2$. Пусть $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $l_1' = \sqrt{1 - l_1^2}$, $l_2' = \sqrt{1 - l_2^2}$, $l_3' = \sqrt{1 - l_3^2}$. Пусть также равенство

$$n \frac{K(k')}{K(k)} = \frac{K(l_1')}{K(l_1)}$$

выполняется для некоторого положительного целого n . Тогда любое соотношение между α и β , вытекающее из приведенного выше, называется модулярным уравнением степени n . Множитель, связывающий α и β , обозначается через m и определяется формулой

$$m = \frac{z_1}{z_n} = \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \alpha\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \beta\right)}.$$

Будем говорить, что β имеет степень n над α .

Ряд Эйзенштейна $P_n(q)$ имеет вид

$$P(q^n) = 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k q^{nk}}{1 - q^{nk}}.$$

Для удобства будем писать P_n вместо $P(q^n)$.

В двадцать первой главе своей второй тетради С. Рамануджан записал соотношения между линейной комбинацией величин $P_1, P_{d_1}, P_{d_2}, P_{2k}, \dots, P_{d_n}$ и величинами $f_1, f_{d_1}, f_{d_2}, \dots, f_{d_n}$, где $d_1, d_2, \dots, d_n$ — положительные делители n . Такие тождества называют тождествами тета-функций уровня k . В [2] доказаны тождества уровня 20, используя теорию модулярных форм. В [3] эти тождества доказаны элементарным способом. Кроме того, сам С. Рамануджан записал несколько подобных тождеств тета-функций разных уровней.

Учитывая вышеизложенные факты, в данной статье доказываются следующие тождества уровня 20:

$$\frac{1}{24} [-P_1 + 5P_2 - 4P_4 + 5P_5 - 25P_{10} + 20P_{20}] = \left(\frac{f_1^2 f_4^3 f_5^6 f_{20}}{f_2^5 f_{10}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_1^3 f_4^2 f_5 f_{20}^6}{f_2^5 f_{10}^3} \right), \quad (2)$$

$$\frac{1}{24} [-P_1 + 4P_2 - 4P_4 + 25P_5 - 100P_{10} + 100P_{20}] = \left(\frac{f_2^3 f_5^5}{f_1 f_{10}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_2^3 f_{20}^5}{f_4 f_{10}^3} \right), \quad (3)$$

