

Д.Н. БАРОТОВ

ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ СВОЙСТВА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Аннотация. Данная статья посвящена формулировке и доказательству теорем о среднем значении полилинейной функции, аналогичных прямой и обратной теоремам гармонических функций о среднем значении. Доказано, что значение произвольной полилинейной функции $f_P(x)$ в центральной точке $\mathbb{G}$ — произвольного n -мерного координатного параллелепипеда равно среднему значению функции $f_P(x)$ по множеству k -мерных граней $\mathbb{G}$ для любого $k \in \{0, \dots, n\}$. На базе этого обосновано, что всего лишь один раз, вычислив значение полилинейного продолжения $f_P(x)$ произвольной булевой функции $f_B(x)$ в центральной точке n -мерного единичного куба, можно найти количество булевых векторов, на которых булева функция $f_B(x)$ принимает значение 1 и тем самым, в частности, определить выполнимость булевой функции $f_B(x)$. Также установлено, что такое свойство характерно только для полилинейных функций, т.е. доказано, что если для любого $\mathbb{G}$ — n -мерного координатного параллелепипеда и хотя бы для некоторого $k \in \{0, \dots, n\}$ значение непрерывной функции $f(x)$ в центральной точке $\mathbb{G}$ равно среднему значению функции $f(x)$ по множеству k -мерных граней $\mathbb{G}$, то функция $f(x)$ полилинейна.

Ключевые слова: полилинейная функция, свойство среднего значения, булева функция.

УДК: 517.572: 519.716

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-9-3-12

ВВЕДЕНИЕ

Система булевых уравнений является важным объектом в математике, компьютерных и прикладных науках, появляющаяся повсеместно в различных формах [1], [2]. В связи с этим развивается множество новых направлений исследования и алгоритмов решения систем булевых уравнений [3], [4]. Одно из направлений заключается в том, что система булевых уравнений трансформируется в систему уравнений над полем действительных чисел и решение ищется на множестве действительных чисел, поскольку в этой области известно множество методов и алгоритмов решения систем [5]. В свою очередь, трансформированная система может быть сведена либо к задаче численной оптимизации соответствующей целевой функции, что позволяет применять, анализировать и комбинировать такие методы вычислительной математики, как алгоритм наискорейшего спуска, метод Ньютона и алгоритм координатного спуска [6]–[8], либо к задаче MILP или QUBO, решаемой классическими алгоритмами дискретной оптимизации или квантовыми алгоритмами [9], [10], либо

к системе полиномиальных уравнений, решаемой на множестве целых чисел [4], либо к эквивалентной системе полиномиальных уравнений, решаемой и анализируемой символьными методами [11].

Имеется много способов, позволяющих трансформировать систему булевых уравнений в задачу непрерывной оптимизации, поскольку принципиальное отличие таких методов от “переборных” алгоритмов локального поиска состоит в том, что на каждой итерации алгоритма сдвиг по градиенту (антиградиенту) производится по всем переменным одновременно [12]. В [6]–[8], [13] продемонстрировано, что при решении систем булевых уравнений методом сведения их к задаче непрерывной оптимизации важную роль играют полилинейные функции, а именно, во-первых, в [6], [7] конструктивно доказано, что задача решения системы булевых уравнений сводится к задаче непрерывной минимизации полилинейной функции на $[0, 1]^n$, не имеющей строгих локальных минимумов внутри любой k -мерной грани куба $[0, 1]^n$, $k \in \{1, \dots, n\}$, и во-вторых, в [8], [13] конструктивно доказано, что задача решения произвольной системы булевых уравнений с единственным решением сводится к задаче минимизации полилинейной функции, позволяющей найти решение исходной булевой системы всего лишь один раз, вычислив ее градиент в любой внутренней точке куба $[0, 1]^n$. В [14] полилинейная функция, являющаяся продолжением булевой функции $f_B(x)$ на $[0, 1]^n$, оценена с обеих сторон выпуклой и вогнутой функциями, исследованными в [15]–[18], а именно, показано, что если $f_C(x)$, $f_{CC}(x)$ и $f_P(x)$ — любые выпуклое, вогнутое и полилинейное продолжения на $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x)$ соответственно, то $\forall x \in [0, 1]^n$ имеет место цепочка неравенств $f_C(x) \leq f_P(x) \leq f_{CC}(x)$. Также обосновано, что равенство в цепочке достигается тогда и только тогда, когда число существенных переменных булевой функции f_B не более одной и f_C — максимум среди всех выпуклых продолжений на $[0, 1]$ булевой функции f_B , а f_{CC} — минимум среди всех вогнутых продолжений на $[0, 1]$ булевой функции f_B . Поэтому в настоящее время исследование свойства полилинейных функций, безусловно, является актуальным.

