

Ж.Ж. ЖУМАЕВ, З.Р. БОЗОРОВ, Д.К. ДУРДИЕВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ДВУХ НЕИЗВЕСТНЫХ В УРАВНЕНИЯХ ДРОБНО-ВРЕМЕННОЙ ДИФФУЗИИ

Аннотация. Исследуется обратная задача для уравнения дробной по времени диффузии с начально-краевыми условиями и условиями переопределения. Неизвестными задачи являются переменный коэффициент при младшем члене и источник в уравнении. Для их определения задаются два интегральных условия переопределения. Сначала для прямой задачи устанавливается однозначная разрешимость классического решения с помощью метода Фурье, неравенства Гронуолла. Затем, с помощью теоремы о неподвижной точке в банаховом пространстве получены локальное существование и единственность обратной задачи. Для проверки теоретических результатов в работе построено численное решение заданной задачи с использованием метода конечных разностей. Наконец, представлен численный пример, показывающий эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: уравнение дробно-временной диффузии, обратная задача, интегральное уравнение, неравенство Гронуолла, метод конечных разностей.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-7-36-52

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия возрос интерес к изучению дробных дифференциальных уравнений. Дробные дифференциальные уравнения имеют множество успешных применений в различных областях современной науки и техники [1]–[4].

Обратные задачи для таких уравнений возникают во многих областях науки и техники. В обратных задачах для уравнений теплопроводности дробная производная по времени диффузионно-волновых уравнений, нелокальное начальное значение, часть граничного значения, коэффициенты уравнения неизвестны. Различные постановки обратных задач по определению теплового коэффициента в одномерном уравнении теплопроводности изучались в [5]–[8]. Важно отметить, что в работах [5], [9] зависящий от времени тепловой коэффициент определяется из данных условия нелокального переопределения. В отличие от работ [5], [9] в [10], [11] определяется коэффициент уравнении теплопроводности в случае нелокальных граничных условий.

В [12]–[18] исследована обратная задача нахождения коэффициента диффузии в одно- и многомерном дробно-временных уравнениях. При некоторых предположениях о данных показано существование, единственность и непрерывная зависимость от данных решения. Были получены некоторые результаты для дробно-временного волнового уравнения для задачи Коши, например, восстановление зависящего от времени коэффициента [19]–[21].

Задача определения ядра $k(t)$ интегрального члена интегро-дифференциального уравнения теплопроводности изучалась во многих публикациях [19]–[28], в которых изучались одно- и многомерные обратные задачи с классическими начальными, начально-краевыми условиями. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи.

Исследование в численном моделировании определения неизвестных коэффициентов в уравнениях диффузии привело ко многим интересным результатам. В статье [29] изучалась однозначная разрешимость обратной коэффициентной задачи определения коэффициента дробного уравнения диффузии. Получены теоремы существования и единственности решения обратной задачи. Кроме того, в этой статье предложен численный алгоритм, основанный на конечно-разностной схеме, для точного расчета обратной задачи одновременного определения, зависящего от времени коэффициента в дробном уравнении диффузии вместе с его решением. В работе [30] предложен безитерационный метод численного решения обратной задачи определения коэффициента правой части нестационарного уравнения дробной диффузии. Представлены результаты численной реализации предложенного метода на тестовых задачах с точными решениями. В работе [31] построен эффективный численный метод решения обратной задачи для параболического уравнения с дробной производной по времени. Для дискретизации задачи используется неявный метод конечных разностей, а для обратной задачи предложен метод сопряженных градиентов.

Раздел 1 посвящен постановке задачи. В разделе 2 приведены некоторые обозначения, определения и известные утверждения, которые используются в статье. В разделе 3 приводится доказательство, существование и единственность решения прямой задачи. В разделе 6 представлен численный метод и продемонстрирована эффективность предложенного алгоритма. Некоторые комментарии и выводы приводятся в конце статьи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется определить тройку функций $\{u(x, t), p(t), q(t)\}$, удовлетворяющую уравнению

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + p(t)u = f(x, t)q(t) + \psi(x, t), \quad (x, t) \in D_T := \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}, \quad (1)$$

с начально-граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

и условиям переопределения

$$\int_0^1 \omega_i(x)u(x, t)dx = h_i(t), \quad i = 1, 2, \quad x \in [0, 1], \quad (4)$$

где ∂_t^α — дробная производная Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$ по переменной t (см. определение 2), $f(x, t)$, $\psi(x, t)$, $\varphi(x)$, $\omega_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1, 2$, — заданные функции, T — произвольное положительное число.

Интегральные условия переопределения (4) в параболических задачах также называют тепловыми моментами, которые анализируются в [5].

Пусть $C^{2,\alpha}(D_T)$ — класс дважды непрерывно дифференцируемых по переменной x , непрерывных по t функций, и дробный интеграл порядка α непрерывно дифференцируемых по t на $[0, T]$ функций.

Определение 1. Тройка функций $\{u(x, t), p(t), q(t)\}$ из класса $C^{2,\alpha}(D_T) \cap C(\overline{D}_T) \times C[0, T] \times C[0, T]$ называется классическим решением задачи (1)–(4), если $u(x, t)$, $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) функция $u(x, t)$ и ее производные $\partial_t^\alpha u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ непрерывны в области D_T ;
- 2) функции $p(t)$, $q(t)$ непрерывны на интервале $[0, T]$;
- 3) уравнение (1) и условия (2)–(4) выполняются в классическом смысле.

На протяжении всей статьи предполагается, что функции φ , f , ψ , ω_i , h_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют следующим условиям:

- (A1) $\varphi(x) \in C^2(0, 1)$, $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$;
- (A2) $f(x, t) \in C^{2,1}(\overline{D}_T)$, $f_{xxx}^{(3)}(\cdot, t) \in L_2(0, 1)$, $f(0, t) = f(1, t) = 0$, $f_{xx}''(0, t) = f_{xx}''(1, t) = 0$;
- (A3) $\psi(x, t) \in C^{2,1}(\overline{D}_T)$, $\psi_{xxx}^{(3)}(\cdot, t) \in L_2(0, 1)$, $\psi(0, t) = \psi(1, t) = 0$, $\psi''(0, t) = \psi''(1, t) = 0$;
- (A4) $h_i(t) \in C^1[0, 1]$, $\omega_i(x) \in C^2[0, 1]$, $\omega_i^{(3)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\int_0^1 \omega_i(x) \varphi(x) dx = h_i(0)$, $\omega_i(0) = \omega_i(1) = 0$, $\omega_i''(0) = \omega_i''(1) = 0$, $i = 1, 2$.

