

И.Б. КОЖУХОВ, А.С. СОТОВ

УСЛОВИЯ КАНТОРОВОСТИ И КОКАНТОРОВОСТИ ПОЛИГОНОВ НАД ТРИВИАЛЬНОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Аннотация. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы полигон X над тривиальной полугруппой был канторовым (соответственно коканторовым), т. е. чтобы для любого полигона Y из существования инъективных (соответственно сюръективных) гомоморфизмов $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$ следовал изоморфизм $X \cong Y$.

Ключевые слова: полигон над полугруппой, условие конечности, канторовость, коканторовость.

УДК: 512.534.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-6-45-56

ВВЕДЕНИЕ

Полигоном над полугруппой S называется множество X , на котором действует полугруппа S , т. е. определено отображение $X \times S \rightarrow X$, $(x, s) \rightarrow xs$ такое, что $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$ и $s, t \in S$ [1], [2]. Полигон является алгебраической моделью автомата [3]. Кроме того, понятие полигона фактически совпадает с понятием представления полугруппы S преобразованиями множества X , а также с понятием унарной алгебры [4].

Полигоны над полугруппами относительно простого строения могут быть описаны. Так, в работе [5] были описаны полигоны над вполне простыми полугруппами и полигоны с нулем над вполне 0-простыми полугруппами. Ряд работ посвящен условиям конечности в полигонах над полугруппами такими, как артиновость, нётеровость, хопфовость, кохопфовость, канторовость, коканторовость (см., например, [6]–[9]).

Хорошо известная теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна ([10], следствие 4.4) утверждает, что для любых множеств A и B существование вложений $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ влечет существование взаимно однозначного отображения $A \rightarrow B$.

Возникает вопрос: останется ли эта теорема верной, если вместо произвольных множеств и отображений брать универсальные алгебры и гомоморфизмы? Другими словами: верно ли, что если универсальные алгебры A и B изоморфно вкладываются друг в друга, то имеет место изоморфизм $A \cong B$? В общем случае ответ отрицательный. Например, пусть A и B — свободные группы с двумя и тремя свободными образующими соответственно, тогда они изоморфно вкладываются друг в друга, но не изоморфны. Назовем алгебру A канторовой, если для нее утверждение теоремы, аналогичной теореме Кантора–Шрёдера–Бернштейна, верно. А именно, алгебра A называется *канторовой*, если для любой алгебры B той же сигнатуры наличие изоморфных вложений $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ влечет изоморфизм $A \cong B$. Из

определения следует, что канторовость является условием конечности, так как конечные алгебры этому условию удовлетворяют.

Нетрудно видеть, что теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна останется верной, если вложения (инъективные отображения) заменить наложениями (сюръективными отображениями). То есть наличие наложений $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ влечет существование взаимно однозначного отображения $A \rightarrow B$. Однако если A и B — алгебры, то существование сюръективных гомоморфизмов $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ не гарантирует изоморфизма A и B — примеры можно найти, скажем, среди абелевых групп. В связи с этим возникает определение коканторовой алгебры. А именно, универсальную алгебру A назовем *коканторовой*, если для любой алгебры B той же сигнатуры наличие сюръективных гомоморфизмов $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$ влечет изоморфизм $A \cong B$. Очевидно, коканторовость также является условием конечности.

Тривиальной полугруппой назовем полугруппу, состоящую из одного элемента: $S = \{e\}$.

Целью данной работы является описание канторовых и коканторовых полигонов над тривиальной полугруппой.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть X — полигон над полугруппой S . Элемент $z \in X$ называется *нулем*, если $zs = z$ для всех $s \in S$. Нуль z назовем *изолированным*, если для любых $x \in X$ и $s \in S$ верна импликация $xs = z \rightarrow x = z$. Пусть S — полугруппа с единицей e ; полигон X над S называется *унитарным*, если $xe = x$ для всех $x \in X$. Пусть теперь S — любая полугруппа, не обязательно имеющая единицу; полигон X над S назовем *квазиунитарным*, если $XS = X$. Нетрудно видеть, что для полугрупп с единицей понятия унитарного и квазиунитарного полигона совпадают.

Копроизведение — понятие, двойственное прямому произведению. Если $\{X_i | i \in I\}$ — семейство полигонов над одной и той же полугруппой S , то их *копроизведение* $X = \coprod_{i \in I} X_i$ — это дизъюнктивное объединение полигонов X_i (в случае если эти полигоны имеют непустые пересечения друг с другом, то мы берем их изоморфные копии, попарно не пересекающиеся). Хотя пустое множество мы не считаем полигоном или подполигоном, условно будем полагать, что $X \sqcup \emptyset = X$. Любой полигон X можно рассматривать как граф, множеством вершин которого является множество X , а ребрами являются пары (x, xs) , где $x \in X$, а $s \in S$. Полигон называется *связным*, если соответствующий граф связан. Очевидно, всякий полигон является копроизведением связных подполигонов — *компонент связности*.