В данной работе исследуется свойство среднего значения полилинейной функции, которое является аналогом обратимого свойства гармонической функции о среднем значении [19]. В результате исследования выясняется, что для полилинейных функций справедливо усиленное свойство среднего значения, а именно, доказываем, что значение произвольной полилинейной функции $f_P(x)$ в центральной точке n -мерного параллелепипеда вида $\mathbb{P}_c^d = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n]$ равно среднему значению функции $f_P(x)$ по множеству k -мерных граней $\mathbb{P}_c^d$ для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. На базе этого утверждается, что всего лишь один раз, вычислив значение $f_P(x)$ — полилинейного продолжения на $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x)$ в центральной точке куба $[0, 1]^n$, можно найти количество булевых векторов, на которых булева функция $f_B(x)$ принимает значение 1. Также устанавливается, что это свойство характерно только для полилинейных функций, а именно, доказываем, что если для любого n -мерного параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$ и хотя бы для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ значение непрерывной функции $f(x)$ в центральной точке $\mathbb{P}_c^d$ равно среднему значению функции $f(x)$ по множеству k -мерных граней $\mathbb{P}_c^d$, то функция $f(x)$ полилинейна.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\mathbb{K}^n = \prod_{i=1}^n [0, 1]$ — n -мерный единичный куб, $V(\mathbb{K}^n) = \prod_{i=1}^n \{0, 1\}$ — множество вершин куба $\mathbb{K}^n$.

Пусть $\mathbb{P}_c^d = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ — n -мерный параллелепипед (координатный параллелепипед), зависящий от $c = (c_1, \dots, c_n)$ и $d = (d_1, \dots, d_n)$, где $-\infty < c_i < d_i < +\infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $V(\mathbb{P}_c^d) = \prod_{i=1}^n \{c_i, d_i\}$ — множество вершин параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$.

Пусть $F_{(i_1, \dots, i_{n-k})}^k(\mathbb{K}^n) = \prod_{i=1}^n M_i$, где

$$M_i = \begin{cases} \{0, 1\}, & \text{если } i \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}; \\ [0, 1], & \text{если } i \notin \{i_1, \dots, i_{n-k}\}, \end{cases}$$

— совокупность k -мерных граней куба $\mathbb{K}^n$, полученная фиксацией граничных значений координат с индексами $i_1, \dots, i_{n-k}$, а также

$$F^k(\mathbb{K}^n) = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} F_{(i_1, \dots, i_{n-k})}^k(\mathbb{K}^n)$$

— множество всех k -мерных граней куба $\mathbb{K}^n$, где $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Пусть $F_{(i_1, \dots, i_{n-k})}^k(\mathbb{P}_c^d) = \prod_{i=1}^n M_i$, где

$$M_i = \begin{cases} \{c_i, d_i\}, & \text{если } i \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}; \\ [c_i, d_i], & \text{если } i \notin \{i_1, \dots, i_{n-k}\}, \end{cases}$$

— совокупность k -мерных граней параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$, полученная фиксацией граничных значений координат с индексами $i_1, \dots, i_{n-k}$, а также

$$F^k(\mathbb{P}_c^d) = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} F_{(i_1, \dots, i_{n-k})}^k(\mathbb{P}_c^d)$$

— множество всех k -мерных граней параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$, где $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Пусть $F^n(\mathbb{G}) = \mathbb{G}$, а также $\mu_k(F^k(\mathbb{G}))$ — k -мерный объем множества всех k -мерных граней множества $\mathbb{G}$, где $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{P}_c^d\}$ и $k \in \{1, \dots, n\}$.