$$\frac{1}{12} [P_1 - 2P_2 + 4P_4 - 5P_5 + 10P_{10} - 20P_{20}] = \left(\frac{f_2^3 f_5^2 f_{10}^5}{f_1^2 f_4 f_{20}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_2^3 f_{10}^5 f_{20}^2}{f_1 f_4 f_5^3} \right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} [P_1 - 6P_2 + 4P_4 + 15P_5 - 50P_{10} + 60P_{20}] = \\ = \left(\frac{f_1^4 f_4^5 f_5^4}{f_2^7 f_{10} f_{20}} + 3q \frac{f_1^2 f_4^3 f_5^6 f_{20}}{f_2^5 f_{10}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_1^5 f_4^4 f_{20}^4}{f_2^7 f_5 f_{10}} + 12q^{\frac{1}{2}} \frac{f_1^3 f_4^2 f_5 f_{20}^6}{f_2^5 f_{10}^3} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} [-3P_1 + 14P_2 - 12P_4 + 35P_5 - 150P_{10} + 140P_{20}] = \\ = \left(\frac{f_1^4 f_4^5 f_5^4}{f_2^7 f_{10} f_{20}} + 3q \frac{f_1^2 f_4^3 f_5^6 f_{20}}{f_2^5 f_{10}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_1^5 f_4^4 f_{20}^4}{f_2^7 f_5 f_{10}} + 14q^{\frac{1}{2}} \frac{f_1^3 f_4^2 f_5 f_{20}^6}{f_2^5 f_{10}^3} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{1}{24} [3P_1 - 16P_2 + 12P_4 + 5P_5 + 20P_{20}] = \left(\frac{f_1^3 f_4^4 f_5 f_{10}^7}{f_2^7 f_{20}^4} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_1^4 f_4^3 f_{10}^7 f_{20}}{f_2^7 f_5^4} \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} [-3P_1 + 14P_2 - 12P_4 + 35P_5 - 150P_{10} + 140P_{20}] = \\ = \left(\frac{f_2^3 f_5^5}{f_1 f_{10}^3} - 2q \frac{f_1^2 f_4^3 f_5^6 f_{20}}{f_2^5 f_{10}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_2^3 f_{20}^5}{f_4 f_{10}^3} - 8q^{\frac{1}{2}} \frac{f_1^3 f_4^2 f_5 f_{20}^6}{f_2^5 f_{10}^3} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{1}{24} [P_1 + 4P_4 + 15P_5 - 80P_{10} + 60P_{20}] = \left(-q \frac{f_2^5 f_5^7 f_{20}^2}{f_1^3 f_4^2 f_{10}^5} - 4q^{\frac{1}{2}} \frac{f_2^5 f_5^2 f_{20}^7}{f_1^2 f_4^3 f_{10}^5} \right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} [-2P_1 + 9P_2 - 8P_4 + 30P_5 - 125P_{10} + 120P_{20}] = \\ = \left(\frac{f_2^3 f_5^5}{f_1 f_{10}^3} - q \frac{f_1^2 f_4^3 f_5^6 f_{20}}{f_2^5 f_{10}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_2^3 f_{20}^5}{f_4 f_{10}^3} - 4q^{\frac{1}{2}} \frac{f_1^3 f_4^2 f_5 f_{20}^6}{f_2^5 f_{10}^3} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

В разделе 1 приводятся определения, обозначения и основные результаты, необходимые для доказательств. В разделе 2 доказываются формулы (2)–(10). В разделе 3 рассматриваются применения формул (2)–(10) к разбиениям чисел.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим следующее модулярное уравнение.

Теорема 1. Если β имеет степень 5 над α , то ввиду ([4], с. 281, п. 13 (xi)) имеем

$$\left(\frac{(1-\beta)^5}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} + \left(\frac{\beta^5}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} = m \left(\frac{1+(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} + \{(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В ([5], с. 26) определен параметр μ как $\mu(q) := R(q)R(q^4)$, где $R(q) = \frac{q^{1/5}f(-q, -q^4)}{f(-q^2, -q^3)}$. В данной статье используются следующие тождества, содержащие параметр μ :

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^5)} = \frac{1+\mu}{1-\mu}, \quad (11)$$

$$q \frac{\chi(q)}{\chi^5(q^5)} = \frac{\mu}{(1-\mu)^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\psi^2(-q)}{q\psi^2(-q^5)} = \frac{1-3\mu+\mu^2}{\mu}. \quad (13)$$

Доказательства (11)–(13) можно найти в [6].

Теорема 2. Пусть

$$w = q \frac{d}{dq} \log \mu.$$

Тогда

$$w = \frac{f_{10}^{12} f_1 f_4}{2 f_5^5 f_{20}^5} \sqrt{\frac{\varphi^4(q)}{\varphi^4(q^5)} - 2 \frac{\varphi^2(q)}{\varphi^2(q^5)} + 5}.$$

Доказательство можно найти в [7].

Теорема 3.

$$\sqrt{\frac{\varphi^4(q)}{\varphi^4(q^5)} - 2 \frac{\varphi^2(q)}{\varphi^2(q^5)} + 5} = 2 \frac{f_4 f_5^8 f_{20}^3}{f_2^2 f_{10}^{10}} + 8 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_1 f_5^3 f_{20}^8}{f_2^2 f_{10}^{10}}. \quad (14)$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 ([4], с. 284, (13.3)) получаем

$$\left(\frac{(1-\beta)^5}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} + \left(\frac{\beta^5}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} = \frac{\rho}{\sqrt{m}},$$