Для каждого множества X отношение Δ_X будет обозначать у нас отношение равенства на X , т. е. $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$. Тожественное отображение $X \rightarrow X$ будет обозначаться id_X ($\text{id}_X : x \mapsto x$). Пусть X — полигон над какой-либо полугруппой S . Решетку конгруэнций полигона X мы будем обозначать $\text{Con}X$. Пусть X — полигон и Y — его подполигон. Нетрудно проверить, что отношение $\rho(Y) = (Y \times Y) \cup \Delta_X$ является конгруэнцией полигона X ; такая конгруэнция называется *конгруэнцией Руса*. Для фактор-полигона $X/\rho(Y)$ будем также использовать краткое обозначение X/Y .

В работе [11] было доказано, что все унитарные полигоны над группой являются канторовыми. Затем в работе [12] этот результат был обобщен на квазиунитарные полигоны над вполне простой или вполне 0-простой полугруппой. Иная ситуация для коканторовости: необходимые и достаточные условия коканторовости унитарного полигона над группой авторам неизвестны. До конца вопрос о коканторовости пока решен лишь для унитарных циклических полигонов. А именно: несложно показать, что все унитарные циклические полигоны над группой G коканторовы в том и только том случае, когда группа G удовлетворяет следующему условию: для любых подгрупп H_1, H_2 , если H_1 содержится в подгруппе,

сопряженной с H_2 , и H_2 содержится в подгруппе, сопряженной с H_1 , то H_1 и H_2 сопряжены. Авторам неизвестны необходимые и достаточные условия коканторовости также полигонов над полугруппами правых или левых нулей. В работе [13] были получены необходимые и достаточные условия канторовости полигона над конечной полурешеткой, у которого все компоненты связности конечны. До конца удастся решить вопрос о коканторовости пока лишь для полигонов над тривиальной полугруппой. Полигон над тривиальной полугруппой $S = \{e\}$ — это фактически пара (X, φ) , где X — произвольное непустое множество, а $\varphi : X \rightarrow X$ — идемпотентное отображение.

В случае, когда $S = \{e\}$ — тривиальная полугруппа, компоненты связности, очевидно, имеют вид $\{z\} \cup Y$, где $ye = ze = z$ для всех $y \in Y$ (т.е. являются полигонами с нулевым умножением). Понятно, что эти полигоны с точностью до изоморфизма определяются мощностью множества Y . Пусть $|Y| = \mathbf{m}$. Тогда будем обозначать $A(\mathbf{m}) = \{z\} \cup Y$. Копроизведение $\mathbf{m}$ экземпляров одного и того же полигона A мы будем обозначать через $\coprod_{\mathbf{m}} A$.

Как уже отмечалось, всякий полигон над тривиальной полугруппой является копроизведением полигонов вида $A(\mathbf{m})$. Для каждого кардинального числа $\mathbf{m}$ мощность множества компонент связности полигона X , изоморфных $A(\mathbf{m})$, мы будем называть *кратностью* компоненты $A(\mathbf{m})$ в X . Если в разложении полигона X на компоненты связности нет компонент, изоморфных $A(\mathbf{m})$, то кратность этой компоненты мы будем считать равной нулю.

Для дальнейшего нам будут удобны следующие характеристики канторовых и коканторовых алгебр, справедливость которых непосредственно вытекает из определений.

Лемма 1. (i) Алгебра A канторова в том и только том случае, если для любых подалгебр A_1, A_2 из изоморфизма $A_1 \cong A$ и включения $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ следует $A_2 \cong A$;

(ii) алгебра A коканторова в том и только том случае, если для любых конгруэнций ρ_1, ρ_2 из изоморфизма $A/\rho_1 \cong A$ и включения $\rho_2 \subseteq \rho_1$ следует $A/\rho_2 \cong A$.

2. УСЛОВИЯ КАНТОРОВОСТИ

В данном разделе мы получим необходимые и достаточные условия канторовости полигона над тривиальной полугруппой. Начнем с одного утверждения о полигонах над произвольной полугруппой.

Предложение. Пусть X — полигон над произвольной полугруппой. Если X имеет лишь конечное число компонент связности, каждая из которых является канторовым полигоном, то X канторов.

