

Ш.Б. МЕРАЖОВА

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО СМЕШАННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В настоящей работе рассматривается краевая задача для смешанного интегро-дифференциального уравнения. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи. Для доказательства использован спектральный метод.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, интегро-дифференциальное уравнение, краевая задача, смешанное интегро-дифференциальное уравнение, прямая задача, спектральный метод, собственное значение, собственная функция.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-7-64-71

ВВЕДЕНИЕ

Различные вопросы физики и техники приводят к исследованию интегро-дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных и постановке для них определенных задач, точное решение которых либо невозможно выразить в замкнутом виде современными методами, либо эти решения выражаются в громоздком виде. В связи с этим теория таких уравнений давно привлекает внимание как физиков-теоретиков, так и математиков [1], [2].

Прямые и обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа изучались в работах [3]–[9]. Установлен критерий единственности и существования решения обратной задачи определения неизвестной правой части. Также в [10] рассматривались другие постановки обратной задачи. Вообще говоря, прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа не так хорошо известны, как аналогичные задачи для классических уравнений. Тем не менее, данные задачи так же имеют отношение к практике.

Численные алгоритмы решения обратной задачи требуют привлечения теории обратных и некорректных задач, которая разрабатывалась в работах [11], [12].

В работах [5], [6] были рассмотрены прямая и обратная задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа для одномерного и двумерного случаев, а в работе [13] предложены алгоритмы численного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части уравнения. Предполагалось, что функция, входящая в нелокальное условие, и функция, являющаяся дополнительной информацией для решения обратной задачи, могут быть известны с некоторой ошибкой, поскольку являются результатом практических измерений.

Предложено три алгоритма численного решения. Проведен ряд численных экспериментов по апробации предложенных алгоритмов.

В работах [14]–[20] рассмотрены прямая и обратная задачи, поставленные для интегро-дифференциальных уравнений и уравнений смешанного типа.

В данной статье рассматривается задача для интегро-дифференциального уравнения смешанного типа и доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в области $G = \{(x, t) : 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ интегро-дифференциальное уравнение смешанного типа

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \int_0^t K(\tau) u(x, t - \tau) d\tau + f(x), \quad t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} &= f(x), \quad t < 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где α, β — заданные положительные числа.

Задача. Найти в области G функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и следующим условиям:
краевые условия:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (2)$$

начальное условие:

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

условия склейки при $t = 0$:

$$\lim_{t \rightarrow -0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow -0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

$\varphi(\cdot)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Обозначим $G_+ = G \cap \{t > 0\}$, $G_- = G \cap \{t < 0\}$.

Уравнение (1) при $t > 0$ является интегро-дифференциальным уравнением с интегральным членом типа свертки. Прямые начально-граничные задачи и обратные задачи определения сверточного ядра $K(t)$ для таких уравнений исследованы в работах [21]–[32]. Получены теоремы существования, единственности, а также оценки устойчивости решения.

Определение 1. Решением задачи (1)–(4) назовем функцию $u(x, t)$ из класса

$$C(\overline{G}) \cap C^1(G) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_+ \cup \{t = \beta\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -\alpha\}),$$

удовлетворяющую соотношениям (1)–(4).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Решаем задачу (1)–(4) и доказываем ее однозначную разрешимость.

Разлагаем неизвестную функцию и начально заданные функции в ряды Фурье по системе $\{\sin(\lambda_n x)\}$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda_n x), \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x), \end{aligned} \quad (5)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Подставляем ряды для функций $u(x, t)$ и $f(x)$ в (1):

$$\begin{aligned} u'_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) &= f_n + \int_0^t K(\tau) u_n(t - \tau) d\tau, \quad t > 0; \\ u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) &= f_n, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначение

$$F_n(t; u_n) = \int_0^t K(\tau) u_n(t - \tau) d\tau. \quad (7)$$

Подставим (7) в (6):

$$\begin{aligned} u'_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) &= f_n + F_n(t; u_n), \quad t > 0; \\ u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) &= f_n, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решаем неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения в (8) методом вариации постоянных и получим общее решение в виде

$$\begin{aligned} u_n(t) &= C e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{f_n}{\lambda_n^2} + \int_0^t F_n(\tau; u_n) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad t > 0; \\ u_n(t) &= C_1 \cos(\lambda_n t) + C_2 \sin(\lambda_n t) + \frac{f_n}{\lambda_n^2}, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя условия (4), (3) для неизвестных коэффициентов C, C_1, C_2 получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} C + \frac{f_n}{\lambda_n^2} &= C_1 + \frac{f_n}{\lambda_n^2}, \quad -\lambda_n^2 C = \lambda_n C_2, \\ C_1 \cos(\lambda_n \alpha) - C_2 \sin(\lambda_n \alpha) + \frac{f_n}{\lambda_n^2} &= \varphi_n. \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициенты

$$\begin{aligned} C_1 &= C, \quad C_2 = -\lambda_n C, \\ C (\cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)) + \frac{f_n}{\lambda_n^2} &= \varphi_n, \end{aligned}$$