где $\rho = (m^3 - 2m^2 + 5m)^{\frac{1}{2}}$. Преобразуя вышеуказанное модулярное уравнение в тождество тета-функций с использованием ([4], с. 122–123, гл. 17, п. 10 (iii) и п. 11 (i); [4], с. 284, (13.3)), получаем

$$2 \frac{\varphi^5(-q^{10})}{\varphi^4(q^5) \varphi(-q^2)} + 8 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{\psi^5(q^5)}{\psi(q) \varphi^4(q^5)} = \frac{\rho}{\sqrt{m}},$$

откуда следует

$$2 \frac{\varphi^5(-q^{10})}{\varphi^4(q^5) \varphi(-q^2)} + 8 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{\psi^5(q^5)}{\psi(q) \varphi^4(q^5)} = \sqrt{\frac{\varphi^4(q)}{\varphi^4(q^5)} - 2 \frac{\varphi^2(q)}{\varphi^2(q^5)} + 5}.$$

Используя (1) в левой части вышеприведенной формулы, имеем (14). □

Теорема 4. Для любого положительного целого n имеем

$$P_n = 1 - 24 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(j) q^{jn}. \quad (15)$$

Доказательство (15) можно найти в ([8], с. 318).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе доказываются тождества (2)–(10).

Доказательство (2). Используя (1), левую часть уравнения (11) можно переписать в виде

$$\frac{f_2^5 f_5^2 f_{20}^2}{f_1^2 f_4^2 f_{10}^5} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}.$$

Применяя логарифм к обеим частям приведенного выше соотношения, затем дифференцируя по q , а после этого используя определение P_n в левой части полученного тождества, получаем

$$\frac{1}{24} [-2P_1 + 10P_2 - 8P_4 + 10P_5 - 50P_{10} + 40P_{20}] = \left(\frac{1}{1 + \mu} + \frac{1}{1 - \mu} \right) \frac{d\mu}{dq}.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{24} [-2P_1 + 10P_2 - 8P_4 + 10P_5 - 50P_{10} + 40P_{20}] = 2 \frac{\mu}{1 - \mu^2} \frac{q}{\mu} \frac{d\mu}{dq}.$$

Используя теоремы 2, 3 и применяя (1), (11), (12) в правой части вышеуказанного соотношения, получаем

$$\frac{1}{24} [-P_1 + 5P_2 - 4P_4 + 5P_5 - 25P_{10} + 20P_{20}] = \left(\frac{f_1^2 f_4^3 f_5^6 f_{20}}{f_2^5 f_{10}^3} + 4 \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \frac{f_1^3 f_4^2 f_5 f_{20}^6}{f_2^5 f_{10}^3} \right).$$

Доказательство (2) завершено.

Доказательство (3). Используя (1), левую часть уравнения (12) можно переписать в виде

$$q \frac{f_2^2 f_5^5 f_{20}^5}{f_1 f_4 f_{10}^5} = \frac{\mu}{(1 - \mu)^2}.$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (3).

Доказательство (4). Используя (1), левую часть уравнения (13) можно переписать в виде

$$\frac{1}{q} \frac{f_1^2 f_4^2 f_{10}^2}{f_2^2 f_5^2 f_{20}^2} = \frac{1 - 3\mu + \mu^2}{\mu}.$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (4).

Доказательство (5). Разделим (12) на (11):

$$q \frac{\chi(q)}{\chi^5(q^5)} \frac{\varphi(q^5)}{\varphi(q)} = \frac{\mu}{1 - \mu^2}.$$

Используя (1) в левой части вышеуказанного соотношения, имеем

$$q \frac{f_1 f_4 f_5^3 f_{20}^3}{f_2^3 f_{10}^5} = \frac{\mu}{1 - \mu^2}.$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (5).

Доказательство (6). Перемножим (11) и (12):

$$q \frac{\chi(q)}{\chi^5(q^5)} \frac{\varphi(q)}{\varphi(q^5)} = \frac{\mu(1+\mu)}{(1-\mu)^3}.$$

Используя (1) в левой части вышеуказанного соотношения, имеем

$$q \frac{f_2^7 f_5^7 f_{20}^7}{f_1^3 f_4^3 f_{10}^{15}} = \frac{\mu(1+\mu)}{(1-\mu)^3}.$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (6).