В следующем разделе приведем основные определения и обозначения дробного исчисления, которые будут использоваться далее.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 2 ([32], с. 90–94). Дробная производная Капуто по времени порядка $0 < \alpha < 1$ интегрируемой функции u определяется формулой

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad \partial_t^1 u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера ([32], с. 40–42) $E_{\alpha, \beta}(z)$ определяется рядом

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

где $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ с $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\alpha)$ обозначает действительную часть комплексного числа α .

Свойство 1 ([32], с. 40–45). Пусть $0 < \alpha < 2$ и $\beta \in \mathbb{R}$ произвольны. Предположим, что κ такова, что $\pi\alpha/2 < \kappa < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. Тогда существует константа $C = C(\alpha, \beta, \kappa) > 0$ такая, что

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \quad \kappa \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

Свойство 2 ([32], с. 40–45). Для $0 < \alpha < 1$, $t > 0$ имеем $0 < E_{\alpha, 1}(-t) < 1$. Более того, $E_{\alpha, 1}(-t)$ вполне монотонна, т. е.

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha, 1}(-t) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Свойство 3 ([32], с. 42–45). Для $0 < \alpha < 1$, $\eta > 0$ имеем $0 \leq E_{\alpha, \alpha}(-\eta) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$. Более того, $E_{\alpha, \alpha}(-\eta)$ — монотонно убывающая функция с $\eta > 0$.

Лемма 1 ([33]; [34], с. 188–210). Пусть $m(t) \in C[t_0, T]$ ($t_0 \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $T \leq +\infty$) и предположим, что

$$m(t) \leq m_0 + \frac{L}{\Gamma(\gamma)} \int_{t_0}^t (t - s)^{\gamma-1} m(s) ds, \quad t \in [t_0, T].$$

Тогда

$$m(t) \leq m_0 E_{\gamma,1}(L(t-t_0)^\gamma), \quad t \in [t_0, T],$$

где m_0 и L — неотрицательные константы, $\gamma \in (0, 1)$.

Теорема 1 ([32], с. 135–144). Решение $T(t) \in C^1[0, T]$ линейного неоднородного дробного уравнения

$$\begin{aligned} \partial_{0+,t}^\alpha T(t) + \lambda T(t) &= f(t), \quad t \in (0, T], \quad \lambda > 0, \\ T(0) &= c, \end{aligned}$$

где $f \in C[0, T]$, определяется интегральным выражением

$$T(t) = c E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau.$$

3. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Классическое решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n, \quad (5)$$

где

$$u_n(t) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_n x dx, \quad f_n(t) = \sqrt{2} \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_n x dx.$$

Применяя метод Фурье для определения неизвестных коэффициентов $u_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) из (1) и (2), получим

$$\partial^\alpha u_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = -p(t)u_n(t) + q(t)f_n(t) + \psi_n(t), \quad (6)$$

$$u_n(t)|_{t=0} = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$\varphi_n = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_n x dx, \quad \psi_n(t) = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x, t) \sin \lambda_n x dx.$$

Согласно теореме 1 решение задачи (6), (7) удовлетворяет следующим интегральным уравнениям:

$$u_n(t) = \varphi_n E_\alpha(-\lambda^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2(t-\tau)^\alpha) [q(\tau)f_n(\tau) - p(\tau)u_n(\tau) + \psi_n(\tau)] d\tau. \quad (8)$$

Оценивая функции $u_n(t)$, получаем интегральные неравенства

$$|u_n(t)| \leq |\varphi_n| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) + \frac{\|p\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |u_n(\tau)| d\tau, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\|q\| = \max_{t \in [0, T]} |q(t)|$, $\|p\| = \max_{t \in [0, T]} |p(t)|$.

Применяя лемму 1, из последних неравенств получаем оценку

$$|u_n(t)| \leq \left(|\varphi_n| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|p\| t^\alpha). \quad (9)$$

Используя (6), (9), получаем оценки для $\partial^\alpha u_n(t)$:

$$|\partial^\alpha u_n(t)| \leq (\lambda^2 + \|p\|) \left(|\varphi_n| + \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|p\| t^\alpha) + \|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|.$$

Таким образом, доказана

Лемма 2. Для любого $t \in [0; T]$ справедливы оценки

$$|u_n(t)| \leq \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|p\| T^\alpha),$$

$$|\partial^\alpha u_n(t)| \leq (\lambda^2 + \|p\|) \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|p\| T^\alpha) + \|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|.$$

Формально из (5) путем почленного дифференцирования получим ряд

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial^\alpha u_n(t) \sin \lambda_n x, \quad (10)$$

$$u_{xx}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \sin \lambda_n x. \quad (11)$$

Ввиду леммы 2, если следующие ряды сходятся, то ряды в (5), (10), (11) будут сходиться для любого $(x, t) \in D_T$:

$$C_4 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2 |\varphi_n| + \lambda_n^2 \|f_n\| + \lambda_n^2 \|\psi_n\|),$$

где константа C_4 зависит только от $T, \alpha, \|p\|, \|q\|$.

Лемма 3. Если условия (A1)–(A3) выполнены, то имеют место равенства

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n^3} \varphi_n^{(3)}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^3} f_n^{(3)}, \quad \psi_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^3} \psi_n^{(3)}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(3)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(3)}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad f_n^{(3)}(t) = \sqrt{2} \int_0^1 f_{xxx}^{(3)}(x, t) \cos \lambda_n x dx, \\ \psi_n^{(3)}(t) &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi_{xxx}^{(3)}(x, t) \cos \lambda_n x dx, \end{aligned}$$

со следующими оценками:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(3)}|^2 &\leq \|\varphi^{(3)}\|_{L_2(0,1)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(3)}(t)|^2 \leq \|f_{xxx}^{(3)}\|_{L_2(0,1) \times C[0,T]}^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(3)}(t)|^2 &\leq \|\psi_{xxx}^{(3)}\|_{L_2(0,1) \times C[0,T]}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Если функции $\varphi(x), f(x, t), \psi(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то в силу представлений (12), (13) ряды (5), (10), (11) сходятся равномерно в прямоугольнике D_T , следовательно, функция $u(x, t)$ удовлетворяет соотношениям (1)–(3).

