

В.Б. ШАХМУРОВ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ АБСТРАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СТОКСА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Коши для стационарного и нестационарного нелокального несжимаемого абстрактного уравнения Стокса. Уравнение содержит сверточный член и абстрактный оператор в банаховом пространстве E . В пространствах L^p получены утверждения о существовании, единственности и коэрцитивных оценках. Путем выбора пространства E и линейного оператора A , которые встречаются в широком классе физических систем, можно получать различные классы уравнений Стокса. В качестве приложения полученных результатов установлены свойства существования, единственности и максимальной L^p -регулярности решений начальных задач для нелокальных вырожденных уравнений Стокса и нелокальных уравнений Стокса с разрывными коэффициентами.

Ключевые слова: система Стокса, эллиптическое уравнение, параболическое уравнение, полугруппа операторов, краевая задача, абстрактное дифференциальное уравнение, максимальная L^p -регулярность.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-8-69-83

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши для нелокального уравнения Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - b * \Delta u + Au + \nabla \varphi &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u(x, 0) = a(x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где A — линейный оператор в банаховом пространстве E , $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$ — E -значная вектор-функция решения, $\varphi = \varphi(x, t)$ — E -значное неизвестное давление,

$$f = (f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_n(x, t)), \quad a = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$$

— заданные E -значная вектор-функция неоднородности и начальные значения соответственно, кроме того,

$$b = b(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)), \quad b * u = (b_1 * u_1, b_2 * u_2, \dots, b_n * u_n),$$

где $b_i * u_i$ обозначает свертку функций b_i, u_i , заданную формулой

$$b_i * u_i = \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) u_i(x - y, t) dy$$

для достаточно гладких комплекснозначной функции b_i и E -значной функции $u_i(x, t)$.

Эта задача характеризуется наличием абстрактного оператора A и сверточного члена $b * \Delta u$. В статье установлена корректность постановки задачи (1.1) в E -значном пространстве L^p . Если $E = \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел, а A — положительная константа c , то задача (1.1) сводится к следующей нелокальной задаче типа Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - b * \Delta u + cu + \nabla \varphi &= f(x, t), \quad \operatorname{div} u = 0, \\ u(x, 0) &= a(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Отметим, что существование слабых или сильных решений и свойства регулярности для классических задач Стокса были подробно изучены, например, в работах [1]–[11]. Существует множество монографий по разрешимости задач Коши для уравнений Стокса (см., например, [12]–[14] и др. статьи, приведенные там).

Прежде всего рассмотрим следующее нелокальное абстрактное дифференциальное уравнение на всем пространстве:

$$-\sum_{k=1}^n b_k * \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + (A + \lambda)u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

где A — линейный оператор в банаховом пространстве E , $b = b(x)$ — комплекснозначная функция, а λ — комплексный параметр. В работе устанавливаются свойства равномерной максимальной регулярности задачи (1.2), т. е. доказывается, что для всех $f \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n; E)$ и $\lambda \in S_\psi$ задача (1.2) имеет единственное решение $u \in W^{2+m,q}(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ и выполняется коэрцитивная равномерная оценка

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{m+2}} \left\| b_k * \frac{\partial^i u}{\partial x_k^i} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n; E)} + \|Au\|_{L^q(\mathbb{R}^n; E)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n; E)}, \quad (1.3)$$

где константа C зависит только от A и E .

Оценка (1.3) позволяет исследовать существование решения и свойства регулярности соответствующей задачи Стокса

$$-b * \Delta u + Au + \nabla \varphi = f(x), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

где $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, $\varphi = \varphi(x)$ и $u = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$.

Путем применения соответствующего проекционного преобразования P задача (1.4) может быть сведена к уравнению

$$-Pb * \Delta u + Au = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Пусть $L_\sigma^q(\mathbb{R}^n; E)$ обозначает E -значное соленоидальное пространство. В $L_\sigma^q(\mathbb{R}^n; E)$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} D(O_q) &= (W_\sigma^{2,q}(\mathbb{R}^n; E(A), E))^n = \{u \in (W^{2,q}(\mathbb{R}^n; E(A), E))^n, \operatorname{div} u = 0\}, \\ O_q u &= -Pb * \Delta u + Au, \end{aligned}$$

где O_q — нелокальный оператор Стокса, порожденный задачей (1.5). В работе доказывается, что O_q — секториальный оператор в $\mathbb{X}_q = (L^q(\mathbb{R}^n; E))^n$, являющийся также генератором аналитической полугруппы в $\mathbb{X}_q$. Рассмотрим теперь задачу Коши для нестационарного нелокального уравнения Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b * \Delta u + Au + \nabla \varphi = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u(x, 0) = a.$$

В работе доказывается корректность постановки задачи (1.6) в пространстве $L^p(0, T; \mathbb{X}_q)$.

Различные классы нелокальных уравнений Стокса могут быть получены путем задания конкретного пространства E и подходящего оператора A , которые возникают в приложениях. В качестве первого примера рассматривается $E = L^{p_1}(0, 1)$, а в качестве $A = A_1$ — вырожденный дифференциальный оператор в $L^{p_1}(0, 1)$ с нелокальными граничными условиями

$$D(A_1) = \left\{ u \in W_{\gamma}^{[2], p_1}(0, 1), \alpha_k u^{[\nu_k]}(0) + \beta_k u^{[\nu_k]}(1) = 0, k = 1, 2 \right\}, \quad (1.7)$$

$$A_1 u = a_1(y) u^{[2]} + a_2(y) u^{[1]}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in (0, 1), \quad \nu_k \in \{0, 1\},$$

где $u^{[i]} = \left(y^{\gamma} \frac{d}{dy} \right)^i u$ для $0 \leq \gamma < 1 - \frac{1}{p}$, $a_1 = a_1(y)$ — непрерывная функция, $a_2 = a_2(y)$ — ограниченная функция на $[0, 1]$ для почти всех (п.в.) $x \in \mathbb{R}^n$, α_k, β_k — комплексные числа, а $W_{\gamma}^{[2], p_1}(0, 1)$ — взвешенное пространство Соболева, заданное формулой

$$W_{\gamma}^{[2], p_1}(0, 1) = \left\{ u : u \in L^{p_1}(0, 1), u^{[2]} \in L^{p_1}(0, 1) \right\},$$

$$\|u\|_{W_{\gamma}^{[2], p_1}} = \|u\|_{L^{p_1}} + \|u^{[2]}\|_{L^{p_1}} < \infty.$$