Доказательство (7). Разделим (12) на квадрат (11):

$$q \frac{\chi(q)}{\chi^5(q^5)} \frac{\varphi^2(q)}{\varphi^2(q^5)} = \frac{\mu}{(1+\mu)^2}.$$

Используя (1) в левой части вышеуказанного соотношения, имеем

$$q \frac{f_1^3 f_4^3 f_5 f_{20}}{f_2^8} = \frac{\mu}{(1+\mu)^2}.$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (7).

Доказательство (8). Разделим квадрат (12) на квадрат (11):

$$q^2 \frac{\chi^2(q)}{\chi^{10}(q^5)} \frac{\varphi^2(q)}{\varphi^2(q^5)} = \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2(1+\mu)^2}.$$

Используя (1) в левой части вышеуказанного соотношения, имеем

$$q^2 \frac{f_2^{14} f_5^{14} f_{20}^{14}}{f_1^6 f_4^6 f_{10}^{30}} = \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2(1+\mu)^2},$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (8).

Доказательство (9). Перемножим (12) и (13):

$$\frac{\chi(q)}{\chi^5(q^5)} \frac{\psi^2(-q)}{\psi^2(-q^5)} = \frac{1-3\mu+\mu^2}{(1-\mu)^2}.$$

Используя (1) в левой части вышеуказанного соотношения, имеем

$$\frac{f_1 f_4 f_5^3 f_{20}^3}{f_{10}^8} = \frac{1-3\mu+\mu^2}{(1-\mu)^2}.$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (9).

Доказательство (10). Возведем (12) в квадрат и разделим на (11):

$$q^2 \frac{\chi^2(q)}{\chi^{10}(q^5)} \frac{\varphi(q)}{\varphi(q^5)} = \frac{\mu^2}{(1-\mu)^3(1+\mu)}.$$

Используя (1) в левой части вышеуказанного соотношения, имеем

$$q^2 \frac{f_2^9 f_5^{12} f_{20}^{12}}{f_1^4 f_4^4 f_{10}^{25}} = \frac{\mu^2}{(1-\mu)^3 (1+\mu)},$$

Далее, следуя той же схеме, что и в доказательстве (2), получаем (10).

3. ПРИЛОЖЕНИЯ РАЗБИЕНИЙ

В этом разделе приводятся интерпретации (2)–(10) в смысле разбиений. Для удобства используем стандартное обозначение

$$(a_1, a_2, \dots, a_n; q)_\infty := \prod_{j=1}^n (a_j; q)_\infty$$

и определим

$$(q^{m\pm}; q^n) = (q^m, q^{n-m}; q^n),$$

где m и n — положительные целые числа, причем $m < n$.

Положительное целое число n имеет k цветов, если имеется k копий числа n , и каждая из них рассматривается как отдельный объект. Разбиения положительных целых чисел на части с учетом цветов называются окрашенными разбиениями. Например, если числу 1 разрешено иметь два цвета, то все окрашенные разбиения числа 2 имеют вид 2 , $1_r + 1_r$, $1_g + 1_g$ и $1_r + 1_g$, где индексы r (red) и g (green) используются для различения двух цветов числа 1. Функция

$$\frac{1}{(q^u; q^v)^k}$$

является порождающей функцией для числа разбиений числа n , в которых все части конгруэнтны $u \pmod{v}$ и имеют k цветов.

Пусть $P_{(d,o)}(n)$ обозначает число разбиений числа n на попарно различные четные части. Пусть $P_{(d,e)}(n)$ обозначает число разбиений числа n на попарно различные нечетные части.