Определение 1. Функцию вида $f_B : V(\mathbb{K}^n) \rightarrow \{0, 1\}$ назовем булевой функцией.

Определение 2. Функцию вида $f_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем полилинейной, если $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ и $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет место представление

$$f_P(x_1, \dots, x_n) = k_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i + b_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Определение 3. Функцию $f_P(x_1, \dots, x_n)$ назовем полилинейным продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$, если она полилинейна и выполнено равенство

$$f_P(b_1, \dots, b_n) = f_B(b_1, \dots, b_n) \quad \forall (b_1, \dots, b_n) \in V(\mathbb{K}^n).$$

2. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Начнем изложение с обоснования теоремы о том, что значение произвольной полилинейной функции $f_P(x)$ в центральной точке множества $\mathbb{G}$, где $\mathbb{G} \in \{\mathbb{K}^n, \mathbb{P}_c^d\}$, равно среднему значению этой функции $f_P(x)$ по $F^k(\mathbb{G})$ — множеству k -мерных граней множества $\mathbb{G}$ для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Для этого докажем, что справедлива

Теорема 1. Для любой полилинейной функции вида $f_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} f_P\left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d\right) &= \frac{1}{2^n} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) = \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \int_{F^k(\mathbb{P}_c^d)} f_P(x) dS_k = \\ &= \frac{1}{\mu_n(\mathbb{P}_c^d)} \int_{\mathbb{P}_c^d} f_P(x) dx \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что согласно ([13], теорема 4) полилинейную функцию $f_P(x)$ можно задать в явном виде

$$f_P(x) = \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right). \quad (2)$$

В силу (2) имеем

$$\begin{aligned} f_P\left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d\right) &= \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} \left(d_j - \frac{c_j + d_j}{2}\right) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} \left(\frac{c_j + d_j}{2} - c_j\right) \right) = \\ &= \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j - v_j}{2(d_j - c_j)} + \frac{v_j - c_j}{2(d_j - c_j)} \right) = \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v). \end{aligned}$$

Покажем, что выполнено равенство

$$\frac{1}{\mu_n(\mathbb{P}_c^d)} \int_{\mathbb{P}_c^d} f_P(x) dx = \frac{1}{2^n} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v).$$

Действительно, в силу $\mu_n(\mathbb{P}_c^d) = \prod_{j=1}^n (d_j - c_j)$ и (2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_n(\mathbb{P}_c^d)} \int_{\mathbb{P}_c^d} f_P(x) dx &= \frac{1}{\prod_{j=1}^n (d_j - c_j)} \int_{\mathbb{P}_c^d} f_P(x) dx = \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^n (d_j - c_j)} \int \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right) dx = \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^n (d_j - c_j)} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \int_{\mathbb{P}_c^d} \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right) dx = \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^n (d_j - c_j)} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \int_{c_j}^{d_j} \left(\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right) dx_j = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^n (d_j - c_j)} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j - v_j}{2} + \frac{v_j - c_j}{2} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v).$$

Осталось доказать, что $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ выполнено равенство

$$\frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \int_{F^k(\mathbb{P}_c^d)} f_P(x) dS_k = \frac{1}{2^n} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v).$$

Ввиду

$$\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d)) = 2^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \left\{ \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} (d_i - c_i) \right\}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \int_{F^k(\mathbb{P}_c^d)} f_P(x) dS_k = \\ &= \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \int_{F^k(\mathbb{P}_c^d)} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \prod_{j=1}^n \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right] dS_k = \\ &= \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \int_{F^k(\mathbb{P}_c^d)} \prod_{j=1}^n \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right] dS_k = \\ &= \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} \left\{ f_P(v) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \left[\int_{F_{(i_1, \dots, i_{n-k})}^k(\mathbb{P}_c^d)} \prod_{j=1}^n \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right] dS_k \right] \right\} = \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \times \\ & \quad \times \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \left\{ \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \frac{d_i - c_i}{2} \right\} = \\ &= \frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \left\{ \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} (d_i - c_i) \right\}}{2^k \mu_k(F^k(\mathbb{P}_c^d))} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v) = \frac{1}{2^n} \sum_{v \in V(\mathbb{P}_c^d)} f_P(v), \end{aligned}$$