В работе устанавливается свойство максимальной $L^p(0, T; \mathbb{X}_{q, p_1})$ -регулярности нелокальной смешанной задачи для следующего нестационарного вырожденного сверточного уравнения Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b * \Delta_x u + a_1(y) D_y^{[2]} u + a_2(y) D_y^{[1]} u + \nabla \varphi = f(x, y, t), \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u(x, y, 0) = a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T),$$

$$\alpha_k u_y^{[\nu_k]}(x, 0, t) + \beta_k u_y^{[\nu_k]}(x, 1, t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1) \times (0, T), \quad u = u(x, y, t),$$

где $\mathbb{X}_{q, p_1} = (X_{q, p_1})^n$ и X_{q, p_1} — пространство со смешанной нормой, заданной формулой

$$\|f\|_{X_{q, p_1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 (|f(x, y, t)|^{p_1} dy)^{\frac{q}{p_1}} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (1.9)$$

В качестве второго примера возьмем $E = L^{p_1}(0, 1)$ и пусть $A = A_2$ — дифференциальный оператор в $L^{p_1}(0, 1)$ с коэффициентами из VMO-пространства (vanishing mean oscillation), определенный следующим образом:

$$D(A_2) = \left\{ u \in W^{2, p_1}(0, 1), \alpha_k u^{(\nu_k)}(0) + \beta_k u^{(\nu_k)}(1) = 0, k = 1, 2 \right\}, \quad (1.10)$$

$$A_2 u = a_1(y) u^{(2)} + a_2(y) u^{(1)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in (0, 1), \quad \nu_k \in \{0, 1\}.$$

Применив общие результаты, полученные здесь, мы исследуем $L^p(\Pi)$ -устойчивость задачи с начальными условиями для следующих нелокальных уравнений Стокса с коэффициентами из VMO:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b * \Delta_x u + a_1(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \nabla \varphi = f(x, y, t), \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u(x, y, 0) = a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T),$$

$$\alpha_k u_y^{(\nu_k)}(x, 0, t) + \beta_k u_y^{(\nu_k)}(x, 1, t) = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$(x, y, t) \in \Pi = \mathbb{R}^n \times (0, 1) \times (0, T), \quad u = u(x, y, t).$$

1.1. Обозначения и предварительные сведения. Пусть E — банахово пространство. Пространство Бохнера–Лебега $L^p(\Omega; E)$ — это пространство сильно измеримых функций со значениями в E , определенных на измеримом подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(\Omega; E)} = \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Банахово пространство E называется UMD-пространством (unconditional martingale differences), если оператор Гильберта

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

ограничен в $L^p(\mathbb{R}, E)$, $p \in (1, \infty)$ (см., например, [15], [16]). UMD-пространства включают, в частности, пространства L^p , l_p и пространства Лоренца L_{pq} , $p, q \in (1, \infty)$.

Пусть E_1 и E_2 — два банаховых пространства. Через $B(E_1, E_2)$ обозначим пространство ограниченных линейных операторов из E_1 в E_2 . В случае, когда $E_1 = E_2 = E$, будем писать $B(E)$. Пусть

$$S_\psi = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg \lambda| \leq \psi \cup \{0\}, 0 \leq \psi < \pi\}.$$

Замкнутый линейный оператор A называется ψ -секториальным (или секториальным) в банаховом пространстве E с оценкой $M > 0$, если $D(A)$ и $R(A)$ плотны в E , $N(A) = \{0\}$ и

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\|_{B(E)} \leq M |\lambda|^{-1}$$

для любого $\lambda \in S_\phi$, $0 \leq \phi < \pi$, где I — тождественный оператор в E , $D(A)$ и $R(A)$ обозначают соответственно область определения и область значений оператора A .

Известно ([17], §1.15.1), что существуют дробные степени A^θ секториального оператора A . Пусть $E(A^\theta)$ — пространство $D(A^\theta)$ с нормой

$$\|u\|_{E(A^\theta)} = \left(\|u\|^p + \|A^\theta u\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad 0 < \theta < \infty.$$

Через $\mathbb{N}$ обозначим множество всех натуральных чисел. Множество $G \subset B(E_1, E_2)$ называется R -ограниченным (см., например, [15], § 2), если существует положительная константа C такая, что для любых $T_1, T_2, \dots, T_m \in G$ и $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy,$$

где $\{r_j\}$ — последовательность независимых симметричных $\{-1, 1\}$ -значных случайных величин на Ω . Наименьшее число C , для которого выполняется вышеуказанная оценка, называется R -границей семейства G и обозначается через $R(G)$.

Множество $G_h \subset B(E_1, E_2)$, зависящее от параметра $h \in Q$, называется равномерно R -ограниченным по h , если существует константа C , не зависящая от $h \in Q$, такая, что для любых $T_1(h), T_2(h), \dots, T_m(h) \in G_h$ и $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j(h) u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy.$$

Отсюда следует $\sup_{h \in Q} R(G_h) \leq C$.

ψ -секториальный оператор A называется R -секториальным в банаховом пространстве E , если множество

$$L_A = \left\{ \xi (A + \xi)^{-1} : \xi \in S_\psi \right\}, \quad 0 \leq \psi < \pi,$$

является R -ограниченным.

Оператор $A(\xi)$ называется ψ -секториальным в E равномерно по ξ с оценкой $M > 0$, если $D(A(\xi))$ не зависит от ξ , $D(A(\xi))$ плотно в E и $\left\| (A(\xi) + \lambda)^{-1} \right\| \leq M(1 + |\lambda|)^{-1}$ для любого $\lambda \in S_\psi$, $0 \leq \psi < \pi$, где M не зависит от ξ и λ .