Определение 1. Пусть $t_{1(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{1(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 16, 20 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, различны и имеют два цвета;
- iii) части, конгруэнтные $\pm 10 \pmod{40}$, различны и имеют восемь цветов;
- iv) части, конгруэнтные $0 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- v) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$ имеют три цвета;
- vi) число частей, конгруэнтных $0, \pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_1(n) = t_{1(d,e)}(n) - t_{1(d,o)}(n), \text{ причем } T_1(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_2^2 f_8^3 f_{10}^6 f_{40}}{f_4^5 f_{20}^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T_1(n) q^{2n}.$$

В таблице 1 r — красный, g — зеленый, y — желтый, w — белый, b — синий, o — оранжевый, p — розовый и bl — черный цвета.

Таблица 1

n	$t_{1(d,e)}(n)$	$t_{1(d,o)}(n)$	$T_1(n)$
2	0	2 (2r, 2g)	-2
4	1 (2r + 2g)	3 (4r, 4g, 4w)	-2
6	6(4r + 2r, 4r + 2g, 4g + 2r, 4g + 2g, 4w + 2r, 4w + 2g)	2(6w, 6g)	4
10	6(6g + 4r, 6w + 4r, 6y + 4r, 6w + 4g, 6y + 4g, 6g + 4g)	8(10r, 10g, 10y, 10w, 10b, 10o, 10p, 10bl)	-2

Определение 2. Пусть $t_{2(d,e)}(n)$ (соответственно $t_{2(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 16 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, различны и имеют три цвета;
- iii) части, конгруэнтные $0, \pm 10 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, имеют два цвета;
- v) части, конгруэнтные $\pm 20 \pmod{40}$, имеют четыре цвета;
- vi) число частей, конгруэнтных $0, \pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_2(n) = t_{2(d,e)}(n) - t_{2(d,o)}(n), \text{ причем } T_2(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_2^3 f_8^2 f_{10} f_{40}^6}{f_4^5 f_{20}^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T_2(n) q^{2n+1}.$$

В таблице 2 r — красный, g — зеленый, y — желтый, w — белый, b — синий и p — розовый цвета.

Таблица 2

n	$t_{2(d,e)}(n)$	$t_{2(d,o)}(n)$	$T_2(n)$
2	0	3 (2r, 2g, 2w)	-3
4	3 (2r + 2g, 2r + 2w, 2g + 2w,)	2(4r, 4g)	1
6	6(4r + 2r, 4r + 2g, 4g + 2r, 4g + 2g, 4w + 2r, 4w + 2g)	4(6g, 6w, 6y, 2r + 2g + 2w)	2
10	6(6g + 4r, 6w + 4r, 6y + 4r, 6w + 4g, 6y + 4g, 6g + 4g)	4(10r, 10g, 10b, 10p)	2

Определение 3. Пусть $t_{3(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{3(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 12, \pm 14, \pm 16, \pm 18 \pmod{20}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 8 \pmod{20}$, различны и имеют четыре цвета;
- iii) части, конгруэнтные $0, \pm 10 \pmod{20}$, различны и имеют четыре цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6 \pmod{40}$, имеют один цвет;

v) число частей, конгруэнтных $0, \pm 4, \pm 8, \pm 10 \pmod{20}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_3(n) = t_{3(d,e)}(n) - t_{3(d,o)}(n), \text{ причем } T_3(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_4^3 f_{10}^5}{f_2 f_{20}^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T_3(n) q^{2n}.$$

Определение 4. Пусть $t_{4(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{4(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18, \pm 20 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, различны и имеют три цвета;
- iii) части, не конгруэнтные $\pm 8, \pm 16 \pmod{40}$, различны и имеют два цвета;
- iv) части, не конгруэнтные $0 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- v) число частей, конгруэнтных $0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_4(n) = t_{4(d,e)}(n) - t_{4(d,o)}(n), \text{ причем } T_4(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_4^3 f_{40}^5}{f_8 f_{20}^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T_4(n) q^{2n+1}.$$

