

Краткое сообщение, представленное Ф.Г. Авхадиевым

П.Л. ШАБАЛИН, А.М. ГАЗИЗОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ

Аннотация. В данной работе изучается неоднородная краевая задача Гильберта в полуплоскости с конечным индексом для одного обобщенного уравнения Коши–Римана с сильной особенностью коэффициента. Выведена формула решения этого уравнения и проведено исследование разрешимости задачи Гильберта для аналитических функций с бесконечным индексом и двумя точками завихрения степенного и логарифмического порядков. На этой базе изучается разрешимость краевой задачи Гильберта для обобщенных аналитических функций.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, обобщенная аналитическая функция, бесконечный индекс, целая функция.

УДК: 517.54

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-8-92-98

ВВЕДЕНИЕ

Теория обобщенных систем Коши–Римана $\partial_{\bar{z}}U + A(z)U + B(z)\bar{U} = F(z)$, $z \in D$, с коэффициентами из L^p $p > 2$, и краевых задач для них изложена в монографии [1]. О ее применении к прикладным задачам теории поверхностей, теории оболочек см. (например, в [1], [2]), к нелинейным задачам равновесия тонких упругих оболочек — [3], [4]. Методам решения системы, коэффициенты которой на некоторой линии L обращаются в бесконечность первого порядка (L — сингулярная линия) или степенного порядка выше первого (L — сверхсингулярная линия), и краевым задачам для ее решений посвящены работы (например, [5]–[10] и др). Следует отметить, что в этих работах, как правило, рассматривались постановки задач, приводящие к краевым задачам теории аналитических функций с конечным индексом. Исключение составляют статьи [7], [10], где допускаются ситуации, когда краевая задача для обобщенных аналитических функций с конечным индексом редуцируется к аналогичной задаче для аналитических функций, но с бесконечным индексом. Другие случаи, приводящие к бесконечному индексу в процессе решения краевой задачи Гильберта, рассмотрены в следующих работах. Краевая задача Гильберта в полуплоскости для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией решена в работе [11], со сверхсингулярной точкой — в [12], с сингулярной точкой — в [13].

Мы рассмотрим верхнюю полуплоскость $E = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, вещественную ось $\Gamma = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ и мнимую полуось $L = \{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. В области E рассмотрим частный

случай обобщенной системы Коши–Римана

$$\partial_{\bar{z}}U(z) - A(z)U(z) = F(z), \quad A(z) = \frac{(\bar{z} + z)a(z)}{|\bar{z} + z|^{\alpha+1}}, \quad z \in E, \quad (1)$$

где $a(z), F(z) \in C(\bar{\mathbb{C}} \setminus L)$, $1 < \alpha < 2$.

Под обобщенным решением уравнения (1) будем понимать функцию $U(z) \in C(\bar{E} \setminus L)$, имеющую первую обобщенную производную по $\bar{z}$ класса $L^{p,q}(K)$, $1 < q < 2 < p$, в каждом компакте $K \subset E \setminus L$ и удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду. Для таких решений $U(z)$ этой системы исследуем задачу Гильберта с краевым условием на Γ и непрерывными коэффициентом и правой частью.

1. РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Следуя [9], будем предполагать, что для $A(z)$ существует такая аналитическая в E , ограниченная в $\bar{E}$ функция $a_0(z)$, что

$$A_0(z) := \frac{(\bar{z} + z)[a(z) - a_0(z)]}{|\bar{z} + z|^{\alpha+1}} \in L^{p,q}(E), \quad 1 < q < 2 < p, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (2)$$

Кроме того, на функцию $a_0(z)$ налагаем следующие ограничения:

$$|a_0(z) - a_0(-\bar{z})| \leq K(|z + \bar{z}|^\beta), \quad x \rightarrow 0, \quad y \neq 0, \quad \alpha - 1 < \beta < 1, \quad K > 0, \quad (3)$$

$$a_0(z)|z|^{1-\alpha} = O(|z|^{-\gamma}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad y \neq 0, \quad \gamma > 0, \quad (4)$$