Пусть Ω — измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$ и m — положительное целое число. Рассмотрим E -значное пространство Соболева $W^{m,p}(\Omega; E)$, состоящее из всех функций $u \in L^p(\Omega; E)$, обладающих обобщенными производными $\frac{\partial^m u}{\partial x_k^m} \in L^p(\Omega; E)$, с нормой

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega; E)} = \|u\|_{L^p(\Omega; E)} + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x_k^m} \right\|_{L^p(\Omega; E)} < \infty.$$

Пусть E_0 и E — два банаховых пространства и E_0 непрерывно и плотно вкладывается в E . Положим

$$W^{m,p}(\Omega; E_0, E) = W^{m,p}(\Omega; E) \cap L^p(\Omega; E_0)$$

с нормой

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega; E_0, E)} = \|u\|_{L^p(\Omega; E_0)} + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x_k^m} \right\|_{L^p(\Omega; E)} < \infty.$$

При $n = 1$, $\Omega = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, пространство $W^{m,p}(\Omega; E_0, E)$ обозначим через $W^{m,p}(a, b; E_0, E)$. Если $E_0 = E$, то $W^{m,p}(\Omega; E_0, E) = W^{m,p}(\Omega; E)$.

ВМО-пространство (bounded mean oscillation) — это пространство всех комплекснозначных локально интегрируемых функций с нормой

$$\|f\|_* = \sup_B \int_B |f(x) - f_B| dx < \infty,$$

где B пробегает класс шаров в $\mathbb{R}^n$ и f_B — среднее $\frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$. Для $f \in \text{ВМО}$ и $r > 0$ положим

$$\eta(r) = \sup_{\rho \leq r} \int_B |f(x) - f_B|_E dx,$$

где B пробегает класс шаров с радиусом ρ .

Будем говорить, что функция $f \in \text{ВМО}$ (vanishing mean oscillation), если $f \in \text{ВМО}$ и $\lim_{r \rightarrow +0} \eta(r) = 0$. Функцию $\eta(r)$ будем называть ВМО-модулем функции f . Здесь $S(\mathbb{R}^n; E)$ обозначает класс Шварца со значениями в E , т. е. пространство всех E -значных быстро убывающих гладких функций на $\mathbb{R}^n$, снабженное обычной топологией, индуцированной полунормами. Пространство $S(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ обозначим просто через $S(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $S'(\mathbb{R}^n; E)$ пространство всех непрерывных линейных операторов из $S(\mathbb{R}^n)$ в E , снабженное топологией сходимости на ограниченных множествах (bounded convergence topology). Напомним, что $S(\mathbb{R}^n; E)$ плотно по норме в $L^p(\mathbb{R}^n; E)$ при $1 \leq p < \infty$.

Пусть F — преобразование Фурье, заданное следующим образом:

$$\hat{u}(\xi) = Fu = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx \text{ для } u \in S(\mathbb{R}^n; E) \text{ и } x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $H^{s,q}(\mathbb{R}^n; E)$, $-\infty < s < \infty$, — E -значное дробное пространство Соболева порядка s , т. е.

$$H^{s,q}(\mathbb{R}^n; E) = \left\{ u \in L^q(\mathbb{R}^n; E), \|u\|_{H^{s,q}(\mathbb{R}^n; E)} = \left\| F^{-1} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{\frac{s}{2}} Fu \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n; E)} < \infty \right\}.$$

Рассмотрим пространство

$$H^{s,q}(\mathbb{R}^n; E_0, E) = \left\{ u \in H^{s,q}(\mathbb{R}^n; E) \cap L^q(\mathbb{R}^n; E_0), \right. \\ \left. \|u\|_{H^{s,q}(\mathbb{R}^n; E_0, E)} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n; E_0)} + \|u\|_{H^{s,q}(\mathbb{R}^n; E)} < \infty \right\}.$$

Иногда это пространство называется пространством Соболева–Лионса.

Для $u, v > 0$ соотношения $u \lesssim v$, $u \approx v$ означают, что существуют положительные константы C, C_1, C_2 , не зависящие от u и v , такие, что

$$u \leq Cv, \quad C_1 v \leq u \leq C_2 v.$$

Один и тот же символ C будет использоваться для обозначения положительных констант, которые могут отличаться друг от друга даже в пределах одного и того же контекста. Если требуется указать зависимость такой константы от какого-либо параметра, например, α , будем писать C_α .

Из ([18], теорема A_0) получаем

Предложение A_1 . Пусть E — UMD-пространство, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$

и $1 < p \leq q \leq \infty$. Пусть также $\Psi_h \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; B(E))$ и существует положительная константа K такая, что

$$\sup_{h \in Q} R \left(\left\{ |\xi|^{|\beta|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} D^\beta \Psi_h(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \beta_k \in \{0, 1\} \right\} \right) \leq K.$$

Тогда Ψ_h — равномерно ограниченное семейство мультипликаторов Фурье из $L^p(\mathbb{R}^n; E)$ в $L^q(\mathbb{R}^n; E)$.

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Краевые задачи для абстрактных дифференциальных уравнений изучались, например, в [9], [12], [15], [18]–[23]. В этом разделе выводится свойство максимальной регулярности задачи (1.3).

Условие 2.1. Пусть E — UMD-пространство и A — R -секториальный оператор в E с $0 \leq \psi < \pi$. Предположим, что $b_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{b}_k \in C^{(m)}(\mathbb{R}^n)$, при этом

$$\sum_{k=1}^n \hat{b}_k(\xi) \xi_k^2 \in S_{\psi_1}, \quad |\xi|^{|\beta|} \left| D^\beta \hat{b}_k(\xi) \right| \leq C_0 \text{ для } k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$\psi_1 \in (0, \pi), \quad |\beta|, \quad m > 1 + \frac{n}{q}, \quad q \in (1, \infty) \text{ и для всех } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $X_q = L^q(\mathbb{R}^n; E)$ и $Y^{2,q} = W^{2,q}(\mathbb{R}^n; E(A), E)$.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполняется условие 2.1 и $q \in (1, \infty)$. Тогда для любых $f \in X_q$, $\lambda \in S_{\psi_1}$ и $\psi_1 + \psi \in (0, \pi)$ задача (1.2) имеет единственное решение u , принадлежащее $Y^{2,q}$, при этом выполняется следующая коэрцитивная равномерная оценка:*