Определение 5. Пусть $t_{5(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{5(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 10, \pm 16 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, различны и имеют один цвет;
- iii) части, конгруэнтные $\pm 20 \pmod{40}$, различны и имеют восемь цветов;
- iv) части, конгруэнтные $0 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- v) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, имеют два цвета;
- vi) число частей, конгруэнтных $0, \pm 4, \pm 12, \pm 20 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_5(n) = t_{5(d,e)}(n) - t_{5(d,o)}(n), \text{ причем } T_5(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_4^3 f_{10}^2 f_{20}^5}{f_2^2 f_8 f_{40}^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T_5(n) q^{2n}.$$

Определение 6. Пусть $t_{6(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{6(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 16 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, различны и имеют два цвета;
- iii) части, конгруэнтные $0, \pm 20 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, имеют один цвет;
- v) части, конгруэнтные $\pm 10 \pmod{40}$, имеют четыре цвета;
- vi) число частей, конгруэнтных $0, \pm 4, \pm 12, \pm 20 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_6(n) = t_{6(d,e)}(n) - t_{6(d,o)}(n), \text{ причем } T_6(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_4^3 f_{20}^5 f_{40}^2}{f_2 f_8^2 f_{10}^3} = \sum_{n=0}^{\infty} T_6(n) q^{2n+1}.$$

Определение 7. Пусть $t_{7(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{7(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 20 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iii) части, конгруэнтные $\pm 8, \pm 16 \pmod{40}$, различны и имеют два цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, имеют три цвета;
- v) части, конгруэнтные $0 \pmod{40}$, имеют четыре цвета;
- vi) число частей, конгруэнтных $\pm 2, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \pm 16, \pm 18 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_7(n) = t_{7(d,e)}(n) - t_{7(d,o)}(n), \text{ причем } T_7(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_2^4 f_8^5 f_{10}^4}{f_4^7 f_{20} f_{40}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_6(n) q^{2n}.$$

Определение 8. Пусть $t_{8(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{8(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 16, \pm 20 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, различны и имеют пять цветов;
- iii) части, конгруэнтные $0 \pm 10 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, имеют два цвета;
- v) число частей, конгруэнтных $\equiv 0, \pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_8(n) = t_{8(d,e)}(n) - t_{8(d,o)}(n), \text{ причем } T_8(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_2^5 f_8^4 f_{40}^4}{f_4^7 f_{10} f_{20}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_6(n) q^{2n+1}.$$

Определение 9. Пусть $t_{9(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{9(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части, конгруэнтные $\pm 8, \pm 16 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, различны и имеют три цвета;
- iii) части, конгруэнтные $0, \pm 10, \pm 20 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, имеют четыре цвета;
- v) число частей, конгруэнтных $0, \pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_9(n) = t_{9(d,e)}(n) - t_{9(d,o)}(n), \text{ причем } T_9(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_2^3 f_8^4 f_{10} f_{20}^7}{f_4^7 f_{40}^4} = \sum_{n=0}^{\infty} T_9(n) q^{2n}.$$

Определение 10. Пусть $t_{10(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{10(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части, конгруэнтные $\pm 8, \pm 10, \pm 16 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $0, \pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iii) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, имеют три цвета;
- vi) число частей, конгруэнтных $0, \pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_{10}(n) = t_{10(d,e)}(n) - t_{10(d,o)}(n), \text{ причем } T_{10}(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_2^4 f_8^3 f_{20}^7 f_{40}}{f_4^7 f_{10}^4} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{10}(n) q^{2n+1}.$$

Определение 11. Пусть $t_{11(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{11(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 16 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, различны и имеют три цвета;
- iii) части, конгруэнтные $0, \pm 10, \pm 20 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, имеют четыре цвета;
- v) число частей, конгруэнтных $\equiv 0, \pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_{11}(n) = t_{11(d,e)}(n) - t_{11(d,o)}(n), \text{ причем } T_{11}(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_4^5 f_{10}^7 f_{40}^2}{f_2^3 f_8^2 f_{20}^5} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{11}(n) q^{2n-2}.$$