получим

$$C = \frac{\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2}}{\cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)}.$$

Введем обозначение

$$\gamma_n = \cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha). \quad (10)$$

Используя (7), (10), найденные коэффициенты подставляем в (9) и получаем интегральное уравнение относительно $u_n(t)$ в $t > 0$ и явное решение $u_n(t)$ в $t < 0$:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{1}{\gamma_n} \left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{f_n}{\lambda_n^2} + \int_0^t F_n(\tau; u_n) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad t > 0, \\ u_n(t) &= \frac{\cos(\lambda_n t) - \lambda_n \sin(\lambda_n t)}{\gamma_n} \left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] + \frac{f_n}{\lambda_n^2}, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(4)

Если в (11) свободный член и ядро — непрерывные функции, то методом последовательных приближений можно доказать однозначную разрешимость уравнений (11) в случае $t > 0$.

Подставляя (11) в (5) получим формальное решение поставленной задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\gamma_n} \left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{f_n}{\lambda_n^2} + \int_0^t F_n(\tau; u) \cdot e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \right] \sin(\lambda_n x), \quad t > 0, \quad (12)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(\lambda_n t) - \lambda_n \sin(\lambda_n t)}{\gamma_n} \left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] + \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] \sin(\lambda_n x), \quad t < 0. \quad (13)$$

В работе [4] было доказано, что

$$|\gamma_n| = |\cos(\lambda_n \alpha) + \lambda_n \sin(\lambda_n \alpha)| \geq \alpha_0 > 0, \quad (14)$$

где α_0 — положительная постоянная для случая $l = 1$.

Для нашего случая верна

Лемма 1. Если $\alpha = lp$, $p \in N$, или $\alpha = l \frac{m}{n}$, $m, n \in N$, $(m, n) = 1$, то верно неравенство (14).

Для доказательства существования решения нам необходимо показать, что ряды (12), (13) и ряды, полученные дифференцированием из (12) один раз по t и два раза по x , а из (13) два раза по t и два раза по x , сходятся равномерно.

Оценим $u_n(t)$ для случая $t > 0$:

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &= \left| \frac{1}{\gamma_n} \left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{f_n}{\lambda_n^2} + \int_0^t F_n(\tau; u) \cdot e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_0} \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} + \frac{1}{\lambda_n^2} \|K\|_0 \int_0^t |u_n(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha_0} \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right) e^{-\frac{1}{\lambda_n^2} \|K\|_0 t} \leq \max \left\{ \frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\lambda_1^2} \right\} \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] e^{-\frac{1}{\lambda_n^2} \|K\|_0 t}. \end{aligned}$$

Используя полученную оценку, оценим ряд (12):

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \lambda_n x \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| |\sin \lambda_n x| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \leq \bar{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n} |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} + (\lambda_n |\varphi_n|)^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{|f_n|^2}{\lambda_n^2} \right] \leq \bar{C}_1 + \|\varphi'\|_{L^2(0, l)} + \|f\|_{L^2(0, l)}. \end{aligned}$$

Оценим ряды, полученные дифференцированием два раза по x и один раз по t из (12), для этого вычислим u_{xx} , u_t из (12) и получим оценки для полученных рядов:

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \sin \lambda_n x,$$

$$\begin{aligned}
|u_{xx}(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \sin \lambda_n x \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |u_n(t)| \leq \\
&\leq \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] = \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^2 |\varphi_n| + |f_n|] = \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n} |\lambda_n^3 \varphi_n| + \frac{1}{\lambda_n} |\lambda_n f_n| \right] \leq \\
&\leq \overline{C} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^3 \varphi_n|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n f_n|^2 \right)^{1/2} \right) \leq \\
&\leq \tilde{C}_1 \left(\|\varphi'''\|_{L^2(0, l)} + \|f'\|_{L^2(0, l)} \right).
\end{aligned}$$

Из (8) находим $u'_n(t) = f_n + F_n(t; u) - \lambda_n^2 u_n(t)$. Оценим это равенство:

$$\begin{aligned}
|u'_n(t)| &\leq \lambda_n^2 |u_n(t)| + |F_n(t; u)| + |f_n| \leq \overline{C} \lambda_n^2 \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] + \\
&+ |f_n| + \left| \int_0^t K(\tau) u_n(t - \tau) d\tau \right| \leq \overline{C} \lambda_n^2 \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] + \\
&+ |f_n| + \|h\|_0 \overline{C} \left[|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \right] e^{\frac{1}{\lambda_n^2} \|h\|_0 T} \leq \overline{C} [\lambda_n^2 |\varphi_n| + \lambda_n |f_n|], \\
&\overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^2 |\varphi_n| + |f_n|] < \infty.
\end{aligned}$$