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| b_k * \frac{\partial^i u}{\partial x_k^i} \right\|_{X_q} + \|Au\|_{X_q} \leq C \|f\|_{X_q}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (1.2). Применяя преобразование Фурье F , получаем

$$\Phi(A, \xi, \lambda) \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

где

$$\Phi = \Phi(A, \xi, \lambda) = A + \sum_{k=1}^n \hat{b}_k(\xi) \xi_k^2 + \lambda.$$

По предположению $\sum_{k=1}^n \hat{b}_k(\xi) \xi_k^2 \in S_{\psi_1}$, оператор Φ обладает ограниченным обратным в E для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in S_{\psi_1}$. Следовательно, наше уравнение имеет решение

$$\hat{u}(\xi) = \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f}(\xi),$$

т. е. существует решение $u(x)$ уравнения (1.4), выраженное в виде

$$u(x) = F^{-1} \left[\Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f}(\xi) \right]. \quad (2.4)$$

Докажем оценку (2.2). Действительно, ввиду (2.4) оценка (2.2) эквивалентна следующей:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| F^{-1} \xi_k^i \hat{b}_k(\xi) \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f}(\xi) \right\|_{X_q} + \left\| A \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f}(\xi) \right\|_{X_q} \lesssim \left\| F^{-1} \hat{f}(\xi) \right\|_{X_q}.$$

Для ее доказательства достаточно показать, что операторные функции

$$\eta_1(\xi, \lambda) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \xi_k^i \hat{b}_k(\xi) \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda), \quad \eta_2(\xi, \lambda) = A \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda)$$

являются X_q -мультипликаторами Фурье. Действительно, легко увидеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \eta_1(\xi, \lambda) &= - \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \xi_k^i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) = \\ &= \sum_{k=1, k \neq j}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \xi_k^i \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{b}_k(\xi) + 2\xi_j \right] \Phi^{-2}(A, \xi, \lambda) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left[i \xi_j^{i-1} \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) + \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{b}_k(\xi) + 2\xi_j \right] \Phi^{-2}(A, \xi, \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя резольвентные свойства оператора A , предположения о $\hat{b}(\xi)$ и формулы (2.5), получаем равномерные по λ оценки

$$|\xi_j| \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \eta_1(\xi, \lambda) \right\|_{B(E)} \leq C_1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда, дифференцируя операторные функции по другим переменным ξ_k аналогичным образом, получаем следующие равномерные оценки:

$$|\xi|^{|\alpha|} \|D^\alpha \eta_1(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq C_1, \quad |\xi|^{|\alpha|} \|D^\alpha \eta_2(\xi, \lambda)\|_{B(E)} \leq C_2$$

для $|\alpha| > \frac{n}{p}$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \{0, 1\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ и $\lambda \in S_{\psi_1}$.

Более того, в силу соотношения (2.5) и благодаря R -секториальности оператора A множества

$$\left\{ \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \eta_1(\xi, \lambda), \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\},$$

$$\left\{ \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \eta_2(\xi, \lambda), \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

являются R -ограниченными. Тогда в силу принципа сжатия Кахана и свойств произведения семейства R -ограниченных операторов (см., например, [15], лемма 3.5, предложение 3.4), имеем

$$\sup_{\lambda \in S_\psi} R \left\{ \xi^\alpha D^\alpha \eta_1(\xi, \lambda) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\alpha| > \frac{n}{p} \right\} \leq C_1, \quad (2.6)$$

$$\sup_{\lambda \in S_\psi} R \left\{ \xi^\alpha D^\alpha \eta_2(\xi, \lambda) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\alpha| > \frac{n}{p} \right\} \leq C_2.$$

Из предложения A₁ и соотношения (2.6) следует, что операторнозначные функции $\eta_1(\xi, \lambda)$ и $\eta_2(\xi, \lambda)$ являются мультипликаторами Фурье в пространстве X_q . Получили требуемое утверждение.

Рассмотрим дифференциальный оператор $Q = Q_q$ в X_q , порожденный задачей (1.2), т. е.

$$D(Q) = Y^{2,q}, \quad Qu = - \sum_{k=1}^n b_k * \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + Au.$$

Пусть $B_q = B(X_q)$. Из теоремы 2.1 следует

Результат 2.1. Для $\lambda \in S_\psi$ существует резольвента $(Q + \lambda)^{-1}$, удовлетворяющая равномерной оценке

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x_k^i} b_k * (Q + \lambda)^{-1} \right\|_{B_q} + \|A(Q + \lambda)^{-1}\|_{B_q} \leq C.$$

Следующий результат описывает гладкость задачи (1.4).

Теорема 2.2. Пусть выполняется условие 2.1 и m — положительное целое число, $q \in (1, \infty)$. Тогда для любого $f \in W^{m,q}(\mathbb{R}^n; E)$ и $\lambda \in S_\psi$ задача (2.1) имеет единственное решение u , принадлежащее пространству $Y^{2+m,q}$, причем выполняется коэрцитивная равномерная оценка

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m+2} |\lambda|^{1-\frac{i}{m+2}} \left\| b_k * \frac{\partial^i u}{\partial x_k^i} \right\|_{X_q} + \|Au\|_{X_q} \leq C \|f\|_{W^{m,q}(\mathbb{R}^n; E)}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Из приведенного выше выражения и соотношения (2.3) вытекает

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m+2} |\lambda|^{1-\frac{i}{m+2}} \left\| b_k * \frac{\partial^i u}{\partial x_k^i} \right\|_{X_q} + \|Au\|_{X_q} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m+2} |\lambda|^{1-\frac{i}{m+2}} \left\| F^{-1} \xi_k^i \hat{b}_k(\xi) \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f} \right\|_{X_q} + \left\| F^{-1} A \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f} \right\|_{X_q}.$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2.1, показываем, что операторные функции

$$\Psi_\lambda(\xi) = A \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \left(1 + \sum_{k=1}^n \hat{b}_k(\xi) \xi_k^m \right)^{-1},$$

$$\sigma_\lambda(\xi) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m+2} |\lambda|^{1-\frac{i}{m+2}} \xi_k^i \left(1 + \sum_{k=1}^n \hat{b}_k(\xi) \xi_k^m \right)^{-1} \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda)$$

являются равномерными мультипликаторами Фурье в X_q . Тогда из (2.7) следует требуемое утверждение.

3. НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА СТОКСА

В этом разделе выводятся свойства максимальной регулярности стационарной нелокальной абстрактной задачи Стокса (1.4). Обозначим $H^{m,q}(\mathbb{R}^n; E)$ через $H^{m,q}$. Известно, что если E — UMD-пространство, то $H^{m,q} = W^{m,q}(\mathbb{R}^n; E)$ также является UMD-пространством (см., например, [15], § 3). Обозначим через $\mathbb{X}_q = (X_q)^n$ класс E -значных систем функций $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{X}_q} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{X_q}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; E)$ обозначает множество всех бесконечно дифференцируемых E -значных конечных функций на $\mathbb{R}^n$. Кроме того, через $\mathbb{X}_{q\sigma} = L_\sigma^q(\mathbb{R}^n; E)$ обозначим E -значное соленоидальное пространство, т. е. замыкание множества $(C_{0\sigma}^\infty(\mathbb{R}^n; E))^n$ в пространстве $\mathbb{X}_q$, где

$$C_{0\sigma}^\infty(\mathbb{R}^n; E) = \{u \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n; E))^n, \operatorname{div} u = 0\}.$$

Пусть $\mathbb{X}_q^s = (H^{s,q})^n$ и $\mathbb{Y}^{s,q} = (Y^{s,q})^n$. Рассмотрим пространство

$$\mathbb{Y}_q = \left\{ u \in \mathbb{X}_q, \operatorname{div} u \in X_q, \|u\|_{\mathbb{Y}_q} = \left(\|u\|_{\mathbb{X}_q}^q + \|\operatorname{div} u\|_{X_q}^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Снабженное этой нормой пространство $\mathbb{Y}_q$ становится банаховым. Известно (см., например, [3]), что векторное поле $u \in (L^q(\mathbb{R}^n))^n$ имеет разложение Гельмгольца. В следующей теореме этот результат обобщается для E -значного функционального пространства X_q .

Теорема 3.1. *Предположим, что условие 2.1 выполнено и $q \in (1, \infty)$. Тогда $u \in \mathbb{X}_q$ имеет разложение Гельмгольца, т. е. существует ограниченный линейный проекционный оператор P_q из $\mathbb{X}_q$ на $\mathbb{X}_{q\sigma}$ с нулевым пространством*

$$N(P_q) = \{\nabla \varphi \in \mathbb{X}_q : \varphi \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; E)\}.$$

В частности, произвольный элемент $u \in \mathbb{X}_q$ имеет единственное разложение $u = u_0 + \nabla \varphi$, где $u_0 \in \mathbb{X}_{q\sigma}$, $u_0 = P_q u$, причем

$$\|\nabla \varphi\|_{L^q(B; E)} + \|u_0\|_{\mathbb{X}_q} \leq C \|u\|_{\mathbb{X}_q} \quad (3.1)$$

для любого открытого шара $B \subset \mathbb{R}^n$. Более того, $(\mathbb{X}_{q\sigma})^* = \mathbb{X}_{q'\sigma}^*$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, где $\mathbb{X}_{q'\sigma}^* = L_{\sigma'}^{q'}(\mathbb{R}^n; E^*)$.

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся некоторые леммы. Сначала рассмотрим задачу

$$-\sum_{k=1}^n b_k * \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + (A + \lambda) u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

где $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in X_q$ и $u = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$ — решение (3.2).

Лемма 3.1. *Предположим, что условие 2.1 выполнено, $q \in (1, \infty)$ и $-2 < s < \infty$. Тогда для всех $f \in \mathbb{X}_{q,s}$, $\lambda \in S_\psi$ задача (3.2) имеет единственное решение $u \in Y^{2+s,q}$ и выполняется коэрцитивная равномерная оценка*

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{s+2} |\lambda|^{1-\frac{i}{s+2}} \left\| b_k * \frac{\partial^i u}{\partial x_k^i} \right\|_{\mathbb{X}_q} + \|Au\|_{\mathbb{X}_q} \lesssim \|f\|_{\mathbb{X}_q^s}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Используя преобразование Фурье, мы видим, что оценка (3.3) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} & \left\| F^{-1} \left(1 + \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \right)^{\frac{s+2}{2}} \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f} \right\|_{\mathbb{X}_q} + \left\| F^{-1} A \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f} \right\|_{\mathbb{X}_q} + \\ & + |\lambda| \left\| F^{-1} \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda) \hat{f} \right\|_{\mathbb{X}_q} \leq C \left\| F^{-1} \left(1 + |\xi|^2 \right)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \right\|_{\mathbb{X}_q}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\Phi(A, \xi, \lambda)$ — операторная функция, заданная формулой (2.3).

Для доказательства (3.4) достаточно показать, что операторные функции

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{s+2} |\lambda|^{1-\frac{i}{s+2}} \xi_k^i \hat{b}_k(\xi) \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda), \quad A \left(1 + |\xi|^2 \right)^{-\frac{s}{2}} \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda),$$

$$|\lambda| \left(1 + |\xi|^2 \right)^{-\frac{s}{2}} \Phi^{-1}(A, \xi, \lambda)$$

являются мультипликаторами в X_q равномерно по λ . Этот факт можно получить тем же способом, что и в доказательствах теорем 2.1, 2.2.

Рассуждая аналогично ([5], лемма 2), получаем следующее утверждение.

Лемма 3.2. $(C^\infty(\mathbb{R}^n; E))^n$ *плотно в $\mathbb{Y}_p$.*

Рассмотрим задачу

$$-\sum_{k=1}^n b_k * \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + A\varphi + \lambda\varphi = \operatorname{div} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

До конца раздела 3 предположим, что условие 2.1 выполнено и $q \in (1, \infty)$.

Из леммы 3.1 получаем следующие результаты.