так как верно

$$\begin{aligned} & \int_{F_{(i_1, \dots, i_{n-k})}^k(\mathbb{P}_c^d)} \prod_{j=1}^n \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right] dS_k = \\ &= \sum_{(z_{i_1}, \dots, z_{i_{n-k}}) \in \prod_{l=1}^{n-k} \{c_{i_l}, d_{i_l}\}} \left[\prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - z_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (z_j - c_j) \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \int_{c_j}^{d_j} \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - x_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (x_j - c_j) \right] dx_j = \\
& = \sum_{(z_{i_1}, \dots, z_{i_{n-k}}) \in \prod_{l=1}^{n-k} \{c_{i_l}, d_{i_l}\}} \left[\prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - z_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (z_j - c_j) \right] \times \right. \\
& \quad \times \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \frac{d_j - c_j}{2} \left. \right] = \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \frac{d_j - c_j}{2} \times \\
& \quad \times \sum_{(z_{i_1}, \dots, z_{i_{n-k}}) \in \prod_{l=1}^{n-k} \{c_{i_l}, d_{i_l}\}} \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \left[\frac{d_j - v_j}{(d_j - c_j)^2} (d_j - z_j) + \frac{v_j - c_j}{(d_j - c_j)^2} (z_j - c_j) \right] = \\
& = \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \frac{d_j - c_j}{2} \cdot 1 = \prod_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-k}\}} \frac{d_j - c_j}{2}.
\end{aligned}$$

Итак, цепочка равенств, определенная формулой (1), доказана. $\square$

Теперь приведем факт, который непосредственно следует из теоремы 1.

Следствие. Для произвольной полилинейной функции $f_P(x_1, \dots, x_n)$ и любого $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ имеет место цепочка равенств

$$f_P\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{b \in V(\mathbb{K}^n)} f_P(b) = \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{K}^n))} \int_{F^k(\mathbb{K}^n)} f_P(x) dS_k = \frac{1}{\mu_n(\mathbb{K}^n)} \int_{\mathbb{K}^n} f_P(x) dx.$$

Отметим утверждение, с одной стороны, непосредственно следующее из следствия, а с другой стороны, констатирующее, что, вычислив всего лишь один раз значение $f_P(x)$ — полилинейного продолжения на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x)$ в центральной точке куба $\mathbb{K}^n$, можно найти количество решений булева уравнения вида $f_B(x) = b$.

Замечание 1. Если $f_P(x)$ — полилинейное продолжение на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x)$, то $\forall b \in \{0, 1\}$ количество решений булева уравнения вида $f_B(x) = b$ равно

$$2^n(1-b) + 2^n(2b-1)f_P\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right).$$

Далее устанавливаем обращение теоремы 1, а именно докажем, что справедлива следующая обратная теорема.

Теорема 2. Если для непрерывной функции вида $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место цепочка равенств

$$f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{z \in V(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}})} f(z) = \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}}))} \int_{F^k(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}})} f(x) dS_k = \frac{1}{\mu_n(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}})} \int_{\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}}} f(x) dx \quad (3)$$

$\forall x^*, x^{**} (x^* < x^{**}) \in \mathbb{R}^n$ и $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, то функция $f(x)$ полилинейна.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Ввиду непрерывности функции $f(x)$ из (3) следует

$$\begin{aligned} & f\left(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \frac{1}{2}x_i^* + \frac{1}{2}x_i^{**}, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\right) = \\ &= \lim_{(x_1^{**}, \dots, x_{i-1}^{**}, x_{i+1}^{**}, \dots, x_n^{**}) \rightarrow (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)} f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) = \\ &= \lim_{(x_1^{**}, \dots, x_{i-1}^{**}, x_{i+1}^{**}, \dots, x_n^{**}) \rightarrow (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{z \in V(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}})} f(z)\right) = \\ &= \frac{1}{2}f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) + \frac{1}{2}f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^{**}, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \quad \forall x_i^*, x_i^{**} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ввиду непрерывности $f(x_1, \dots, x_n)$ по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$ имеем непрерывность функции

$$g(x_i) = f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

по переменной x_i . Тогда равенство (4) примет вид

$$g\left(\frac{1}{2}x_i^* + \frac{1}{2}x_i^{**}\right) = \frac{1}{2}g(x_i^*) + \frac{1}{2}g(x_i^{**}) \quad \forall x_i^*, x_i^{**} \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad g(0) = 0. \quad (5)$$