Оценим $u_n(t)$ для случая $t < 0$:

$$\begin{aligned}
|u_n(t)| &= \left| \frac{\cos(\lambda_n t) - \lambda_n \sin(\lambda_n t)}{\gamma_n} \left[\varphi_n - \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right] + \frac{f_n}{\lambda_n^2} \right| \leq \frac{1}{\alpha_0} \left[\lambda_n |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n} \right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \leq \\
&\leq \frac{1}{\alpha_0} \left[\lambda_n |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n} \right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \leq \max \left\{ \frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\lambda_n} \right\} \left[\lambda_n |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n} \right].
\end{aligned}$$

Используя полученную оценку, оценим ряд (13) :

$$\begin{aligned}
|u(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \lambda_n x \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| |\sin \lambda_n x| \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \leq \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n} \right] \leq \|\varphi''\|_{L^2(0, l)} + \|f\|_{L^2(0, l)}.
\end{aligned}$$

Покажем дифференцируемость (13) два раза по x и по t . Для этого вычислим u_{xx} , u_{tt} и получим оценки для полученных рядов:

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \sin \lambda_n x, \\
|u_{xx}(x, t)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \sin \lambda_n x \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |u_n(t)| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \overline{C_1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left[\lambda_n |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n} \right] = \overline{C} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^3 |\varphi_n| + \lambda_n |f_n|] = \overline{C_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n} |\lambda_n^4 \varphi_n| + \frac{1}{\lambda_n} |\lambda_n^2 f_n| \right] \leq \\
&\leq \overline{C_1} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^4 \varphi_n|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^2 f_n|^2 \right)^{1/2} \right) \leq \\
&\leq \tilde{C}_1 \left(\left\| \varphi^{(4)} \right\|_{L^2(0,l)} + \left\| f'' \right\|_{L^2(0,l)} \right).
\end{aligned}$$

Из (8) для $t < 0$ находим $u''_n(t) = f_n - \lambda_n^2 u_n(t)$. Оценим это равенство:

$$\begin{aligned}
|u''_n(t)| &\leq \lambda_n^2 |u_n(t)| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \leq \overline{C_2} \lambda_n^2 \left[\lambda_n |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n} \right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \leq \\
&\leq \overline{C_2} \lambda_n^2 \left[\lambda_n |\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n} \right] + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \leq \overline{C_2} [\lambda_n^3 |\varphi_n| + \lambda_n |f_n|],
\end{aligned}$$

получим

$$\overline{C_2} \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^2 |\varphi_n| + \lambda_n |f_n|] < \infty.$$

Теперь докажем единственность решения.

Решаем задачу (1)–(4) для случая $f(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$, тогда решение получим в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t F_n(\tau; u) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \sin(\lambda_n x), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для доказательства единственности используем неравенство Гронуолла–Беллмана, т. е. следующее утверждение.

Лемма 2 ([33]). Пусть функция $u(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворяет в этом промежутке неравенству

$$0 \leq u(x) \leq A + B \int_{x_0}^x u(t) dt + \varepsilon(x - x_0), \quad A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad \varepsilon \geq 0,$$

тогда при $x \in [x_0, x_0 + h]$ справедливо неравенство

$$u(x) \leq A e^{B(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{B} (e^{B(x-x_0)} - 1).$$

В нашем случае

$$u_n(t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau K(s) u_n(\tau - s) ds \right) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau,$$

где

$$A = 0, \quad B = T \|K\|, \quad \varepsilon = 0, \quad u_n = (u, X_n) = 0,$$

т. е. $(u, \sin(\lambda_n x)) = 0$ и $u \in C(\overline{G})$, $K \in C[0, \beta]$.

Из неравенства Гронуолла–Беллмана получим

$$|u| \leq 0,$$

отсюда $u(x, t) \equiv 0$. Таким образом доказана

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 1 и

$A_1)$ $\varphi \in C^3[0, l]$, $\varphi^{(IV)} \in L^2(0, l)$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$;

$A_2)$ $f \in C^1[0, l]$, $f'' \in L^2(0, l)$ и $f(0) = f(l) = 0$;

$A_3)$ $K \in C[0, \beta]$.