Таким образом, справедлива

Лемма 4. Пусть $\{q(t), p(t)\} \in C[0, T]$ и выполнены условия (A1)–(A3), тогда существует единственное решение прямой задачи (1)–(3) $u(x, t) \in C^{2,\alpha}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$.

Выведем оценку нормы разности решения исходного интегрального уравнения (8) и решения этого уравнения с возмущенными функциями $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}_n, \tilde{f}_n, \tilde{\psi}_n$. Пусть $\tilde{u}_n(t)$ — решения интегрального уравнения (8), соответствующие функциям $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}_n, \tilde{f}_n, \tilde{\psi}_n$, т. е.

$$\tilde{u}_n(t) = \tilde{\varphi}_n E_\alpha(-\lambda^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2(t-\tau)^\alpha) (\tilde{\psi}_n(\tau) - \tilde{p}(\tau) \tilde{u}_n(\tau) + \tilde{q}(\tau) \tilde{f}_n(\tau)) d\tau. \quad (14)$$

Составив разность $u_n - \tilde{u}_n$ с помощью (8), (14) и введя обозначения $u_n - \tilde{u}_n = \bar{u}_n$, $p - \tilde{p} = \bar{p}$, $q - \tilde{q} = \bar{q}$, $f_n - \tilde{f}_n = \bar{f}_n$, получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(t) = & \bar{\varphi}_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) (\bar{\psi}_n(\tau) + \bar{q}(\tau) f_n(\tau)) d\tau + \\ & + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \bar{q}(\tau) \bar{f}_n(\tau) d\tau - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \bar{p}(\tau) u_n(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \bar{p}(\tau) \bar{u}_n(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

откуда выводятся линейные интегральные неравенства

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t)| \leq & |\bar{\varphi}_n| + \frac{t^\alpha \|\bar{\psi}_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha \|\bar{f}_n\| \|\bar{q}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha \|f_n\| \|\bar{q}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \\ & + \frac{\|\bar{p}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|p\| t^\alpha) + \frac{\|\bar{p}\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |\bar{u}_n(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Используя лемму 1, из последнего неравенства приходим к оценке

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t)| \leq & \left\{ |\bar{\varphi}_n| + \frac{t^\alpha \|\bar{\psi}_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha \|\bar{f}_n\| \|\bar{q}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha \|f_n\| \|\bar{q}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \\ & \left. + \frac{\|\bar{p}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|q\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|p\| t^\alpha) \right\} E_\alpha(\|\bar{p}\| t^\alpha). \end{aligned} \quad (15)$$

В следующем разделе изучается обратная задача определения функций $p(t), q(t)$ из соотношений (1)–(4), используя принцип сжимающего отображения.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Умножим (1) на $\omega_i(x)$, $i = 1, 2$, и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_i(x) \partial_t^\alpha u(x, t) dx - \int_0^1 \omega_i(x) u_{xx} dx + p(t) \int_0^1 \omega_i(x) u(x, t) dx = \\ & = q(t) \int_0^1 \omega_i(x) f(x, t) dx + \int_0^1 \omega_i(x) \psi(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \quad (x, t) \in D_T. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям с учетом условий (2)–(4) и (A4) получаем равенство

$$\partial_{0+,t}^\alpha h_i(t) - \int_0^1 \omega_i''(x) u(x, t) dx + p(t) h_i(t) = q(t) \int_0^1 \omega_i(x) f(x, t) dx + \int_0^1 \omega_i(x) \psi(x, t) dx, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Решая систему (16) относительно неизвестных функций $p(t)$ и $q(t)$, имеем следующие интегральные уравнения:

$$q(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 (-1)^j h_j(t) \left[\partial_{0+,t}^\alpha h_k(t) - \sum_{n=1}^\infty \psi_n(t) \omega_{kn} - \sum_{n=1}^\infty u_n(t; p; q) \omega_{kn}^{(2)} \right], \quad (17)$$

$$p(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 (-1)^j F_j(t) \left[\partial_{0+,t}^\alpha h_k(t) - \sum_{n=1}^\infty \psi_n(t) \omega_{kn} - \sum_{n=1}^\infty u_n(t; p; q) \omega_{kn}^{(2)} \right], \quad (18)$$

где

$$\Delta(t) = h_1(t)F_2(t) - h_2(t)F_1(t), \quad F_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\omega_{kn}, \quad k = 1, 2,$$

$$\omega_{kn} = \sqrt{2} \int_0^1 \omega_k(x) \sin(\lambda_n x) dx, \quad \omega_{kn}^{(2)} = \sqrt{2} \int_0^1 \omega_k''(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

Основным результатом работы является

Теорема 2. Пусть условия (A1)–(A4) выполнены и $\Delta(t) \neq 0$. Тогда существует число $T^* \in (0, T)$ такое, что существует единственное решение $p(t)$, $q(t) \in C[0, T^*]$ обратной задачи (1)–(4).