Доказательство. Пусть $X = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \dots \sqcup Y_k$ — разложение полигона X на компоненты связности и X_1, X_2 — такие его подполигоны, что $X_1 \subseteq X_2$ и $X_1 \cong X$. Ввиду леммы 1, (i) нам достаточно показать, что $X_2 \cong X$. Обозначим $I = \{1, 2, \dots, k\}$. Так как $X \cong X_1$, то существует изоморфизм $\varphi : X \rightarrow X_1$. Поскольку при любом гомоморфизме связный полигон переходит в связный, для любого i мы имеем $\varphi(Y_i) \subseteq Y_j$ при некотором j . Таким образом, получаем отображение $\bar{\varphi} : I \rightarrow I$, $\varphi(Y_i) \subseteq Y_{\bar{\varphi}(i)}$. Так как φ инъективно, то $\bar{\varphi}$ тоже инъективно. Поскольку множество I конечно, $\bar{\varphi}$ — подстановка:

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}.$$

Возьмем такое N , что $\bar{\varphi}^N = \text{id}_I$. Тогда $\varphi^N(Y_i) \subseteq Y_i$ при всех i . Очевидно, φ^N — изоморфизм полигонов X и $\varphi^N(X)$. По условию $X_2 \supseteq X_1$, а значит, $X_2 \supseteq \varphi^N(X)$. Имеем $X = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \dots \sqcup Y_k$, $\varphi^N(X) = Y'_1 \sqcup Y'_2 \sqcup \dots \sqcup Y'_k$, где $Y'_i = \varphi^N(Y_i)$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Так как X_2 — подполигон полигона X и $X_2 \supseteq \varphi^N(X)$, то $X_2 = Y''_1 \sqcup Y''_2 \sqcup \dots \sqcup Y''_k$, где $Y'_i \subseteq Y''_i \subseteq Y_i$ при

Лемма 4. Пусть X канторов. Тогда бесконечные компоненты связности имеют конечные кратности.

Лемма 5. *Полигон $X = \coprod_{\mathfrak{p}_0} A(0) \sqcup \coprod_{\mathfrak{p}_1} A(1) \sqcup \dots \sqcup \coprod_{\mathfrak{p}_k} A(k)$, где $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_1 > \dots > \mathfrak{p}_k \geq \aleph_0$, канторов.*

Для $t = 0, 1, \dots, k$ и $j = 0, 1, \dots, t$ положим $I_t^{(j)} = \{i \in I_t | Z_i \cong A(j)\}$, $\mathfrak{p}_t^j = |I_t^{(j)}|$. Для изоморфизма $X_1 \cong X$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}_0^{(0)} + \mathbf{p}_1^{(0)} + \dots + \mathbf{p}_k^{(0)}, \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_1^{(1)} + \mathbf{p}_2^{(0)} + \dots + \mathbf{p}_k^{(1)}, \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_{k-1} &= \mathbf{p}_{k-1}^{(k-1)} + \mathbf{p}_k^{(k-1)}, \\ \mathbf{p}_k &= \mathbf{p}_k^{(k)}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_i^{(j)} = \mathbf{p}_j \text{ при } j = 0, 1, \dots, k. \quad (3)$$

Теперь мы можем доказать теорему, дающую полное описание полигонов над тривиальной полугруппой, являющихся канторовыми.

$$\left[\coprod_{\mathfrak{p}_0} A(0) \sqcup \dots \sqcup \coprod_{\mathfrak{p}_k} A(k) \right] \sqcup \coprod_{n_l} A(\mathfrak{m}_1) \sqcup \dots \sqcup \coprod_{n_l} A(\mathfrak{m}_l) \quad (4)$$

для некоторых $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_l, n_1, \dots, n_l$ таких, что $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_1 > \dots > \mathfrak{p}_k \geq \aleph_0$, $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_l \geq 0$, $n_1, \dots, n_l < \aleph_0$. Квадратные скобки означают, что часть формулы внутри этих скобок может отсутствовать.

Доказательство. Будем условно считать, что отсутствие части формулы внутри квадратных скобок происходит при $k = -1$. Часть формулы вне квадратных скобок тоже может отсутствовать — это будет при $l = 0$.

Докажем *необходимость* сформулированных условий канторовости. Пусть X — канторов полигон над тривиальной полугруппой. Если кратности всех его компонент связности конечны, то по лемме 2 имеется лишь конечное число попарно неизоморфных компонент, а значит, полигон X имеет вид (4), где $k = -1$. Далее будем считать, что существует компонента связности $A(\mathfrak{m})$ бесконечной кратности $\mathfrak{p}$. Тогда по лемме 4 $\mathfrak{m} < \aleph_0$. Пусть $\mathfrak{p}_i$ — кратность компоненты $A(i)$ для натурального числа i . В силу леммы 3 имеем $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2 > \dots$, а так как не существует бесконечной убывающей последовательности кардинальных чисел, то существует натуральное число k такое, что $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_1 > \dots > \mathfrak{p}_k$ — кратности компонент связности $A(0), A(1), \dots, A(k)$, а также число l такое, что $n_1, \dots, n_l$ — натуральные числа, являющиеся кратностями компонент $A(\mathfrak{m}_1), \dots, A(\mathfrak{m}_l)$ соответственно. Теперь ясно, что X имеет вид (4). При этом $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_l$ — любые кардинальные числа (конечные или бесконечные). Для однозначности вида (4) можно считать, что $\mathfrak{m}_i > k$ при $i = 1, 2, \dots, l$.