Результат 3.1. Для всех $f \in \mathbb{X}_q$, $\lambda \in S_\psi$ задача (3.5) имеет единственное решение $\varphi \in Y^{q,1}$ и выполняется коэрцитивная равномерная оценка

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| b_k * \frac{\partial^i \varphi}{\partial x_k^i} \right\|_{X_q} + \|A\varphi\|_{X_q} \lesssim \|\operatorname{div} f\|_{Y^{1,q}}.$$

Рассмотрим оператор $P = P_q$, заданный формулами

$$D(P) = \mathbb{X}_q, \quad Pf = f - \nabla\varphi,$$

где φ — решение задачи (3.5).

Результат 3.2. $P_q\mathbb{X}_q$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{X}_q$.

Лемма 3.3. P_q является ограниченным линейным оператором в $\mathbb{X}_q$ и $Pf = f$, если $\operatorname{div} f(x) = 0$.

Доказательство. Линейность оператора P очевидна из его определения. Более того, ввиду результата 3.1 получаем

$$\|Pf\|_{\mathbb{X}_q} \leq \|f\|_{\mathbb{X}_q} + \|\nabla\varphi\|_{\mathbb{X}_q} \leq C\|f\|_{\mathbb{X}_q}.$$

Если $\operatorname{div} f(x) = 0$, то по лемме 3.1 имеем $\varphi = 0$, т. е. $Pf = f$.

Пусть E^* обозначает дуальное пространство к E .

Лемма 3.4. Сопряженный к P_q элемент определяется как $P_q^* = P_{q'}^*$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, и является ограниченным линейным оператором в $\left(L^{q'}(\mathbb{R}^n; E^*)\right)^n$.

Доказательство. Известно (см., например, [17]), что дуальным пространством к $L^q(\mathbb{R}^n; E)$ является $L^{q'}(\mathbb{R}^n; E^*)$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; E^*)$ плотно в $L^{q'}(\mathbb{R}^n; E^*)$, остается только показать, что $P_q^*\varphi = P_{q'}^*\varphi$ для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; E^*)$. Этот факт выводится аналогично рассуждению из ([3], лемма 5). Более того, по лемме 3.4 дуальный оператор P_q^* является ограниченным линейным оператором в $\left(L^{q'}(\mathbb{R}^n; E^*)\right)^n$.

Пусть

$$G_q = \{\nabla\varphi : \varphi \in Y^{q,1}\}, \quad (P_q\mathbb{X}_q)^\perp = \left\{f \in \left(L^{q'}(\mathbb{R}^n; E^*)\right)^n, \langle f, v \rangle = 0 \text{ для любого } v \in P_q\mathbb{X}_q\right\}.$$

С помощью лемм 3.3, 3.4 получаем

Результат 3.3. Любой элемент $f \in \mathbb{X}_q$ может быть единственным образом представлен в виде суммы элементов из $P_q\mathbb{X}_q$ и G_q .

Аналогично леммам 6, 7 из [3] получаем следующее утверждение.

Лемма 3.5. Верны равенства

$$(P_q\mathbb{X}_q)^\perp = G_{q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

$$\mathbb{X}_{q\sigma}^\perp = G_{q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Доказательство теоремы 3.1. В силу леммы 3.5 $\mathbb{X}_{q\sigma} = (P_q\mathbb{X}_q)^\perp$. По определению P_q имеем $\mathbb{X}_q = \mathbb{X}_{q\sigma} \oplus G_q$. Из лемм 3.1, 3.3 получаем оценку (3.1). Более того, ввиду результата 3.2 G_q является замкнутым подпространством $\mathbb{X}_q$. Известно, что дуальным пространством к фактор-пространству $\mathbb{X}_q/G_q$ является $G_{q'}^\perp$. Ввиду первого утверждения теоремы имеем $\mathbb{X}_q/G_q = \mathbb{X}_{q\sigma}$, а из второго равенства леммы 3.5 получаем второе утверждение.

Теорема 3.2. Для всех $f \in \mathbb{X}_q$, $\varphi \in H^{1,q}(\mathbb{R}^n; E)$, $\lambda \in S_\psi$ задача (1.4) имеет единственное решение $u \in \mathbb{Y}^{2,q}$ и выполняется следующая коэрцитивная равномерная оценка:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^2 |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| b_k * \frac{\partial^i u}{\partial x_k^i} \right\|_{\mathbb{X}_q} + \|Au\|_{\mathbb{X}_q} + \|\nabla \varphi\|_{\mathbb{X}_q} \leq C \|f\|_{\mathbb{X}_q}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Применяя оператор P_q к уравнению (1.4), получаем задачу Стокса (1.5). Очевидно, что

$$D(O) = D(O_1) \cap \mathbb{X}_{q\sigma},$$

где $O = O_q$ — оператор Стокса, порожденный задачей Стокса (1.5) и O_1 — оператор в $\mathbb{X}_q$, порожденный задачей (1.4) при $\lambda = 0$, т. е.

$$D(O_1) = \mathbb{Y}^{2,q}, \quad O_1 u = -b * \Delta u + Au.$$

Тогда требуемое утверждение вытекает из леммы 3.1.

Результат 3.4. Из теоремы 3.2 следует, что O — секториальный оператор в $\mathbb{X}_q$, причем он порождает ограниченную голоморфную полугруппу $S(t) = \exp(-Ot)$ для $t > 0$.

Аналогично [6] докажем

Предложение 3.1. Для $\alpha \geq 0$ и $t > 0$ выполняется оценка

$$\|O^\alpha S(t)\| \leq Ct^{-\alpha}.$$

Доказательство. Из теоремы 3.2 следует, что оператор Q является равномерно положительным в $\mathbb{X}_q$, т. е. для $\lambda \in S_{\psi, \pi}$, $0 < \psi < \pi$, выполняется оценка

$$\|(O + \lambda)^{-1}\| \leq M |\lambda|^{-1},$$

где константа M не зависит от λ . Тогда доказываемое утверждение можно получить, используя интеграл Данфорда и операторное исчисление (см., например, [15]).

4. КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

Пусть E_1 и E_2 — два банахова пространства. Обозначим через $(E_1, E_2)_{\theta, p}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, интерполяционные пространства, полученные из $\{E_1, E_2\}$ K -методом ([17], §1.3.2). Пусть

$$\mathbb{Y}^{1,2,p,q} = W^{1,p}(0, T; \mathbb{Y}^{2,q}, \mathbb{X}_q).$$

В этом разделе предположим, что условие 2.1 выполнено и $q \in (1, \infty)$.