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение

$$g = \Lambda[g], \quad (19)$$

где $g = (g_1, g_2) := (p(t); q(t))$ — неизвестная вектор-функция. Компоненты (Λ_1, Λ_2) оператора Λ определяются правыми частями уравнений (17), (18):

$$\begin{aligned} \Lambda_1[g](t) &= g_{01}(t) + \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 (-1)^j F_j(t) \times \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2(t-\tau)^\alpha) [q(\tau)f_n(\tau) - p(\tau)u_n(\tau)] \omega_{kn}^{(2)} d\tau \right], \quad (20) \\ \Lambda_2[g](t) &= g_{02}(t) + \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 (-1)^j h_j(t) \times \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2(t-\tau)^\alpha) [q(\tau)f_n(\tau) - p(\tau)u_n(\tau)] \omega_{kn}^{(2)} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Здесь $g_0 := (g_{01}, g_{02})$,

$$\begin{aligned} g_{01}(t) &= \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 (-1)^j F_j(t) \left(\partial_{0+,t}^\alpha h_k(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \omega_{kn} - \right. \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n E_\alpha(-\lambda^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2(t-\tau)^\alpha) \psi_n(\tau) d\tau \right\} \omega_{kn}^{(2)} \Big), \\ g_{02}(t) &= \frac{1}{\Delta(t)} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^2 (-1)^j h_j(t) \left(\partial_{0+,t}^\alpha h_k(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \omega_{kn} - \right. \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n E_\alpha(-\lambda^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2(t-\tau)^\alpha) \psi_n(\tau) d\tau \right\} \omega_{kn}^{(2)} \Big). \end{aligned}$$

Рассмотрим функциональное пространство вектор-функции $g \in C(D_T)$ с нормой

$$\|g\| = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |g_1(t)|, \max_{t \in [0, T]} |g_2(t)| \right\}.$$

Зафиксируем число $\rho > 0$ и рассмотрим шар

$$\Phi^T(g_0, \rho) := \{g : \|g - g_0\|_{C[0,T]} \leq \rho\}.$$

Докажем, что для достаточно малого $T > 0$ оператор Λ переводит шар $\Phi^T(g_0, \rho)$ в себя. Для этого, используя оценки (9) для u_n , находим

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1[g](t) - g_{01}(t)\| &\leq \frac{2F_0\omega_0}{\delta} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \|g_1\| \|f_n\| E_\alpha(\|g_2\| T^\alpha), \\ \|\Lambda_2[g](t) - g_{02}(t)\| &\leq \frac{2\omega_0 h_0}{\delta} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{\infty} (\|g_1\| \|f_n\|) E_\alpha(\|g_2\| T^\alpha), \end{aligned}$$

где $\delta = \min\{|\Delta|\} > 0$, $\delta = \text{const}$, $F_0 = \max\{\|F_i(t)\|_{C[0,T]}\}$, $h_0 = \max\{\|h_i\|_{C^1[0,T]}\}$, $\omega_0 = \max\{\|\omega_i\|_{C^2[0,1]}\}$, $i = 1, 2$.

Ряды в оценках являются сходящимися согласно леммам 2, 3. Отметим, что функции, входящие в правые части этих неравенств, монотонно возрастают с ростом T , а также принадлежность функции $q(t)$ шару $\Phi^T(g_0, \rho)$ подразумевает неравенство

$$\|g\| \leq \rho + \|g_0\|. \quad (21)$$

Следовательно, усилим неравенство только в том случае, если заменим в этих неравенствах $\|g\|$ на соотношение $\rho + \|g_0\|$:

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1[g](t) - g_{01}(t)\| &\leq \frac{2F_0\omega_0}{\delta} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\rho + \|g_0\|) \|f_n\| \right] E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha), \\ \|\Lambda_2[g](t) - g_{02}(t)\| &\leq \frac{2\omega_0 h_0}{\delta} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\rho + \|g_0\|) \|f_n\| \right] E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha). \end{aligned}$$

Из этих соотношений вместе с (21)–(23) следуют оценка

$$\begin{aligned} \|\Lambda[g](t) - g_0(t)\| &= \max\{\|\Lambda_1[g](t) - g_{01}(t)\|, \|\Lambda_2[g](t) - g_{02}(t)\|\} \leq \\ &\leq \max\left\{\frac{2F_0\omega_0}{\delta}, \frac{2\omega_0 h_0}{\delta}\right\} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho + \|g_0\|) \|f_n\| E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha). \end{aligned}$$

Пусть T_1 — положительный корень уравнения

$$\max\left\{\frac{2F_0\omega_0}{\delta}, \frac{2\omega_0 h_0}{\delta}\right\} \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho + \|g_0\|) \|f_n\| E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) = \rho.$$

Тогда для $T \in [0, T_1]$ имеем $\Lambda[g](t) \in \Phi^T(g_0, \rho)$.

Теперь рассмотрим две функции $g(t)$, $\tilde{g}(t)$, принадлежащие $\Phi^T(g_0, \rho)$, и оценим расстояние между их образами $\Lambda[g](t)$ и $\Lambda[\tilde{g}](t)$ в пространстве $C[0, T]$. Функция $\tilde{u}_n(t)$, соответствующая $\tilde{g}(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (14) с $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$, $f_n = \tilde{f}_n$, $\psi_n = \tilde{\psi}_n$. Составив разность $\Lambda[g](t) - \Lambda[\tilde{g}](t)$ с помощью уравнений (8), (14) и затем оценив ее норму, получим

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1[g](t) - \Lambda_1[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{2F_0\omega_0}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n(T; g_1; g_2) - \tilde{u}_n(T; \tilde{g}_1; \tilde{g}_2)\| \leq \\ &\leq \frac{2F_0\omega_0}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |\bar{\varphi}_n| + \frac{T^\alpha \|\bar{\psi}_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha \|\bar{f}_n\| \|\tilde{g}_2\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha \|f_n\| \|\tilde{g}_2\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\|\bar{g}_1\| T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|g_2\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|g_1\| T^\alpha) \Big\} E_\alpha(\|\tilde{g}_1\| T^\alpha), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \|\Lambda_2[g](t) - \Lambda_2[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{2h_0\omega_0}{\delta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n(T; g_1; g_2) - \tilde{u}_n(T; \tilde{g}_1; \tilde{g}_2)\| \right) \leq \\ &\leq \frac{2h_0\omega_0}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |\bar{\varphi}_n| + \frac{T^\alpha \|\bar{\psi}_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha \|\bar{f}_n\| \|\tilde{g}_2\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha \|f_n\| \|\tilde{g}_2\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \\ &\left. + \frac{\|\bar{g}_1\| T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|g_2\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|g_1\| T^\alpha) \right\} E_\alpha(\|\tilde{g}_1\| T^\alpha). \end{aligned} \quad (23)$$

Используя неравенство (9) и оценку (15) с $\|\bar{g}\| = \|g - \tilde{g}\| = \max\{\|g_1 - \tilde{g}_1\|, \|g_2 - \tilde{g}_2\|\}$, $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$ и $f_n = \tilde{f}_n$, продолжим предыдущие неравенства:

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1[g](t) - \Lambda_1[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{2F_0\omega_0}{\delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{T^\alpha \|f_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|g_2\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|g_1\| T^\alpha) \right\} \right] E_\alpha(\|\tilde{g}_1\| T^\alpha) \|g - \tilde{g}\|, \\ \|\Lambda_2[g](t) - \Lambda_2[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{2h_0\omega_0}{\delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{T^\alpha \|f_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\|g_2\| \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha(\|g_1\| T^\alpha) \right\} \right] E_\alpha(\|\tilde{g}_1\| T^\alpha) \|g - \tilde{g}\|. \end{aligned}$$

Поскольку $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ принадлежат шару $\Phi^T(g_0, \rho)$, то для этих функций имеет место неравенство (21). Обратим внимание, что функции в правой части неравенства (19) в множителе $\|\bar{g}\|$ монотонно возрастают с ростом $\|g\|, \|\tilde{g}\|, T$. Следовательно, замена $\|g\|$ и $\|\tilde{g}\|$ в (19) на $\rho + \|g_0\|$ только усилит неравенство. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1[g](t) - \Lambda_1[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{2F_0\omega_0}{\delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{T^\alpha \|f_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ((\rho + \|g_0\|) \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \right\} \right] E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \|\bar{g}\|, \\ \|\Lambda_2[g](t) - \Lambda_2[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{2h_0\omega_0}{\delta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{T^\alpha \|f_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ((\rho + \|g_0\|) \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \right\} \right] E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \|\bar{g}\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\Lambda[g](t) - \Lambda[\tilde{g}](t)\| &\leq \max \left\{ \frac{2\omega_0 F_0}{\delta}, \frac{2\omega_0 h_0}{\delta} \right\} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{T^\alpha \|f_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ((\rho + \|g_0\|) \|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \right\} \right] E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \|\bar{g}\|. \end{aligned}$$

Пусть T_2 — положительный корень уравнения

$$\max \left\{ \frac{2\omega_0 F_0}{\delta}, \frac{2\omega_0 h_0}{\delta} \right\} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{T^\alpha \|f_n\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(|\varphi_n| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} ((\|\rho + \|g_0\|)\|f_n\| + \|\psi_n\|) \right) E_\alpha((\|\rho + \|g_0\|)T^\alpha) \right\} \right] E_\alpha((\|\rho + \|g_0\|)T^\alpha) \|\bar{g}\| = 1.$$

Тогда для $T \in [0, T_2)$ оператор Λ сокращает расстояние между элементами $g(t)$, $\tilde{g}(t) \in \Phi^T(g_0, \rho)$. Следовательно, если выберем $T^* < \min(T_1, T_2)$, то оператор Λ будет сжатием в шаре $\Phi^T(g_0, \rho)$. Тогда согласно теореме Банаха ([35], с. 87–97) оператор Λ имеет единственную неподвижную точку в шаре $\Phi^T(g_0, \rho)$, т.е. существует единственное решение уравнения (20). $\square$

5. ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА

Целью данного раздела является представление численного решения обратной задачи для уравнения дробной диффузии (1) с условиями (2)–(4), используя метод конечных разностей.

Пусть N_x — общее количество точек дискретизации. Следовательно, определяем $\Delta x = l/N_x$ как размер пространственного шага и обозначаем дискретизированные точки как $x_i = i\Delta x$, где $0 \leq i \leq N_x$ — целое положительное число. Пусть u_i^n — аппроксимация $u(x_i, t_n)$, где $t_n = n\Delta t$ и $\Delta t = T/N_t$ — размер временного шага, а N_t — общее количество временных шагов.

Дробную производную Капуто функции $u(x, t)$ в уравнении (1) можно дискретизировать следующим образом [36]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} \approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n a_j (u_i^{n-j+1} - u_i^{n-j}), \quad n \in (0, N_t), \quad (24)$$

где $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера и

$$a_j = (1+j)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}.$$

Используя аппроксимацию (24) для производной по времени и централизованную конечную разность второго порядка для пространственной производной, (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n a_j (u_i^{n-j+1} - u_i^{n-j}) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - q^n u_i^n + p^n f_i^n + \psi_i^n.$$

Тогда u_i^{n+1} в точке сетки i для временного шага $n+1$ приводит к уравнению

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{a_0} \left[\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha) (A_i^n + q^n u_i^n + p^n f_i^n + \psi_i^n) - B_i^n \right], \quad (25)$$

где

$$A_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad B_i^n = \sum_{j=1}^n a_j (u_i^{n-1+j} - u_i^{n-j}).$$

В (25) коэффициенты q^n и p^n неизвестны. Чтобы определить эти коэффициенты, сначала умножаем обе части уравнения (1) на $\omega_m(x)$ ($m = 1, 2$) и проинтегрируем от 0 до 1. После несложных преобразований и использования дополнительного условия получаем систему

$$p(t)F_m(t) - q(t)h_m(t) = C_m(t), \quad m = 1, 2,$$

где

$$F_m(t) = \int_0^1 \omega_m(x) f(x, t) dx, \quad m = 1, 2,$$

$$C_m(t) = \partial_{0+,t}^\alpha h_m(t) - \int_0^1 \omega_m''(x) u(x, t) dx - \int_0^1 \omega_m(x) \psi(x, t) dx, \quad m = 1, 2.$$

Перепишем эту систему в матричном виде

$$A = \begin{pmatrix} F_1(t) & -h_1(t) \\ F_2(t) & -h_2(t) \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

или

$$AX = C, \quad X = A^{-1}C,$$

где $F_1(t)h_2(t) - F_2(t)h_1(t) \neq 0$,

$$X^n = A^{-1,n}C^n,$$

$$X^n = \begin{pmatrix} p^n \\ q^n \end{pmatrix}, \quad C^n = C_m^n = \partial_{0+}^\alpha h_m^n - H_m^n - G_m^n, \quad m = 1, 2,$$

$$H_m^n = \omega_{m,0}\psi_0^n + \omega_{m,N_x}\psi_{N_x}^n + 2 \sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_{m,i}\psi_i^n, \quad m = 1, 2,$$

$$G_m^n = W_{m,0}u_0^n + W_{m,N_x}u_{N_x}^n + 2 \sum_{i=1}^{N_x-1} W_{m,i}u_i^n, \quad m = 1, 2,$$

$$W_{m,i} = \sum_{i=0}^{N_x} \frac{\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}}{\Delta x^2}, \quad m = 1, 2,$$

$$F_i^n = \omega_{m,0}f_0^n + \omega_{m,N_x}f_{N_x}^n + 2 \sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_{m,i}f_i^n, \quad m = 1, 2.$$

На основе этих уравнений был построен алгоритм для одновременного определения $u(x, t)$ и неизвестных коэффициентов $p(t)$, $q(t)$ и реализован на языке Python с открытым исходным кодом.