Определение 12. Пусть $t_{12(d,e)}(n)$ (соответственно, $t_{12(d,o)}(n)$) обозначает число разбиений числа n таких, что

- i) части не конгруэнтны $\pm 8, \pm 10, \pm 16 \pmod{40}$;
- ii) части, конгруэнтные $\pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, различны и имеют два цвета;
- iii) части, конгруэнтные $0 \pmod{40}$, различны и имеют четыре цвета;
- iv) части, конгруэнтные $\pm 2, \pm 6, \pm 14, \pm 18 \pmod{40}$, имеют два цвета;
- v) число частей, конгруэнтных $0, \pm 4, \pm 12 \pmod{40}$, четно (соответственно, нечетно):

$$T_{12}(n) = t_{12(d,e)}(n) - t_{12(d,o)}(n), \text{ причем } T_{12}(0) = 1.$$

Используя данное определение, получаем

$$\frac{f_4^5 f_{10}^2 f_{40}^7}{f_2^2 f_8^3 f_{20}^5} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{12}(n) q^{2n-1}.$$

Теорема 5.

$$\sigma\left(\frac{n}{2}\right) - 5\sigma\left(\frac{n}{4}\right) + 4\sigma\left(\frac{n}{8}\right) - 5\sigma\left(\frac{n}{10}\right) + 25\sigma\left(\frac{n}{20}\right) - 20\sigma\left(\frac{n}{40}\right) = T_1(n) + 4T_2(n+1).$$

Доказательство. Используя (15) в (2), имеем

$$\frac{1}{24} \left[\frac{-1}{24} \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\frac{n}{2}\right) q^n \right) + \frac{5}{24} \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\frac{n}{4}\right) q^n \right) - \frac{4}{24} \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\frac{n}{8}\right) q^n \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{24} \left[\frac{5}{24} \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma \left(\frac{n}{10} \right) q^n \right) - \frac{25}{24} \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma \left(\frac{n}{20} \right) q^n \right) + \frac{20}{24} \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma \left(\frac{n}{40} \right) q^n \right) \right] = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} T_1(n) q^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} T_2(n) q^{n-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемый результат. $\square$

Теорема 6.

$$\sigma \left(\frac{n}{2} \right) - 4\sigma \left(\frac{n}{4} \right) + 4\sigma \left(\frac{n}{8} \right) - 25\sigma \left(\frac{n}{10} \right) + 100\sigma \left(\frac{n}{20} \right) - 100\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = T_3(n) + 4T_4(n+1), \quad (\text{i})$$

$$- \sigma \left(\frac{n}{2} \right) + 2\sigma \left(\frac{n}{4} \right) - 4\sigma \left(\frac{n}{8} \right) + 5\sigma \left(\frac{n}{10} \right) - 10\sigma \left(\frac{n}{20} \right) + 20\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = T_5(n) + 4T_6(n+1), \quad (\text{ii})$$

$$\begin{aligned}
& - \sigma \left(\frac{n}{2} \right) + 6\sigma \left(\frac{n}{4} \right) - 4\sigma \left(\frac{n}{8} \right) - 15\sigma \left(\frac{n}{10} \right) + 50\sigma \left(\frac{n}{20} \right) - 60\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = \\
& = T_7(n) + 3T_1(n-2) + 4T_8(n+1) + 12T_2(n-1), \quad (\text{iii})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3\sigma \left(\frac{n}{2} \right) - 14\sigma \left(\frac{n}{4} \right) + 12\sigma \left(\frac{n}{8} \right) - 35\sigma \left(\frac{n}{10} \right) + 150\sigma \left(\frac{n}{20} \right) - 140\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = \\
& = T_7(n) + 3T_1(n-2) + 4T_8(n+1) + 14T_2(n-1), \quad (\text{iv})
\end{aligned}$$

$$- 3\sigma \left(\frac{n}{2} \right) + 16\sigma \left(\frac{n}{4} \right) - 12\sigma \left(\frac{n}{8} \right) - 5\sigma \left(\frac{n}{10} \right) - 20\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = T_9(n) + 4T_{10}(n+1), \quad (\text{v})$$