Теперь докажем *достаточность*. Предположим, что

$$X = \left[\prod_{\mathfrak{p}_0} A(0) \sqcup \dots \sqcup \prod_{\mathfrak{p}_k} A(k) \right] \sqcup \prod_{n_l} A(\mathfrak{m}_1) \sqcup \dots \sqcup \prod_{n_l} A(\mathfrak{m}_l),$$

где $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_1 > \dots > \mathfrak{p}_k \geq \aleph_0$.

Из обычной теоремы Кантора–Шрёдера–Бернштейна следует, что для любого кардинального числа $\mathfrak{m}$ полигон $A(\mathfrak{m})$ канторов. Отсюда согласно предложению 1 следует, что любой полигон вида (4) при $k = -1$ канторов. Поэтому далее будем считать, что $k \geq 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что $k < \mathfrak{m}_1 < \dots < \mathfrak{m}_l$. Доказательство канторовости полигона X проведем индукцией по l . При $l = 0$ полигон X канторов по лемме 5. Далее будем считать, что $l > 0$. Имеем

$$X = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_k \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_l,$$

где $U_i \cong \prod_{\mathfrak{p}_i} A(i)$ при $i = 0, 1, \dots, k$ и $V_j \cong \prod_{n_j} A(\mathfrak{m}_j)$ при $j = 1, 2, \dots, l$. Пусть X_1, X_2 — подполигоны такие, что $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ и $X_1 \cong X$. Требуется доказать, что $X_2 \cong X$. Имеем

$$X_1 = U'_1 \sqcup \dots \sqcup U'_k \sqcup V'_1 \sqcup \dots \sqcup V'_l,$$

$$X_2 = U''_1 \sqcup \dots \sqcup U''_k \sqcup V''_1 \sqcup \dots \sqcup V''_l,$$

где $U'_i = U_i \cap X_1$, $U''_i = U_i \cap X_2$, $V'_j = V_j \cap X_1$, $V''_j = V_j \cap X_2$, а значит, $U''_i \subseteq U'_i \subseteq U_i$ и $V''_j \subseteq V'_j \subseteq V_j$ при всех i, j . Так как $X_1 \cong X$, то $A(\mathfrak{m}_l)$ имеет одинаковую кратность в X_1 и X , а именно, кратность n_l . Следовательно, $V_l = V'_l$, поэтому $V''_l = V_l$. Положим

$$\tilde{X} = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_k \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_{l-1},$$

$$\tilde{X}_1 = U'_1 \sqcup \dots \sqcup U'_k \sqcup V'_1 \sqcup \dots \sqcup V'_{l-1},$$

$$\tilde{X}_2 = U''_1 \sqcup \dots \sqcup U''_k \sqcup V''_1 \sqcup \dots \sqcup V''_{l-1}.$$

Ввиду неравенств $k < \mathfrak{m}_1 < \dots < \mathfrak{m}_l$ полигон $\tilde{X}$, а значит, и полигоны $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ не имеют подполигонов, изоморфных $A(\mathfrak{m}_l)$. При изоморфизме X и X_1 полигон V_l переходит в

V'_l , а значит, $\tilde{X}$ переходит в $\tilde{X}_1$. Следовательно, $\tilde{X} \cong \tilde{X}_1$. При этом $\tilde{X}_1 \subseteq \tilde{X}_2 \subseteq \tilde{X}$. По предположению индукции $\tilde{X}_2 \cong \tilde{X}$. Таким образом, $X_2 \cong X$. $\square$

Следствие 1. Над тривиальной полугруппой копроизведение конечного числа канторовых полигонов канторово.

Отметим, что авторам неизвестно, верно ли это утверждение для полигонов над произвольной полугруппой.

3. УСЛОВИЯ КОКАНТОРОВОСТИ

Перейдем к условиям коканторовости полигона над тривиальной полугруппой.

Лемма 6. Пусть X — коканторов полигон над тривиальной полугруппой $S = \{e\}$, $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2$ — кардинальные числа, а $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ — кратности в X компонент связности, изоморфных, соответственно, полигонам $A(\mathfrak{m}_1)$ и $A(\mathfrak{m}_2)$. Если $\mathfrak{p}_2 \geq \aleph_0$, то $\mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. $\mathfrak{p}_1 \leq \mathfrak{p}_2$. Имеем

$$X = \coprod_{i \in I} Y_i \sqcup \coprod_{j \in J} Z_j \sqcup X',$$

где $Y_i \cong A(\mathfrak{m}_1)$, $Z_j \cong A(\mathfrak{m}_2)$, $|I| = \mathfrak{p}_1$, $|J| = \mathfrak{p}_2$, а X' — либо $\emptyset$, либо подполигон, не имеющий компонент связности, изоморфных $A(\mathfrak{m}_1)$ или $A(\mathfrak{m}_2)$. Отметим, что мы не исключаем случай $I = \emptyset$.