границные значения функции $a_0(z)$, т.е. функцию $a_0(x)$ будем считать непрерывной по Гёльдеру на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, причем существуют пока произвольные комплекснозначные односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} a_0(x) = b^\pm, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0(x)x^{1-\alpha} = c^\pm. \quad (5)$$

Выведем формулу общего решения уравнения (1) в области E . Обозначим

$$\gamma_\varepsilon^+ = \left\{ z = \frac{1}{\varepsilon} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos \varepsilon^2 \right\},$$

ε — малое положительное число, и рассмотрим области $E_\varepsilon^\pm = E \cap \{z : \pm \operatorname{Re} z > \varepsilon, |z| < 1/\varepsilon\}$. Теперь введем открытое множество $E_\varepsilon = E_\varepsilon^+ \cup E_\varepsilon^-$. Граница области E_ε^+ состоит из отрезка вещественной оси Γ_ε^+ , вертикального отрезка $L_\varepsilon^+ = \left\{ z : z = \varepsilon + iy, \quad 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{1-\varepsilon^4}}{\varepsilon} \right\}$ и дуги γ_ε^+ . Аналогичные обозначения введем для участков границы E_ε^- .

Обозначим символом $T_\varepsilon A$ интегральный оператор Векуа по объединению областей E_ε . Нам нужно убедиться, что $(T_\varepsilon A)(z)$, $z \in K$, равномерно сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к пределу $\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon A)(z)$, $z \in K$, на любом компакте K , $K \in E^- \cup E^+$, где $E^\pm = E \cap \{z : \pm \operatorname{Re} z > 0\}$. Следуя [9], представим $T_\varepsilon A$ в виде

$$(T_\varepsilon A)(z) = (T_\varepsilon a_0)(z) - I_\varepsilon(z), \quad I_\varepsilon(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{E_{\varepsilon,\delta}} \frac{(\bar{\zeta} + \zeta)a_0(\zeta)}{|\bar{\zeta} + \zeta|^{\alpha+1}} \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

где $E_{\varepsilon, \delta} = E_{\varepsilon} \cap \{|\zeta - z| \geq \delta\}$. Правую часть равенства преобразуем по формуле Грина и перейдем к пределу по $\delta \rightarrow 0$. Получим

$$I_{\varepsilon}(z) = -\frac{1}{2\pi(\alpha-1)i} \left(\int_{\partial E_{\varepsilon}^{+}} + \int_{\partial E_{\varepsilon}^{-}} \right) \frac{a_0(t)dt}{|t + \bar{t}|^{\alpha-1}(t-z)} + \frac{a_0(z)}{(\alpha-1)|z + \bar{z}|^{\alpha-1}}. \quad (6)$$

Пусть $z = x + iy$ — фиксированная точка из компакта K и $z \in E_{\varepsilon}^{+}$. Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $|z| < 1/\varepsilon$, $\operatorname{Re} z > \varepsilon$. Оценим входящие в правую часть формулы (6) криволинейные интегралы. Для интегралов по дугам окружностей γ_{ε}^{+} , γ_{ε}^{-} , учтя условие (4), выводим следующее асимптотическое равенство:

$$\left(\int_{\gamma_{\varepsilon}^{+}} + \int_{\gamma_{\varepsilon}^{-}} \right) \frac{a_0(t)}{|t + \bar{t}|^{\alpha-1}(t-z)} dt = O(\varepsilon^{\gamma-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7)$$

Для интегралов по отрезкам L_{ε}^{+} , L_{ε}^{-} , учитывая ограниченность функции $a_0(z)$ в $\bar{E}$ и условие (3), получим асимптотическую оценку

$$\left(\int_{L_{\varepsilon}^{-}} + \int_{L_{\varepsilon}^{+}} \right) \frac{a_0(t)dt}{|t + \bar{t}|^{\alpha-1}(t-z)} = O\left(\varepsilon^{1+\beta-\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad z \in K, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