Покажем корректность постановки задачи (1.1).

Теорема 4.1. Для любых $f \in L^p(0, T; \mathbb{X}_q) = B(p, q)$, $a \in (\mathbb{Y}^{2,q}, \mathbb{X}_q)_{\frac{1}{p}, p} = G(p, q)$, $p, q \in (1, \infty)$, существует единственное решение $u \in \mathbb{Y}^{1,2,p,q}$, $\varphi \in L^p(0, T; H^{1,q}(\mathbb{R}^n; E))$ и $a \in G(p, q)$ из задачи (1.1), удовлетворяющее оценке

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{B(p,q)} + \sum_{k=1}^n \left\| b_k * \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right\|_{B(p,q)} + \|Au\|_{B(p,q)} + \|\nabla \varphi\|_{B(p,q)} \lesssim \|f\|_{B(p,q)} + \|a\|_{G(p,q)}.$$

Доказательство. Задача (1.1) может быть представлена как следующая абстрактная параболическая задача:

$$\frac{du}{dt} + Qu = f(t), \quad u(0) = a. \quad (4.1)$$

Если $E = \mathbb{X}_q$, то по предложению 3.1 оператор Q является секториальным и порождает ограниченную голоморфную полугруппу в $\mathbb{X}_q$ для $q \in (1, \infty)$. Более того, используя ([20], теорема 3.1), мы получаем, что оператор Q является R -секториальным в $\mathbb{X}_q$. Поскольку $\mathbb{X}_q$ — UMD-пространство для $q \in (1, \infty)$, аналогично ([16], теорема 4.2) получаем, что для всех $f \in L^p(0, T; E)$ и $a \in B(p, q)$ существует единственное решение $u \in W^{1,p}(0, T, D(Q), E)$ задачи (4.1), причем выполняется оценка

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^p(0, T; E)} + \|Qu\|_{L^p(0, T; E)} \leq C \left(\|f\|_{L^p(0, T; E)} + \|a\|_{(D(Q), \mathbb{X}_q)_{\frac{1}{p}, p}} \right). \quad (4.2)$$

Тогда требуемое утверждение вытекает из оценок (3.7) и (4.2).

Замечание 4.1. В конкретных банаховых пространствах можно указать довольно много положительных операторов. Поэтому, рассматривая в (1.4) и (1.1) конкретные банаховы пространства вместо E и конкретные положительные дифференциальные и псевдодифференциальные операторы, а также конечные и бесконечные матрицы и т.д. вместо A , с использованием теорем 3.2 и 4.1 можно получить свойства максимальной регулярности различных классов стационарных и нестационарных задач Стокса, встречающихся во многих физических и инженерных задачах соответственно.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу Стокса (1.8). Пусть $\mathbb{X}_{q, p_1} = (L^q(\mathbb{R}^n; L^{p_1}(0, 1)))^n$ обозначает класс $L^{p_1}(0, 1)$ -значных систем функций

$$f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathbb{X}_{q, p_1}} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{q, p_1}(\mathbb{R}^n \times (0, 1))}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $X_{q, p_1} = L^{q, p_1}(\mathbb{R}^n \times (0, 1))$ задается формулой (1.9).

Пусть $\mathbb{X}_{p, q, p_1} = L^p(0, T; \mathbb{X}_{q, p_1})$ — пространство Лебега со смешанной нормой и $\mathbb{Y}^{2, q, p_1} = (Y^{2, q, p_1})^n$, где

$$Y^{2, q, p_1} = W^{2, q}(\mathbb{R}^n; W^{[2], p_1}(0, 1), L^{p_1}(0, 1)).$$

Пусть A_1 — дифференциальный оператор в $L^{p_1}(0, 1)$, заданный формулой (1.7).

Теорема 5.1. *Допустим, что второе предположение условия 2.1 выполнено. Тогда для всех $f \in \mathbb{X}_{q, p_1}$ и $\varphi \in H^{1, q}(\mathbb{R}^n; L^{p_1}(0, 1))$, $q, p_1 \in (1, \infty)$, существует единственное решение $u \in \mathbb{Y}^{2, q, p_1}$ задачи (1.8). Более того, выполняется коэрцитивная оценка*

$$\sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right\|_{\mathbb{X}_{q, p_1}} + \|A_1 u\|_{\mathbb{X}_{q, p_1}} \lesssim \|f\|_{\mathbb{X}_{q, p_1}}.$$

Доказательство. Ввиду ([20], теорема 5.0) оператор A_1 в $L^{p_1}(0, 1)$ является R -положительным. Поэтому все условия теоремы 3.2 выполнены, откуда следует требуемое утверждение.

Рассмотрим теперь задачу Стокса (1.11). Пусть $\mathbb{X}_{p, q, p_1} = L^p(0, T; \mathbb{X}_{q, p_1})$ — пространство Лебега со смешанной нормой и $\mathbb{Y}^{q, p_1, 2} = (Y^{q, p_1, 2})^n$, где

$$Y^{q, p_1, 2} = W^{q, 2}(\mathbb{R}^n; W^{p_1, 2}(0, 1), L^{p_1}(0, 1)).$$

Пусть $\omega_1 = \omega_1(y)$, $\omega_2 = \omega_2(y)$ — корни уравнения $a_1(y)\omega^2 + 1 = 0$. Пусть

$$\nu(y) = \left| \begin{pmatrix} (-\omega_1)^{m_1} \alpha_1 & \beta_1 \omega_1^{m_1} \\ (-\omega_2)^{m_2} \alpha_2 & \beta_2 \omega_2^{m_2} \end{pmatrix} \right|, \mathbb{V}_{p,q} = (\mathbb{Y}^{q,p_1,2}, \mathbb{X}_{p,q,p_1})_{\frac{1}{p},p}.$$

Пусть A_2 — дифференциальный оператор в $L^{p_1}(0,1)$, заданный формулой (1.10), и

$$\mathbb{Y}^{1,2,p,q,p_1} = W^{1,p}(0,T; \mathbb{Y}^{q,p_1,2}, \mathbb{X}_{p,q,p_1}).$$