Рассмотрим сначала случай, когда $I \neq \emptyset$. Так как $|I| \leq |J|$ и J бесконечно, то в J найдется подмножество K такое, что $|K| = |I|$, а $|J \setminus K| = |J|$. Возьмем какое-либо $j_0 \in J \setminus K$ и обозначим через z нуль полигона Z_{j_0} . Положим $Q = \coprod_{i \in I} Y_i \sqcup \{z\}$. Очевидно, Q — подполигон полигона X . Пусть $\rho_2 = \rho(Q)$ — конгруэнция Риса, соответствующая подполигону Q . Фактор-полигон X/ρ_2 имеет вид $X/\rho_2 \cong \coprod_{j \in J} Z_j \sqcup X'$. Так как полигон X/ρ_2 не содержит компонент связности, изоморфных $A(\mathfrak{m}_1)$, а X содержит, то $X/\rho_2 \not\cong X$.

Так как $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2$, то мы можем в полигоне Z_j найти подполигон W_j такой, что $Z_j/W_j \cong A(\mathfrak{m}_1)$. Сделаем это для каждого $j \in K$. Рассмотрим следующее отношение на множестве X :

$$\rho_1 = \{(x, x') | (x, x') \in \rho_2 \text{ или } x, x' \in W_j \text{ при некотором } j \in K\}.$$

Докажем, что ρ_1 — конгруэнция полигона X . Рефлексивность и симметричность отношения ρ_1 очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $(x_1, x_2), (x_2, x_3) \in \rho_1$. Если $x_1 = x_2$ или $x_2 = x_3$, или $x_1 = x_3$, то соотношение $(x_1, x_3) \in \rho_1$ очевидно. Пусть теперь x_1, x_2, x_3 различны. Так как $(x_1, x_2) \in \rho_1$ и $x_1 \neq x_2$, то $x_1, x_2 \in Q$ или $x_1, x_2 \in W_j$ при некотором $j \in K$. Аналогично этому $x_2, x_3 \in Q$ или $x_2, x_3 \in W_j$ при некотором $j \in K$. Так как $Q \cap W_j = \emptyset$ при $j \in K$, то либо $x_1, x_2, x_3 \in Q$, либо $x_1, x_2, x_3 \in W_j$ при некотором $j \in K$. Следовательно, $(x_1, x_3) \in \rho_1$, а значит, ρ_1 транзитивно. Из определения ρ_1 видно, что $(x_1, x_2) \in \rho_1 \rightarrow (x_1e, x_2e) \in \rho_1$. Следовательно, ρ_1 — конгруэнция.

Фактор-полигон X/ρ_1 имеет вид:

$$X/\rho_1 \cong \coprod_{j \in K} (Z_j/W_j) \sqcup \coprod_{j \in J \setminus K} Z_j \sqcup X' \cong \coprod_{j \in K} A(\mathfrak{m}_1) \sqcup \coprod_{j \in J \setminus K} A(\mathfrak{m}_2) \sqcup X'.$$

Так как $|K| = |I|$ и $|J \setminus K| = |J|$, то $X/\rho_1 \cong X$. В то же время $X/\rho_2 \not\cong X$, так как в X есть компонента связности, изоморфная $A(\mathfrak{m}_1)$, а в X/ρ_2 ее нет. Так как $\rho_2 \subset \rho_1$, то мы получаем противоречие с тем, что полигон X коканторов.

Осталось рассмотреть случай, когда $I = \emptyset$. В этом случае $X = \coprod_{j \in J} Z_j \sqcup X'$. Возьмем какое-либо $j_0 \in J$ и выберем подполигон $W \subseteq Z_{j_0}$ такой, что $Z_{j_0}/W \cong A(\mathfrak{m}_1)$. Пусть $\rho_2 = \rho(W)$ — рисовская конгруэнция на X , соответствующая подполигону Q . Возьмем элемент $j_1 \in J$ такой, что $j_1 \neq j_0$, и обозначим через z нуль полигона Z_{j_1} . Пусть $\rho_1 = \rho(W \cup \{z\})$ — рисовская конгруэнция. Имеем

$$X/\rho_2 = (Z_{j_0}/W) \sqcup \coprod_{j \in J \setminus \{j_0\}} Z_j \sqcup X', \quad X/\rho_1 = \coprod_{j \in J \setminus \{j_0\}} Z_j \sqcup X'.$$

Так как J бесконечно, то $|J \setminus \{j_0\}| = |J|$, поэтому $X/\rho_1 \cong X$. В то же время $X/\rho_2 \not\cong X$, так как полигон X/ρ_2 содержит компоненту связности, изоморфную $A(\mathfrak{m}_1)$, а X не содержит. Поскольку $\rho_2 \subset \rho_1$, в силу леммы 1, (ii) мы получаем, что X не является коканторовым. $\square$

Следующая лемма о коканторовых полигонах аналогична лемме 2, доказанной ранее для канторовых полигонов.