Полагая $x_i^{**} = 0$, $x_i^{**} = -x_i^*$ из (5) получим

$$g\left(\frac{1}{2}x_i^*\right) = \frac{1}{2}g(x_i^*) \quad \text{и} \quad g(-x_i^*) = -g(x_i^*) \quad \forall x_i^* \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

В силу (5), (6) имеем

$$g(x_i^*) + g(x_i^{**}) = 2g\left(\frac{1}{2}(x_i^* + x_i^{**})\right) = 2\frac{1}{2}g(x_i^* + x_i^{**}) = g(x_i^* + x_i^{**}) \quad \forall x_i^*, x_i^{**} \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

В силу нечетности функции $g(x_i)$ из (7) получим

$$g\left(\frac{m}{n}x_i^*\right) = \frac{m}{n}g(x_i^*) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x_i^* \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Теперь, опираясь на (8), находим значение функции $g(x_i)$ в произвольной фиксированной точке x_i^* . Известно,

$$\exists \left\{ \frac{m_k}{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{такая, что} \quad \frac{m_k}{n_k} \in \mathbb{Q} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_k}{n_k} = x_i^*.$$

Ввиду (8) имеем

$$g\left(\frac{m_k}{n_k}\right) = g\left(\frac{m_k}{n_k} \cdot 1\right) = \frac{m_k}{n_k}g(1) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

В силу непрерывности функции $g(x_i)$, переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$ в равенстве (9), получим

$$g(x_i^*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g\left(\frac{m_k}{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_k}{n_k}g(1) = g(1)x_i^*.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) = f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) + \\ & + (f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 1, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*))x_i^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Ввиду произвольности $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ из (10) имеем

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) +$$

$$+(f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n))x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (11)$$

Таким образом, с одной стороны, доказали, что при условии непрерывности функции $f(x)$ только первое равенство, стоящее слева в цепочке (3), влечет за собой (11), а с другой стороны, согласно теореме 1 для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (11), имеет место цепочка (3). $\square$

Замечание 2. Отметим, что в теореме 2 на функцию $f(x)$ можно наложить более слабое условие — условие локальной интегрируемости, так как в таком случае непрерывность $f(x)$ следует из цепочки равенств (3), приведенной в условии этой теоремы.

В конце изложения вполне уместно сформулировать и доказать теорему, содержание которой состоит в ослаблении условия теоремы 2, а именно, если для любого $\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}}$ — n -мерного координатного параллелепипеда и хотя бы для некоторого $k \in \{0, \dots, n\}$ значение непрерывной функции $f(x)$ в центральной точке $\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}}$ равно среднему значению функции $f(x)$ по множеству k -мерных граней $\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}}$, то функция $f(x)$ является полилинейной. Формулировка этой теоремы с учетом теоремы 2 имеет следующий вид.

Теорема 3. Если для непрерывной функции вида $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$ имеет место равенство

$$f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) = \frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}}))} \int_{F^k(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}})} f(x) dS_k \quad \forall x^*, x^{**} (x^* < x^{**}) \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

то функция $f(x)$ полилинейна.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$ и $x_1^{**} = x_1^* + \delta, \dots, x_{i-1}^{**} = x_{i-1}^* + \delta, x_{i+1}^{**} = x_{i+1}^* + \delta, \dots, x_n^{**} = x_n^* + \delta$. В силу непрерывности $f(x)$ и указанного выше определения $F^k(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}})$, переходя к одностороннему пределу при $\delta \rightarrow +0$ в равенстве (12) имеем

$$\begin{aligned} f\left(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \frac{1}{2}x_i^* + \frac{1}{2}x_i^{**}, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*\right) &= \lim_{\delta \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\mu_k(F^k(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}}))} \int_{F^k(\mathbb{P}_{x^*}^{x^{**}})} f(x) dS_k \right) = \frac{\int_{x_i^*}^{x_i^{**}} f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) dx_i}{x_i^{**} - x_i^*} \end{aligned} \quad (13)$$