$$\begin{aligned}
& 3\sigma \left(\frac{n}{2} \right) - 14\sigma \left(\frac{n}{4} \right) + 12\sigma \left(\frac{n}{8} \right) - 35\sigma \left(\frac{n}{10} \right) + 150\sigma \left(\frac{n}{20} \right) - 140\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = \\
& = T_3(n) - 2T_1(n-2) + 4T_4(n+1) - 8T_2(n-1), \quad (\text{vi})
\end{aligned}$$

$$- \sigma \left(\frac{n}{2} \right) - 4\sigma \left(\frac{n}{8} \right) - 15\sigma \left(\frac{n}{10} \right) + 80\sigma \left(\frac{n}{20} \right) - 60\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = -T_{11}(n-2) - 4T_7(n-1), \quad (\text{vii})$$

$$\begin{aligned}
& 2\sigma \left(\frac{n}{2} \right) - 9\sigma \left(\frac{n}{4} \right) + 8\sigma \left(\frac{n}{8} \right) - 30\sigma \left(\frac{n}{10} \right) + 125\sigma \left(\frac{n}{20} \right) - 120\sigma \left(\frac{n}{40} \right) = \\
& = T_3(n) - T_1(n-2) + 4T_4(n+1) - 4T_2(n-1). \quad (\text{viii})
\end{aligned}$$

Доказательство. Используя (15) в (3)–(10), получаем соответственно п. п. (i)–(viii) теоремы. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Whittaker E.T., Watson G.N. *A course of modern analysis* (Cambridge Univ. Press, 1962).
- [2] Huber T., Schultz D., Ye D. *Series for $1/\pi$ of level 20*, J. Number Theory **188**, 121–136 (2018).
- [3] Anusha T. *An elementary approach to Eisenstein series identities of Huber, Schultz and Ye*, Indian J. Pure Appl. Math. **50** (4), 971–978 (2019).
- [4] Berndt B.C. *Ramanujan's notebook*. P. III (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [5] Berndt B.C. *Ramanujan's Notebooks*. II (Tata institute of fundamental Research, Bombay, 1957).
- [6] Gugg C. *Two modular equations for squares of the Rogers–Ramanujan functions with applications*, Ramanujan J. **18**, 183–207 (2009).

- [7] Bhuvan E.N. *A Classical approach to Ramanujan's type Eisenstein series and incomplete elliptic integrals*, Ph.D thesis (Univ. Mysore, 2008).
- [8] Berndt B.C. *Ramanujan's notebooks. II* (Springer-Verlag, New York, 1989).

Г. Винай

Технологический институт им. доктора Амбедкара,
Бангалор, 560056, Индия,

e-mail: vinaytalakad@gmail.com

Сиддараджу

Государственный женский колледж первого уровня,
Чамараджанагар, 571313, Индия,

e-mail: siddupalya73@gmail.com

К.С. Шивакумар Свами

Государственный женский колледж (автономный),
Мандья, 571401, Индия,

e-mail: cskswamy@gmail.com

G. Vinay, Siddaraju, and C.S. Shivakumar Swamy

Level 20 Eisenstein series identities and their combinatorial properties

Abstract. T. Huber, D. Schultz and D. Ye have obtained four Eisenstein series identities of level 20 and employed them to derive a new series for $\frac{1}{\pi}$. Motivated by this, in this article, nine new Eisenstein series identities of level 20 are presented and their combinatorial properties are given.

Keywords: theta function, modular equation, Eisenstein series.

G. Vinay

Dr. Ambedkar Institute of Technology,
Bengaluru, 560056 India,

e-mail: vinaytalakad@gmail.com

Siddaraju

Government First Grade College for Women,
Chamarajanagara, 571313 India,

e-mail: siddupalya73@gmail.com

C.S. Shivakumar Swamy

Government College for Women (Autonomous),
Mandya, 571401 India,

e-mail: cskswamy@gmail.com