Лемма 7. *Пусть X — коканторов полигон над тривиальной полугруппой. Тогда X не может иметь бесконечно много компонент связности конечных кратностей.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда $X = \coprod_{n_1} A(\mathfrak{m}_1) \sqcup \coprod_{n_2} A(\mathfrak{m}_2) \sqcup \dots \sqcup X'$, где $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \dots$ — кардинальные числа, $n_1, n_2, \dots$ — целые положительные числа, а подполигон X' не имеет компонент связности, изоморфных какому-либо из $A(\mathfrak{m}_i)$.

Пусть $U = \coprod_{n_2} A(\mathfrak{m}_2) \sqcup \coprod_{n_3} A(\mathfrak{m}_3) \sqcup \dots \sqcup X'$. Покажем, что существует сюръективный гомоморфизм $\varphi : X \rightarrow U$. Действительно, если z — нуль полигона $A(\mathfrak{m}_2)$ (какого-либо из n_2 экземпляров этого полигона), то отображение, определенное формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} z, & \text{если } x \in \coprod_{n_1} A(\mathfrak{m}_1); \\ x, & \text{если } x \in U, \end{cases} \quad (4)$$

является сюръективным гомоморфизмом. Далее, найдем такие $k_1, k_2, k_3, \dots$, что $n_2 + n_3 + \dots + n_{k_1} \geq n_1$ и, вообще, $n_{k_{i-1}+1} + n_{k_{i-1}+2} + \dots + n_{k_i} \geq n_i$ при всех $i \geq 1$ (здесь мы считаем $k_0 = 1$). Так как $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \mathfrak{m}_3 < \dots$, то существуют сюръективные гомоморфизмы

$$\psi_i : \coprod_{n_{k_{i-1}+1}} A(\mathfrak{m}_{k_{i-1}+1}) \sqcup \dots \sqcup \coprod_{n_{k_i}} A(\mathfrak{m}_{k_i}) \rightarrow \coprod_{n_i} A(\mathfrak{m}_i)$$

при $i = 1, 2, 3, \dots$, а значит, $\psi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \psi_i \cup \text{id}_{X'}$ — сюръективный гомоморфизм U на X . В то же время $U \not\cong X$, так как X содержит компоненту связности, изоморфную $A(\mathfrak{m}_1)$, а U не содержит. Следовательно, X не является коканторовым. $\square$

Леммы 6 и 7 показывают, что, как и в случае канторовости, коканторов полигон над тривиальной полугруппой должен иметь вид

$$X = \left[\coprod_{\mathfrak{p}_0} A(0) \sqcup \dots \sqcup \coprod_{\mathfrak{p}_k} A(k) \right] \sqcup \coprod_{n_1} A(\mathfrak{m}_1) \sqcup \dots \sqcup \coprod_{n_l} A(\mathfrak{m}_l), \quad (5)$$

где $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_1 > \dots > \mathfrak{p}_k \geq \aleph_0$, $k < \mathfrak{m}_1 < \dots < \mathfrak{m}_l$ и $n_1, \dots, n_l < \aleph_0$. Однако в отличие от канторовости, в случае коканторовости условия на полигон X более жесткие.

Лемма 8. Если полигон X вида (5) коканторов и $k \geq 0$, то $k = 0$.

Доказательство. Пусть $k > 0$. Тогда $X = \coprod_{i \in I_0} Y_i \sqcup \coprod_{i \in I_1} Y_i \sqcup X'$, где $Y \cong A(0)$ при $i \in I_0$, $Y_i \cong A(1)$ при $i \in I_1$, $\mathfrak{p}_0 > \mathfrak{p}_1 \geq \aleph_0$, $|I_1| = \mathfrak{p}_1$, $|I_0| = \mathfrak{p}_0$, а X' не содержит компонент связности, изоморфных $A(0)$ или $A(1)$. Так как I_1 бесконечно, то I_1 можно разбить на два подмножества мощности $|I_1| : I_1 = J \cup K, J \cap K = \emptyset, |J| = |K| = \mathfrak{p}_1$. Пусть $\psi : J \rightarrow K$ — взаимно однозначное отображение. Для $i \in I_1$ имеем $Y_i = \{u_i, z_i\}$, где z_i — нуль и $u_i e = z_i$. Положим $\rho_2 = \{(z_j, z_{\psi(j)}), (z_{\psi(j)}, z_j)\} \cup \Delta_X$, $\rho_1 = \rho_2 \cup \{(u_j, u_{\psi(j)}), (u_{\psi(j)}, u_j) | j \in J\}$.