В равенстве (6), принимая во внимание оценки (7), (8), переходим к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном $z \in K$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon}(z) = -\frac{1}{2\pi(\alpha-1)i} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{a_0(t)dt}{|t + \bar{t}|^{\alpha-1}(t-z)} + \frac{a_0(z)}{(\alpha-1)|z + \bar{z}|^{\alpha-1}}.$$

Мы имеем следующие асимптотические формулы для сингулярного интеграла типа Коши ([14], с. 73; см. также [15], с. 67):

$$\frac{1}{2\pi(\alpha-1)i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_0(t)dt}{|t + \bar{t}|^{\alpha-1}(t-z)} = \frac{-i(e^{i\pi\alpha}b^{+} + b^{-})}{2^{\alpha}(\alpha-1)\sin(\pi\alpha)z^{\alpha-1}} + O(1), \quad z \rightarrow 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2\pi(\alpha-1)i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_0(t)dt}{|t + \bar{t}|^{\alpha-1}(t-z)} = \frac{c^{+} - c^{-}}{2^{\alpha}\pi(\alpha-1)i} \ln \frac{1}{z} + O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Регулярные слагаемые в правой части равенств (9), (10) представляют собой аналитические в E функции [15], удовлетворяющие на вещественной оси условию Гёльдера с показателем $\beta - \alpha + 1$.

Итак, мы доказали, что при условиях (2)–(4) функция $I_{\varepsilon}(z)$ равномерно сходится на компакте к пределу (7), следовательно, функция $\Omega(z)$ существует и удовлетворяет на K уравнению $\partial_{\bar{z}}\Omega(z) = A(z)$. Тогда [9] обобщенное решение уравнения (1) в области E в классе функций с ограниченным произведением $Ue^{-\Omega}$ задается формулами

$$U(z) = e^{\Omega(z)} [(T(e^{-\Omega}F))(z) + \phi(z)], \quad (11)$$

$$\Omega(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{2\pi(\alpha-1)i} \int_{\Gamma} \frac{a_0(t)}{|t + \bar{t}|^{\alpha-1}(t-z)} dt + \frac{a_0(z)}{(\alpha-1)|z + \bar{z}|^{\alpha-1}}, \quad (12)$$

интегральный оператор Векуа $(TA_0)(z)$ действует [1] из $L^{p,q}(E)$, $p > 2$, $1 < q < 2$, в класс Гёльдера $H(\bar{E})$, $\phi^\pm(z)$ — произвольная аналитическая в области E функция. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть коэффициент $A(z)$ уравнения (1) удовлетворяет условиям (2)–(5) и $e^{-\Omega(z)}f(z) \in L^p(E) \cap L^{p'}(E)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$, где $\Omega(z)$ — функция (12). Тогда обобщенное решение уравнения (1) в классе функций с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$ может быть представлено формулой (11), в которой $\phi(z)$ — произвольная аналитическая в E функция.

2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА

Для функции $U(z)$, удовлетворяющей уравнению (2) в E , рассмотрим задачу Гильберта в верхней полуплоскости с краевым условием на вещественной оси

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha(t)} U(t) \right] = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (13)$$

непрерывными по Гёльдеру всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, коэффициентом $e^{-i\alpha(t)}$ и правой частью $f(t)$. Привлекая формулу (11), перепишем краевое условие (13) в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha^*(t)} \phi(t) \right] &= f^*(t), \quad t \in \Gamma, \quad t \neq 0, \quad \alpha^*(t) = \alpha(t) - \operatorname{Im} \Omega(t), \\ f^*(t) &= f(t)e^{-\operatorname{Re} \Omega(t)} - \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha^*(t)} (T(e^{-\Omega}F))(t) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно результатам Н.И. Мусхелишвили ([14], с. 73) для краевых значений функции (9) получим асимптотические формулы