6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В этом разделе представлены численные результаты, полученные с помощью алгоритма, для тестового примера (26). Результаты представлены для трех разных значений α : 0.75, 0.85, 1. В этом примере рассматриваем $T = 0.1$ и $l = 1$. Результаты были проанализированы путем расчета относительной ошибки между точными и предполагаемыми решениями, определяемой как

$$\eta(u) = \max_{1 \leq i \leq N_x} |u_i^{\text{numerical}} - u_i^{\text{exact}}|,$$

$$\eta(p^n) = |p^{\text{numerical}} - p^{\text{exact}}|, \quad \eta(q^n) = |q^{\text{numerical}} - q^{\text{exact}}|.$$

Решаем обратную задачу (1)–(4) с входными данными

$$\varphi(x) = x^2(x-1), \quad f(x, t) = -6x + 2, \quad \omega_1 = x(x-1), \quad \omega_2 = x(x-1)^2, \quad \psi(x, t) = 0,$$

$$h_1(t) = \frac{1}{60}(1+t^\alpha), \quad h_2(t) = -\frac{1}{140}(1+t^\alpha) \quad (26)$$

для $x \in (0, l = 1)$ и $t \in (0, T = 0.1)$.

Алгоритм. Конечно-разностная схема восстановления $u(x, t)$ и неизвестных коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$

Require: α, l, N_x, T, N_t

Ensure: $u_i^0 = \varphi(x_i), f_i^n, w_{1,i}, w_{2,i}$

▷ For clarity $u_i^n = u(x_i, t_n), f_i^n = f(x_i, t_n)$

```

1:  $\Delta x = l/N_x, x_i = i\Delta x, N_x \leftarrow i$ 
2:  $\Delta t = T/N_t, t_n = n\Delta t, N_t \leftarrow n$ 
3: while  $n \leq N_t$  do
4:   while  $i \leq N_x - 1$  do
5:      $A_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$ 
6:     while  $j \leq n$  do
7:        $a_j = (j+2)^{1-\alpha} - (j+1)^{1-\alpha}$ 
8:        $B_i^n = \sum_{j=1}^n a_j (u_i^{n-j+1} - u_i^{n-j})$ 
9:     end while
10:   end while
11:   Evaluate  $p^n$  and  $q^n$ 
12:   while  $i \leq N_x - 1$  do
13:      $u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{a_0} (\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)) (A_i^n + q^n u_i^n + p^n f_i^n) - B_i^n$ 
14:   end while
15:    $u_0^{n+1} = u_{N_x-1}^{n+1} = 0$ 
16: end while

```

Точное решение задается выражениями

$$u(x, t) = (1 + t^\alpha)x^2(x - 1), \quad p(t) = 1 + t^\alpha, \quad q(t) = -\frac{\Gamma(1 + \alpha)}{1 + t^\alpha}.$$

В программе одномерная область дискретизировалась точками сетки N_x и шагом сетки $\Delta x = l/N_x$, где $l = 1$. Шаг времени между временными шагами Δt принимался равным $\Delta t = T/N_t$.

На рис. 1–3 представлены численные результаты для $u(x, t), p(t), q(t)$ при $\alpha = 1, \alpha = 0.85, \alpha = 0.75$ соответственно.

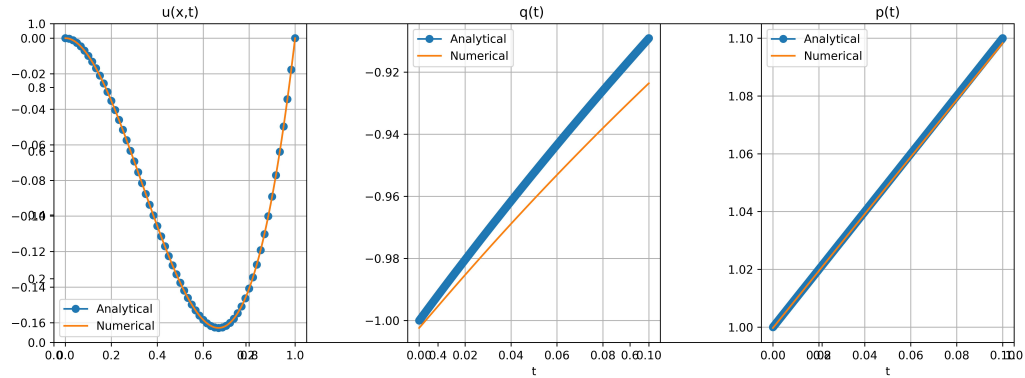
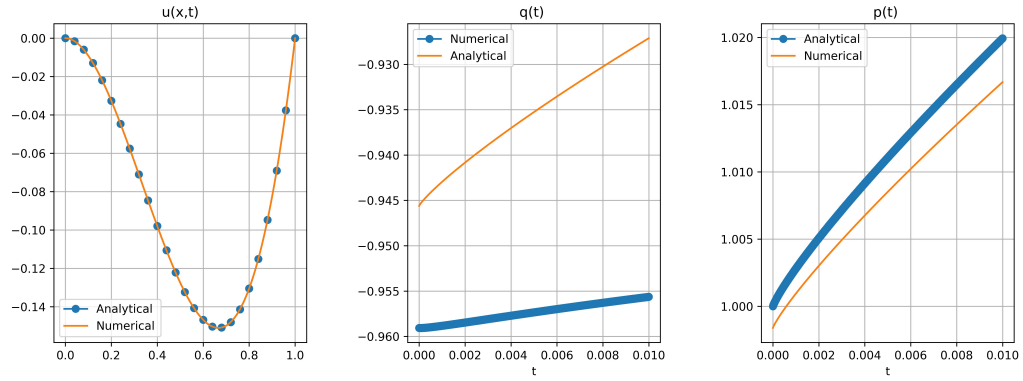
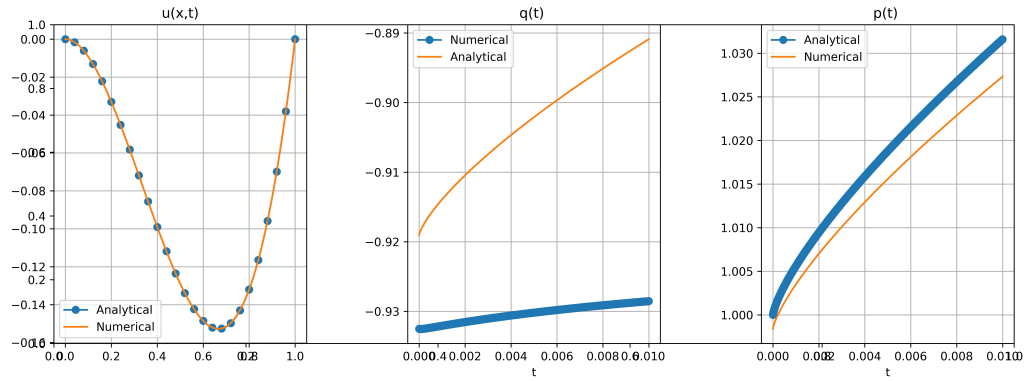