Теорема 5.2. *Допустим, что второе предположение условия 2.1 выполнено. Более того, пусть $a_1 \in VMO \cap L^\infty(0,1)$, $\operatorname{Re} \omega_k \neq 0$, $\frac{\lambda}{\omega_k} \in S(\phi_1)$ почти для всех $x \in (0,1)$, $\phi_1 \in [0, \pi)$ и $a_2 \in VMO \cap L^\infty(0,1)$, $a_1(0) = a_1(1)$, $a_2(0) = a_2(1)$. Тогда для всех $f \in \mathbb{X}_{p,q,p_1}$, $a \in \mathbb{V}_{p,q}$, $p, q, p_1 \in (1, \infty)$, существует единственное решение $u \in \mathbb{Y}^{1,2,p,q,p_1}$ и $\varphi \in H^{1,q}(\mathbb{R}^n; L^{p_1}(0,1))$ задачи (1.11). Более того, выполняется коэрцитивная оценка*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{\mathbb{X}_{p,q,p_1}} + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right\|_{\mathbb{X}_{p,q,p_1}} + \|A_1 u\|_{\mathbb{X}_{p,q,p_1}} + \|\nabla \varphi\|_{\mathbb{X}_{p,q,p_1}} \lesssim \|f\|_{\mathbb{X}_{p,q,p_1}} + \|a\|_{\mathbb{V}_{p,q}}.$$

Доказательство. Ввиду ([20], теорема 5.0) оператор A_2 является R -положительным в $L^{p_1}(0,1)$. Поэтому все условия теоремы 4.1 выполнены, откуда следует требуемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Biswas A., Swanson D. *Navier–Stokes Equations and Weighted Convolution Inequalities in Groups*, Commun. Partial Diff. Equat. **35**, 559–589 (2010).
- [2] Giga Y., Sohr H. *Abstract L_p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier–Stokes equations in exterior domains*, J. Funct. Anal. **102**, 72–94 (1991).
- [3] Fujiwara D., Morimoto H. *An L_r -theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. (I) **24**, 685–700 (1977).
- [4] Farwing R., Sohr H. *Generalized resolvent estimates for the Stokes system in bounded and unbounded domains*, J. Math. Soc. Japan **46** (4), 607–643 (1994).
- [5] Kato T. *Strong L_p -solutions of the Navier–Stokes equation in R^m , with applications to weak solutions*, Math. Z. **187**, 471–480 (1984).
- [6] Koch H., Tataru D. *Well-posedness for the Navier–Stokes Equations*, Adv. Math. **157**, 22–35 (2001).
- [7] Ladyzhenskaya O.A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow* (Gordon and Breach, New York, 1969).
- [8] Solonnikov V. *Estimates for solutions of nonstationary Navier–Stokes equations*, J. Sov. Math. **8**, 467–529 (1977).
- [9] Sobolevskii P.E. *Study of Navier–Stokes equations by the methods of the theory of parabolic equations in Banach spaces*, Soviet Math. Dokl. (5), 720–723 (1964).
- [10] Shakhmurov V.B. *Navier–Stokes problems with small parameters in half space and application*, Siberian Math. J. **64** (1), 181–201 (2023).
- [11] Du G., Xiaochuan T. *Mathematics of Smoothed Particle Hydrodynamics: A Study via Nonlocal Stokes Equations*, Foundations Comput. Math. **20** (4), 801+ (2020).
- [12] Amann H. *On the strong solvability of the Navier–Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **2**, 16–98 (2000).
- [13] Galdi G.P. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations Steady-State Problems* (Springer, Berlin Heidelberg New-York, Hong Kong, London 201).
- [14] Teman R. *Navier–Stokes Equations* (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- [15] Denk R., Hieber M., Prüss J. *R -boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type*, Mem. Amer. Math. Soc. **166**, article 788 (2003).
- [16] Weis L. *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p regularity*, Math. Ann. **319**, 735–758 (2001).
- [17] Triebel H. *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators* (North-Holland, Amsterdam, 1978).
- [18] Shakhmurov V.B., Shakhmurov R. *The Cauchy problem for Boussinesq equations with general elliptic part*, J. Anal. Math. Phys. **9**, 1689–1709 (2019).
- [19] Lunardi A. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems* (Birkhauser, 2003).

- [20] Shakhmurov V.B. *Regular degenerate separable differential operators and applications*, Potential Anal. **35** (3), 201–212 (2011).
- [21] Shakhmurov V.B. *Abstract elliptic equations with VMO coefficients in half plane*, Mediterranean J. Math. **2015** (25), 1–21, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00009-015-0599-y>.
- [22] Shakhmurov V.B. *Embedding and maximal regular differential operators in Banach-valued weighted spaces*, Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.) **28** (9), 1883–1896 (2012).
- [23] Yakubov S., Yakubov Ya. *Differential-operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations* (Chapman and Hall /CRC, Boca Raton, 2000).

Вели Биннатович Шахмуров

*Университет Анталии Билим,
Досемеальти, Анталия, 07190, Турция,*

e-mail: veli.sahmurov@antalya.edu.tr

V.B. Shakhmurov

Nonlocal abstract Stokes operators and applications

Abstract. In this paper, the Cauchy problem for the stationary and nonstationary nonlocal incompressible abstract Stokes equation is considered. The equation involves a convolution term and an abstract operator in a Banach space E . Existence, uniqueness, and coercive estimates are derived in L^p spaces. Different classes of Stokes equations can be obtained by choosing the space E and the linear operator A , which occur in a wide variety of physical systems. As an application of the obtained results, the existence, uniqueness, and L^p -maximal regularity properties of solutions to initial value problems for nonlocal degenerate Stokes equations and nonlocal Stokes equations with discontinuous coefficients are established.

Keywords: Stokes system, elliptic equation, parabolic equation, semigroups of operators, boundary value problem, abstract differential equation, maximal L^p -regularity.

Veli Binnet Shakhmurov

*Antalya Bilim University,
Dosemealti, Antalya, 07190 Turkey,*

e-mail: veli.sahmurov@antalya.edu.tr