$$\Omega(t) = \begin{cases} i \frac{c^-}{2\alpha\pi(\alpha-1)} \ln |t| + O(1), & t \rightarrow -\infty; \\ \frac{1}{|t|^{\alpha-1}} \left[\frac{b^-}{(\alpha-1)2^{\alpha-1}} + i \frac{b^- \cos(\pi\alpha) + b^+}{(\alpha-1)2^\alpha \sin(\pi\alpha)} \right] + O(1), & t \rightarrow 0-; \\ \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left[\frac{b^+}{(\alpha-1)2^{\alpha-1}} - i \frac{b^+ \cos(\pi\alpha) + b^-}{(\alpha-1)2^\alpha \sin(\pi\alpha)} \right] + O(1), & t \rightarrow 0+; \\ -i \frac{c^+}{2\alpha\pi(\alpha-1)} \ln t + O(1), & t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (15)$$

Обозначив $\nu^\pm = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} |t|^{\alpha-1} \operatorname{Im} \Omega(t)$, $\mu^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Im} \Omega(t) / \ln |t|$, формулу для $\alpha^*(t)$ с учетом (14), (15) запишем в виде

$$\alpha^*(t) = \varphi(t) + \nu(t) + \mu(t), \quad \mu(t) = \begin{cases} \mu^- \ln |t|, & t < -1; \\ 0, & -1 \leq t \leq 1; \\ \mu^+ \ln t, & t > 1, \end{cases} \quad \nu(t) = \begin{cases} \frac{\nu^-}{|t|^{\alpha-1}}, & t < 0; \\ \frac{\nu^+}{t^{\alpha-1}}, & 0 < t, \end{cases}$$

$\varphi(t) \in H_\Gamma$. Таким образом, краевую задачу (13) для обобщенных аналитических функций с конечным индексом сводим к краевой задаче Гильберта (14) для аналитических функций с бесконечным индексом и двумя точками завихрения: степенного порядка в начале координат и логарифмического порядка в бесконечно удаленной точке. Неоднородная задача Гильберта теории аналитических функций с конечным числом точек завихрения степенного

порядка исследована в [16], задача с конечным числом точек завихрения логарифмического порядка исследована в работе [17]. Очевидно, что задача Гильберта (13) разрешима, если и только если разрешима задача Гильберта (14), причем решение задачи (13) определится по формуле (11), в которую вместо произвольной аналитической функции следует поставить общее решение задачи Гильберта (14). При этом неоднородная задача Гильберта для аналитических функций разрешима, если разрешима соответствующая ей однородная задача, а однородная задача [16] с двумя точками завихрения разрешима, если и только если разрешимы обе задачи Гильберта:

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i(\varphi_1(t)+\nu(t))} \phi(t) \right] = 0, \quad \varphi_1(t) \in H_\Gamma, \quad (16)$$

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i(\varphi_2(t)+\mu(t))} \phi(t) \right] = 0, \quad \varphi_2(t) \in H_\Gamma, \quad (17)$$

с одной точкой завихрения каждая. Общее решение однородной задачи Гильберта с двумя точками завихрения (в нуле и в бесконечности) можно получить [16] как произведение формулы общего решения задачи Гильберта с бесконечным индексом, точкой завихрения в нуле (17) и формулы общего решения задачи Гильберта (16). Указанные формулы можно посмотреть в работах [16], [17]. Ниже приведем условия разрешимости однородных задач (16), (17) для аналитических функций.

Теорема 2. Пусть $\alpha < 3/2$. Тогда однородная краевая задача в классе ограниченных аналитических функций

- а) не имеет нетривиальных ограниченных решений, если $-\nu^- \cos(\pi\alpha) - \nu^+ < 0$ либо $\nu^- + \nu^+ \cos(\pi\alpha) < 0$;
- б) имеет бесконечное множество решений, если $\nu^- \cos(\pi\alpha) - \nu^+ > 0$, $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\alpha) > 0$.

Теорема 3. Пусть $3/2 \leq \alpha < 2$. Тогда

- а) если $\nu^- < 0$ либо $\nu^+ > 0$, то однородная краевая задача (16) не имеет нетривиальных ограниченных в E^+ решений;
- б) если $\nu^- \geq 0$, $\nu^+ \leq 0$, то однородная краевая задача (16) имеет бесконечное множество ограниченных решений.