Рис. 1. $N_t = 50000, N_x = 320, T = 0.1, l = 1$

Рис. 2. $N_t = 100000$, $N_x = 150$, $T = 0.01$, $l = 1$ Рис. 3. $N_t = 200000$, $N_x = 150$, $T = 0.01$, $l = 1$

Значения относительных ошибок $\eta(u), \eta(p^n), \eta(q^n)$ между точным и численным решениями задач $u(x, t)$, $p(t)$, $q(t)$ соответственно приведены в таблицах 1–3.

ТАБЛИЦА 1. Относительная ошибка $\rho(u)$ между точным и аналитическим решением задачи $u(x, t)$

$\rho(u)$					
t	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\alpha = 1$	0.00000999	0.00000099	0.00000999	0.00003308	0.00004533
t	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01
$\alpha = 0.85$	0.00000999	0.00003564	0.00004857	0.00006074	0.00007246
$\alpha = 0.75$	0.00000999	0.00006002	0.00007989	0.00009827	0.00009999

ТАБЛИЦА 2. Относительная ошибка $\rho(p)$ между точным и аналитическим решением задачи $p(t)$

$\rho(p)$					
t	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\alpha = 1$	0.0005	0.0006	0.0007	0.0010	0.0013
t	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01
$\alpha = 0.85$	0.0021	0.0023	0.0026	0.0029	0.0032
$\alpha = 0.75$	0.0024	0.0029	0.0034	0.0038	0.0042

ТАБЛИЦА 3. Относительная ошибка $\rho(q)$ между точным и аналитическим решением задачи $q(t)$

$\rho(q)$					
t	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\alpha = 1$	0.0049	0.0054	0.0068	0.0092	0.0116
t	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01
$\alpha = 0.85$	0.0176	0.0206	0.0234	0.0260	0.0285
$\alpha = 0.75$	0.0210	0.0259	0.0301	0.0340	0.0376

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследована обратная задача для уравнения диффузии с учетом начально-краевых и интегральных условий переопределения. Во-первых, прямая задача преобразуется в эквивалентное интегральное уравнение с использованием метода Фурье. Существование и единственность решения этой эквивалентной задачи доказаны путем применения оценок функции Миттаг–Леффлера и неравенства Гронуолла. Во второй части изучали обратную задачу. Используя принцип сжимающего отображения, доказали локальное существование и единственность решения обратной задачи. В работе разработан алгоритм для численного восстановления зависящих от времени коэффициентов с использованием конечного числа шагов во времени и пространстве. Экспериментально продемонстрирована эффективность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Agarwal R., Sharma U.P., Agarwal R.P. *Bicomplex Mittag-Leffler function and associated properties*, J. Nonlinear Sci. Appl. **15** (1), 48–60 (2022).
- [2] Baglan I. *Determination of a coefficient in a quasilinear parabolic equation with periodic boundary condition*, Inverse Probl. Sci. Engin. **23** (5), 884–900 (2015), DOI: 10.1080/17415977.2014.947479.
- [3] Буда́к Б.М., Самарский А.А., Тихо́нов А.Н. *Сборник задач по математической физике* (Наука, М., 1979).
- [4] Kanka F. *Inverse Coefficient Problem of the Parabolic Equation with Periodic Boundary and Integral Overdetermination Conditions*, Abstract Appl. Anal. (5) (2015), DOI: 10.1155/2013/659804.
- [5] Ivanchov M.I., Pabyrivs'ka N. *Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions*, Ukr. Math. J. **53** (5), 674–684 (2001).