$\forall x_i^*, x_i^{**} (x_i^* \neq x_i^{**}) \in \mathbb{R}$. В силу непрерывности $f(x_1, \dots, x_n)$ по совокупности переменных $x_1, \dots, x_n$ имеем непрерывность функции

$$g(x_i) = f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

по переменной x_i . Тогда равенство (13) примет вид

$$g\left(\frac{1}{2}x_i^* + \frac{1}{2}x_i^{**}\right) = \frac{\int_{x_i^*}^{x_i^{**}} g(x_i) dx_i}{x_i^{**} - x_i^*} \quad \forall x_i^*, x_i^{**} (x_i^* \neq x_i^{**}) \in \mathbb{R} \text{ и } g(0) = 0. \quad (14)$$

В силу непрерывности $g(x_i)$ заметим, что правая часть (14) дифференцируема по x_i^* при $x_i^* \neq x_i^{**}$ и, следовательно, левая часть (14) также дифференцируема по x_i^* . Умножая (14)

на $x_i^{**} - x_i^*$, дифференцируя по x_i^* , а затем полагая $x_i^{**} = -x_i^*$, имеем

$$-g(0) - g'(0)x_i^* = -g(x_i^*).$$

Отсюда в силу $g(0) = 0$

$$f(x_1^*, \dots, x_n^*) = f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)x_i^* + f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

В силу произвольности $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ из последнего равенства получим

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f'_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i + \\ &+ f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

□

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате изучения выяснено, что для полилинейных функций справедливо усиленное свойство среднего значения, а именно, доказано, что значение произвольной полилинейной функции $f_P(x)$ в центральной точке множества $\mathbb{P}_c^d$ равно не только средним значениям этой функции $f_P(x)$ по множеству $\mathbb{P}_c^d$ и по границе (по множеству $(n-1)$ -мерных граней) множества $\mathbb{P}_c^d$, но и среднему значению этой функции $f_P(x)$ по множеству k -мерных граней множества $\mathbb{P}_c^d$ для любого $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Также установлено обращение этого усиленного свойства среднего значения, а именно, доказано, что если для любого параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$ и хотя бы для некоторого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ значение непрерывной функции $f(x)$ в центральной точке $\mathbb{P}_c^d$ равно среднему значению функции $f(x)$ по множеству k -мерных граней $\mathbb{P}_c^d$, то функция $f(x)$ полилинейна.

При оптимальном нахождении полилинейного продолжения булевой функции полученный результат в ряде случаев может быть использован для определения выполнимости булевой функции, а также для нахождения числа решений булева уравнения.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за весьма полезные рекомендации и замечания, использование и исправление которых способствовало улучшению содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Brown F.M. *Boolean reasoning: the logic of Boolean equations* (Dover Publications, 2003).
- [2] Hammer P.L., Rudeanu S. *Boolean methods in operations research and related areas* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [3] Bard G.V. *Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis* (Univ. Maryland, College Park, 2007).
- [4] Abdel-Gawad A.H., Atiya A.F., Darwish N.M. *Solution of systems of Boolean equations via the integer domain*, Inform. Sci. **180** (2), 288–300 (2010), DOI: 10.1016/j.ins.2009.09.010.
- [5] Gu J., Gu Q., Du D. *On optimizing the satisfiability (SAT) problem*, J. Comput. Sci. Technology **14**, 1–17 (1999), DOI: 10.1007/BF02952482.
- [6] Barotov D., Osipov A., Korchagin S., Pleshakova E., Muzafarov D., Barotov R., Serdechnyy D. *Transformation Method for Solving System of Boolean Algebraic Equations*, Mathematics **9** (24), 3299 (2021), DOI: 10.3390/math9243299.
- [7] Barotov D.N., Barotov R.N. *Polylinear Transformation Method for Solving Systems of Logical Equations*, Mathematics **10** (6), 918 (2022), DOI: 10.3390/math10060918.
- [8] Barotov D.N. *Target Function without Local Minimum for Systems of Logical Equations with a Unique Solution*, Mathematics **10** (12), 2097 (2022), DOI: 10.3390/math10122097.
- [9] Pakhomchik A.I., Voloshinov V.V., Vinokur V.M., Lesovik G.B. *Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO penalties for cryptanalysis*, Algorithms **15** (2), 33 (2022), DOI: 10.3390/a15020033.