Тогда прямая задача (1)–(4) имеет единственное решение, которое представляется в виде (12), (13).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики* (Наука, М., 1984).
- [2] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи* (Сиб. научн. изд-во, Новосибирск, 2009).
- [3] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем. (4), 55–62 (2010).
- [4] Сабитов К.Б. *Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического в прямоугольной области*, Матем. заметки **86** (2), 273–279 (2009).
- [5] Merajova Sh.B. *Inverse source problem of determining the right side for equation of mixed parabolic-hyperbolic type: one-dimensional case*, Uzbek. Math. J. **66** (4) (4), 93–104 (2022).
- [6] Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. *Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с оператором Бесселя*, Сиб. журн. индустр. матем. **25** (3 (91)), 14–24 (2022).
- [7] Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. *О решении обратных задач для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа: одномерный случай*, Научн. вестн. Бухарск. гос. ун-та **1** (1), 2–6 (2015).
- [8] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А. *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа* (ФАН, Ташкент, 1986).
- [9] Капустин Н.Ю. *Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I*, Дифференц. уравнения **23** (1), 72–78 (1987).
- [10] Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного парабола-гиперболического типа со спектральным параметром*, Дифференц. уравнения **25** (1), 117–126 (1989).
- [11] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1979).
- [12] Карчевский А.Л. *Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом*, Сиб. журн. вычисл. матем. **11** (2), 139–149 (2008).
- [13] Меражова Ш.Б. *О численном решении обратной задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа по определению правой части уравнения*, Матем. заметки СВФУ **29** (3), 108–127 (2022).
- [14] Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. *Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды*, Сиб. журн. индустр. матем. **23** (2), 63–80 (2020).
- [15] Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. *Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка*, Изв. вузов. Матем. (6), 11–22 (2019).
- [16] Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. *О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью*, Сиб. матем. журн. **62** (2), 269–285 (2021).
- [17] Егоров И.Е. *О смешанной задаче для одного гипербола-параболического уравнения*, Матем. заметки **23** (3), 389–400 (1978).
- [18] Durdiev U.D. *A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Eurasian Math. Comp. Appl. **7** (2), 4–19 (2019).
- [19] Дурдиев У.Д. *Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах*, Сиб. журн. индустр. матем. **22** (4), 26–32 (2019).
- [20] Акрамова Д.И. *Обратная коэффициентная задача для дробно-диффузионного уравнения с оператором Бесселя*, Изв. вузов. Матем. (9), 45–57 (2023).
- [21] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Задача определения тепловой памяти проводящей среды*, Дифференц. уравнения **56** (6), 796–807 (2020).
- [22] Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. *Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости*, Сиб. матем. журн. **58** (3), 553–572 (2017).
- [23] Durdiev D.K., Totieva Zh.D. *The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations*, Math. Methods Appl. Sci. **41** (17), 8019–8032 (2018).
- [24] Durdiev D., Shishkina E., Sitnik S. *The Explicit Formula for Solution of Anomalous Diffusion Equation in the Multi-Dimensional Space*, Lobachevskii J. Math. **42** (6), 1264–1273 (2021).

- [25] Durdiev D.K., Rahmonov A.A. *A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity*, Math. Meth. Appl. Sci. **43** (15), 8776–8796 (2020).
- [26] Дурдиев Д.К. *Дифференциальные уравнения и математическая физика*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **19** (4), 658–666 (2015).
- [27] Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. *Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **4** (29), 37–47 (2012).
- [28] Тотиева Ж.Д., Дурдиев Д.К. *Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости*, Матем. заметки **103** (1), 129–146 (2018).
- [29] Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К. *Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики*, Дифференц. уравнения **54** (1), 136 (2018).
- [30] Durdiev D.K., Totieva Zh.D. *The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **28** (1), 43–52 (2019).
- [31] Durdiev D.K., Rahmonov A.A., Bozorov Z.R. *A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Math. Methods Appl. Sci. **44** (13), 10753–10761 (2021).
- [32] Durdiev D.K. *Inverse Coefficient Problem For The Time-Fractional Diffusion Equation*, Eurasian J. Math. Comput. Appl. **9** (1), 44–54 (2021).
- [33] Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений* (Ин. лит., М., 1954).

Шахло Бердиевна Меражова

Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,

e-mail: shsharipova@mail.ru, s.b.merajova@buxdu.uz

Sh.B. Merajova

Single-valued solvability of the direct problem for one mixed integro-differential equation

Abstract. In this paper, a boundary value problem for a mixed integro-differential equation is considered. The unique solvability of the posed problem is proved. The proof is based on the spectral method.

Keywords: mixed type equation, integro-differential equation, boundary value problem, mixed integro-differential equation, direct problem, spectral method, eigenvalue, eigenfunction.

Shakhlo Berdievna Merajova

Bukhara State University,

11 M. Iqbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: shsharipova@mail.ru, s.b.merajova@buxdu.uz