- [6] Durdiev D.K., Jumaev J.J., Atoev D.D. *Convolution kernel determining problem for an integro-differential heat equation with nonlocal initial-boundary and overdetermination conditions*, J. Math. Sci. **271** (1), 1–10 (2023), DOI: 10.1007/s10958-023-06263-x.
- [7] Liao W., Dehghan M., and Mohebbi A. *Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation*, J. Comput. Appl. Math. **232** (2), 351–360 (2009).
- [8] Oussaeif T.E., Abdelfatah B. *An Inverse Coefficient Problem for a Parabolic Equation under Nonlocal Boundary and Integral Overdetermination Conditions*, Intern. J. Part. Diff. Equat. Appl. **2** (3), 38–43 (2014).
- [9] Kanca F. *The inverse problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions*, J. Inequal. Appl. **108**, 1–9 (2013).
- [10] Cannon J.R., Lin Y., and Wang S. *Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation*, ANZIAM **33**, 149–163 (1991), DOI: 10.1017/S0334270000006962.
- [11] Huzyk N.M. *Nonlocal inverse problem for a parabolic equation with degeneration*, Ukr. Math. J. **65** (6), 847–863 (2013).
- [12] Durdiev D.K., Jumaev J.J. *Inverse Coefficient Problem for a Time-Fractional Diffusion Equation in the Bounded Domain*, Lobachevskii J. Math. **44** (2), 548–557 (2023).
- [13] Durdiev D.K., Rahmonov A.A. *A multidimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Turkish J. Math. **46** (6), 2250–2263 (2022), DOI: 10.55730/1300-0098.3266.
- [14] Durdiev D.K., Rahmonov A.A., Bozorov Z.R. *A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Math. Methods Appl. Sci. **44** (13), 10753–10761 (2021), DOI: 10.1002/mma.7442.
- [15] Subhonova Z.A., Rahmonov A.A. *Problem of determining the time dependent coefficient in the fractional diffusion-wave equation*, Lobachevskii J. Math. **42** (15), 3747–3760 (2021).
- [16] Sultanov M.A., Durdiev D.K., Rahmonov A.A. *Construction of an Explicit Solution of a Time-Fractional Multidimensional Differential Equation*, Mathematics **9** (17), 2052 (2021).
- [17] Турдиев Х.Х. *Обратные коэффициентные задачи для временно-дробного волнового уравнения с обобщенной производной Римана-Лиувилля по времени*, Изв. вузов. Матем. (10), 46–59 (2023).
- [18] Дурдиев У.Д. *Обратная задача об источнике для уравнения вынужденных колебаний балки*, Изв. вузов. Матем. (8), 10–22 (2023).
- [19] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Обратная задача определения ядра интегро-дифференциального уравнения дробной диффузии в ограниченной области*, Изв. вузов. Матем. (10), 22–35 (2023), DOI: 10.26907/0021-3446-2023-10-22-35.
- [20] Дурдиев Д.К., Болтаев А.А., Рахмонов А.А. *Задача определения ядра типа свертки в уравнении Мура-Гибсона-Томсона третьего порядка*, Изв. вузов. Матем. (12), 3–16 (2023).
- [21] Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M., Kerimov N. *Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions*, Appl. Math. Comput. **346** (C), 800–815 (2019).
- [22] Colombo F. *An inverse problem for a parabolic integro-differential model in the theory of combustion*, Physica D: Nonlinear Phenomena **236** (2), 81–89 (2007), DOI: 10.1016/j.physd.2007.07.012.
- [23] Durdiev D.K., Nuriddinov Z.Z. *Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation*, Журн. СВУ. Сер. Матем. Физ. **14** (1), 117–127 (2021).
- [24] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor*, Math. Methods Appl. Sci. **45** (14), 8374–8388 (2022).
- [25] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integro-differential heat equation in a bounded domain*, Ukr. Math. J. **73** (11), 1723–1740 (2022).
- [26] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation*, Methods Funct. Anal. Topology **25** (3), 219–226 (2019).
- [27] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Задача определения тепловой памяти проводящей среды*, Дифференц. уравнения **56** (6), 796–807 (2020).
- [28] Janno J., Wolfersdorf L. *Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow*, J. Inv. Ill-Posed Probl. **4** (1), 39–66 (1996).
- [29] Durdiev D.K. and Durdiev D.D. *An inverse problem of finding a time-dependent coefficient in a fractional diffusion equation*, Turkish J. Math. **47** (5), 1438–1452 (2023).
- [30] Kardashevsky A.M., Popov V.V., Guo Z. *Recovery of the non-stationary component of the right-hand side of the subdiffusion equation*, Eurasian J. Matp. Comput. Appl. **12** (1), 83–93 (2024).
- [31] Lingde Su, Jian Huang, Vasil'ev V., Ao Li, Kardashevsky A.M. *A numerical method for solving retrospective inverse problem of fractional parabolic equation*, J. Comput. Appl. Math. **413** (1), 114366 (2022), DOI: 10.1016/j.cam.2022.114366.

- [32] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (Elsevier, Amsterdam, 2006).
- [33] Kang B., Koo N. *A note on generalized singular Gronwall inequalities*, J. Chung. Math. Soc. **31** (1), 161–166 (2018).
- [34] Lakshmikantham V., Leela S., and Devi J.V. *Theory of fractional dynamic systems* (Cambridge Scientific Publishers Ltd, Cambridge, 2009).
- [35] Колмогоров А., Фомин С. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1972).
- [36] Changpin L., Fanhai Z. *Finite difference methods for fractional differential equations*, Internat. J. Bifurcat. Chaos Appl. Sci. Engin. **22** (4), 1–28, 1230014 (2012), DOI: 10.1142/S0218127412300145.

Жонибек Жамолович Жумаев

*Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,
e-mail: jonibekjj@mail.ru*

Завкиддин Равшанович Бозоров

*Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,
e-mail: zavqiddinbozorov2011@mail.ru*

Дурдимурод Каландарович Дурдиев

*Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,
e-mail: d.durdiev@mathinst.uz*

J.J. Jumaev, Z.R. Bozorov, and D.K. Durdiev

Numerical solution of the problem of finding two unknowns in time-fractional diffusion equations

Abstract. We study an inverse problem for a time-fractional diffusion equation with initial-boundary and overdetermination conditions. This inverse problem aims to determine a time varying coefficient and source in the equation with overdetermination integral conditions. First, we establish the unique existence of the classical solution using the Fourier method, Gronwall inequality for direct problem. Second, by using the fixed point theorem in Banach space, the local existence and uniqueness of this inverse problem are obtained. To verify the theoretical results, a numerical solution to the problem was constructed using the finite difference method. Finally, a numerical example is presented to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: time-fractional diffusion equation, inverse problem, integral equation, Gronwall inequality, finite difference method.

Jonibek Jamolovich Jumaev

*Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;*

*Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,*
e-mail: jonibekjj@mail.ru

*Zavqiddin Ravshanovich Bozorov
Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,*
e-mail: zavqiddinbozorov2011@mail.ru

*Durdimurod Kalandarovich Durdiev
Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,*
e-mail: d.durdiev@mathinst.uz