- [10] Burek E., Wroński M., Mańk K., Misztal M. *Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing*, IEEE Trans. Emerging Topics Comput. **10** (2), 678–689 (2022), DOI: 10.1109/TETC.2022.3143152.
- [11] Barotov D.N., Barotov R.N., Soloviev V., Feklin V., Muzafarov D., Ergashboev T., Egamov K. *The Development of Suitable Inequalities and Their Application to Systems of Logical Equations*, Mathematics **10** (11), 1851 (2022), DOI: 10.3390/math10111851.
- [12] Файзуллин Р.Т., Дулькейт В.И., Огородников Ю.Ю. *Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации*, Тр. ИММ УрО РАН **19** (2), 285–294 (2013).
- [13] Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. *Полилинейные продолжения некоторых дискретных функций и алгоритм их нахождения*, Вычисл. методы и программирование **24** (1), 10–23 (2023), DOI: 10.26089/NumMet.v24r102.
- [14] Баротов Д.Н., Судаков В.А. *О неравенствах между выпуклыми, вогнутыми и полилинейными продолжениями булевых функций*, Преп. Ин-та прикл. матем. им. МВ Келдыша РАН (30), 1–13 (2024), DOI: 10.20948/prepr-2024-30.
- [15] Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. *Конструирование гладких выпуклых продолжений булевых функций*, Вестн. российск. ун-тов. Матем. **29** (145), 20–28 (2024), DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-20-28.
- [16] Баротов Д.Н. *Выпуклое продолжение булевой функции и его приложения*, Дискретный анализ и исследов. операций **31** (1), 5–18 (2024), DOI: 10.33048/daio.2024.31.779.
- [17] Баротов Д.Н. *О существовании и свойствах выпуклых продолжений булевых функций*, Матем. заметки **115** (4), 533–551 (2024), DOI: 10.4213/mzm14105.
- [18] Баротов Д.Н. *Вогнутые продолжения булевых функций и некоторые из свойства и приложения*, Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Матем. **49**, 105–123 (2024) (принята к печати), DOI: 10.26516/1997-7670.2024.49.105.
- [19] Курант Р. *Уравнения с частными производными* (Мир, М., 1964).

Достонжон Нумонжонович Баротов

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Ленинградский просп., д. 49, г. Москва, 125167, Россия,

e-mail: DNBarotov@fa.ru

D.N. Barotov

Direct and inverse mean value properties for polylinear functions and their application

Abstract. This paper is devoted to the formulation and proof of the theorems on the mean value of a polylinear function, similar to the direct and inverse theorems on the mean value of harmonic functions. It is proved that the value of an arbitrary polylinear function $f_P(x)$ at the central point of $\mathbb{G}$ —an arbitrary n -dimensional coordinate parallelepiped—is equal to the mean value of the function $f_P(x)$ over the set of k -dimensional faces $\mathbb{G}$ for any $k \in \{0, \dots, n\}$. Based on this, it is justified that just once, by calculating the value of the polylinear continuation $f_P(x)$ of an arbitrary Boolean function $f_B(x)$ at the central point of an n -dimensional unit cube, one can find the number of Boolean vectors on which the Boolean function $f_B(x)$ takes the value 1 and thereby, in particular, determine the satisfiability of the Boolean function $f_B(x)$. It has also been established that such a property is characteristic only of polylinear functions, i.e., it has been proven that if for any $\mathbb{G}$ — n -dimensional coordinate parallelepiped and at least for some number $k \in \{0, \dots, n\}$, the value of the continuous function $f(x)$ at the central point $\mathbb{G}$ is equal to the mean value of the function $f(x)$ over the set of k -dimensional faces of $\mathbb{G}$, then the function $f(x)$ is polylinear.

Keywords: polylinear function, mean value property, Boolean function.

Dostonjon Numonjonovich Barotov

Financial University under the Government of the Russian Federation,
49 Leningradsky Ave., Moscow, 125167 Russia,

e-mail: DNBarotov@fa.ru