Теорема 4. Если $\mu^+ - \mu^- \geq 0$, то задача (17) в классе ограниченных аналитических функций имеет бесконечное множество решений, если $\mu^+ - \mu^- < 0$, то задача (17) не имеет нетривиальных решений.

Таким образом, если условия теорем 2 или 3 и теорема 4 выполнены, то неоднородная краевая задача Гильберта (13) разрешима в классе обобщенных решений уравнения (1) с ограниченным произведением $Ue^{-\Omega}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).
- [2] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).
- [3] Timergaliev S.N. *Solvability of nonlinear equilibrium problems for Timoshenko-type shallow shells in curvilinear coordinates*, Lobachevskii J. Math. **44** (12), 5469–5484 (2023).
- [4] Timergaliev S.N., Uglov A.N. *Application of Riemann-Hilbert problem solutions to a study of nonlinear boundary value problems for Timoshenko type inhomogeneous shells with free edges*, Lobachevskii J. Math. **39** (6), 855–865 (2018).
- [5] Раджабов Н.Р. *Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями*. Ч. 1 (Душанбе, 1980).

- [6] Раджабов Н.Р. *Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями*. Ч. 2 (Душанбе, 1982).
- [7] Раджабов Н.Р. *Интегральные представления и граничные задачи для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией*, ДАН СССР **267** (2), 300–305 (1982).
- [8] Meziani A. *Representation of solutions of a singular CR equation in the plane*, Complex Var. and Elliptic. Equat. **53**, 1111–1130 (2008).
- [9] Солдатов А.П., Расулов А.Б. *Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами*, Дифференц. уравнения **52** (5), 637–650 (2016).
- [10] Расулов А.Б. *Задача Римана на полукружности для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией*, Дифференц. уравнения **40** (9), 1990–1992 (2004).
- [11] Шабалин П.Л. *Краевая задача Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с сингулярной линией*, Матем. физика и компьютерное моделирование **25** (4), 15–28 (2023), DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.2.
- [12] Shabalin P.L., Khasanova E.N. *The Hilbert Problem in a Half-plane for Generalized Analytic Functions with a Super-singular Point on the Contour of the Boundary Condition*, Lobachevskii J. Math. **44** (12), 5398–5405 (2023).
- [13] Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. *Задача Гильберта в полуплоскости для обобщенных аналитических функций с сингулярной точкой на вещественной оси*, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **166** (1), 111–122 (2024).
- [14] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).
- [15] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).
- [16] Fatykhov A.K., Shabalin P.L. *Inhomogeneous Hilbert Boundary-Value Problem with a Finite Number of Second-Type Singularity Points*, J. Math. Sci. (United States) **252** (3), 436–444 (2021).
- [17] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Однородная задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и логарифмической особенностью индекса*, Изв. вузов. Матем. (12), 78–83 (2013).

Павел Леонидович Шабалин

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,
e-mail: pavel.shabalin@mail.ru

Айназ Муллагулов Гизизов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: gazizovaynaz@mail.ru

P.L. Shabalin and A.M. Gazizov

The Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions with a supersingular line

Abstract. This paper studies the nonhomogeneous Hilbert boundary value problem in the half-plane with a finite index for a single generalized Cauchy–Riemann equation with a strong singularity in the coefficient. A formula for the solution of this equation is derived, and the solvability of the Hilbert problem for analytic functions with an infinite index and two vortex points of power and logarithmic orders is investigated. Based on this, the solvability of the Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions is studied.

Keywords: Hilbert boundary value problem, generalized analytic function, infinite index, entire function.

Pavel Leonidovich Shabalin

Kazan State University of Architecture and Engineering,
1 Zelenaya str., Kazan, 420032 Russia,
e-mail: pavel.shabalin@mail.ru

Aynaz Mullanurovich Gazizov

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: `gazizovaynaz@mail.ru`