Очевидно, $\rho_1, \rho_2 \in \text{Con} X$ и $\rho_2 \subset \rho_1$. Имеем $X/\rho_1 \cong \coprod_{\mathfrak{p}_0} A(0) \sqcup \coprod_{\mathfrak{p}_1} A(2) \sqcup X'$, $X/\rho_1 \cong \coprod_{\mathfrak{p}_0} A(0) \sqcup \coprod_{\mathfrak{p}_1} A(1) \sqcup X'$. Отсюда видно, что $X/\rho_2 \cong X$. Однако $X/\rho_1 \not\cong X$, так как X содержит компоненты связности, изоморфные $A(1)$, а X/ρ_1 не содержит. Следовательно, X не является коканторовым, что противоречит условию леммы. $\square$

Лемма 9. Пусть $\varphi : X \rightarrow Y$ — сюръективный гомоморфизм полигонов над тривиальной полугруппой $S = \{e\}$. Если y — неизолированный нуль полигона Y , то существует неизолированный нуль $x \in X$ такой, что $\varphi(x) = y$.

Доказательство. Так как y — неизолированный нуль, то $y = ve$ при некотором v . Так как φ сюръективно, то $v = \varphi(u)$ при некотором $u \in X$. Имеем $y = ve = \varphi(u)e = \varphi(ue)$. Так как $v \neq y$, то $ue \neq e$. Следовательно, $x = ue$ — неизолированный нуль такой, что $\varphi(x) = y$. $\square$

Теорема 2. Полигон X над тривиальной полугруппой $S = \{e\}$ является коканторовым в том и только том случае, если существуют натуральное число t и кардинальные числа $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t > 0$ такие, что

$$X = Z \sqcup U_1 \sqcup \dots \sqcup U_t, \quad (6)$$

где Z — полигон, состоящий из нулей, или $Z = \emptyset$, а $U_i \cong A(\mathfrak{m}_i)$ при $i = 1, 2, \dots, t$.

Доказательство. Необходимость следует из лемм 6, 7 и 8. Докажем достаточность. Пусть X имеет вид (6) и для некоторого полигона Y существуют сюръективные гомоморфизмы $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow X$. Требуется доказать, что $X \cong Y$.

Пусть $u_1, \dots, u_t$ — нули полигонов $U_1, \dots, U_t$ соответственно. Так как $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t > 0$, то $u_1, \dots, u_t$ — неизолированные нули полигона X , а все остальные нули лежат в Z и являются изолированными. Используя лемму 9, мы можем найти в полигоне Y неизолированные нули $v_1, \dots, v_t$ такие, что $\psi(v_i) = u_i$ при $i = 1, \dots, t$. Если мы теперь будем снова применять лемму 9 и находить неизолированные нули в $\varphi^{-1}(\{v_1, \dots, v_t\})$, то получим множество $\{u_1, \dots, u_t\}$. Кроме $v_1, \dots, v_t$, в полигоне Y неизолированных нулей нет (иначе в X было бы более, чем t неизолированных нулей). Таким образом, φ взаимно однозначно отображает $\{u_1, \dots, u_t\}$ на $\{v_1, \dots, v_t\}$, а ψ взаимно однозначно отображает $\{v_1, \dots, v_t\}$ на $\{u_1, \dots, u_t\}$.

Очевидно, $U_i = \{x \in X | xe = u_i\}$ при $i = 1, 2, \dots, t$. Пусть $V_i = \{y \in Y | ye = v_i\}$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Докажем, что φ отображает сюръективно U_i на V_i при $i = 1, 2, \dots, t$. Пусть $x \in U_i$, тогда $xe = u_i$, поэтому $v_{m_i} = \varphi(u_i) = \varphi(xe) = \varphi(x)e$, а значит, $\varphi(x) \in V_{m_i}$. Таким образом, $\varphi(U_i) \subseteq V_{m_i}$. Пусть $y \in V_{m_i}$, тогда $ye = v_{m_i}$. Так как φ сюръективно, то $y = \varphi(x)$ при некотором $x \in X$. Если y — нуль, то $y = v_{m_i}$, а значит, $y \in \varphi(U_i)$. Если y — не нуль, то x — тоже не нуль, значит, $x \in U_j$ при некотором j . Но тогда $\varphi(x) \in \varphi(U_j) \subseteq V_{m_j}$. Но $\varphi(x) = y \in V_{m_i}$. Следовательно, $j = i$, поэтому $x \in U_i$, а значит, $y \in \varphi(U_i)$. Мы доказали, что $\varphi(U_i) = V_{m_i}$. Аналогично доказывается, что ψ отображает сюръективно V_i на U_i . Поскольку

φ и ψ взаимно однозначны на $\{u_1, \dots, u_t\}$ и $\{v_1, \dots, v_t\}$, возникает подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & t \\ m_1 & m_2 & \dots & m_t \end{pmatrix}$$

такая, что $\varphi(U_i) = V_{m_i}$, $\psi(V_i) = U_i$ при $i = 1, 2, \dots, t$. Пусть Z' — множество изолированных нулей в Y . Тогда $\varphi(Z) \subseteq Z' \cup \{v_1, \dots, v_t\}$ и $\psi(Z') \subseteq Z \cup \{u_1, \dots, u_t\}$. Имеем $|V_i| \geq |U_i| \geq |V_{m_i}|$ при всех i .

Каждое V_i имеет единственный нуль v_i , который не является изолированным. Поэтому $V_i \cong A(\mathbf{m}'_i)$ при некотором $\mathbf{m}'_i > 0$. Подстановка σ разбивается на циклы, и эти циклы соответствуют орбитам, на которые разбивается множество $\{1, 2, \dots, t\}$ при действии на нем подстановки σ и ее степеней. Так как $\varphi(U_i) = V_{\sigma(i)}$ и $\psi(V_i) = U_i$, то для каждой орбиты $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, где $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{s-1}) = i_s, \sigma(i_s) = i_1$, мы имеем $\mathbf{m}_{i_1} \geq \mathbf{m}'_{i_2} \geq \mathbf{m}_{i_2} \geq \mathbf{m}'_{i_3} \geq \dots \geq \mathbf{m}'_{i_s} \geq \mathbf{m}_{i_s} \geq \mathbf{m}'_{i_1} \geq \mathbf{m}_{i_1}$, поэтому $\mathbf{m}_{i_1} = \mathbf{m}'_{i_1} = \mathbf{m}_{i_2} = \mathbf{m}'_{i_2} = \dots = \mathbf{m}_{i_s} = \mathbf{m}'_{i_s} = \mathbf{m}_{i_1}$. Таким образом, для каждой орбиты $U_{i_1} \cong V_{i_1} \cong U_{i_2} \cong V'_{i_2} \cong \dots \cong U_{i_s} \cong V'_{i_s}$. Это означает, что $U_1 \sqcup \dots \sqcup U_t \cong V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$.

При гомоморфизме нуль переходит в нуль, поэтому $\varphi(Z \cup \{u_1, \dots, u_t\}) \subseteq Z' \cup \{v_1, \dots, v_t\}$ и $\psi(Z' \cup \{v_1, \dots, v_t\}) \subseteq Z \cup \{u_1, \dots, u_t\}$. Отсюда видно, что если положить $\mathbf{p} = |Z|$, $\mathbf{p}' = |Z'|$, то мы будем иметь $\mathbf{p} + t \geq \mathbf{p}' + t$ и $\mathbf{p}' + t \geq \mathbf{p} + t$. Это влечет равенство $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$. Поэтому $Z \cong Z'$. Это означает, что $Z \sqcup U_1 \sqcup \dots \sqcup U_t \cong Z' \sqcup V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$. Следовательно, $X \cong Y$. Таким образом, полигон X является коканторовым. $\square$

Как и в случае канторовости, имеет место утверждение, аналогичное следствию 1.

Следствие 2. Над тривиальной полугруппой копроизведение конечного числа коканторовых полигонов коканторово.

Авторы не знают, верно ли это утверждение для полигонов над произвольными полугруппами.

Из теорем 1 и 2 также получается

Следствие 3. Над тривиальной полугруппой всякий коканторов полигон является канторовым.

В заключение докажем еще один результат о коканторовости, касающийся полигонов над вполне простыми полугруппами. Напомним, что вполне простой полугруппой называется полугруппа, имеющая единственный идеал и содержащая примитивный идемпотент (см. [14], §2.7; [15]). Согласно теореме Сушкевича–Риса ([14], теорема 3.5; [15]) вполне простые полугруппы — это в точности рисовские матричные полугруппы $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ над группой G с сэндвич-матрицей $P = \|p_{\lambda i}\|_{i \in I, \lambda \in \Lambda}$ ([14], §3.1; [15]).

Зафиксируем какое-либо $i \in I$ и положим $R_i = \{(g)_{i\lambda} | g \in G < \lambda \in \Lambda\}$. Нетрудно проверить, что R_i — правый идеал полугруппы $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, а значит, может рассматриваться как полигон над полугруппой S . В ([16], замечание 4.5) было доказано, что любой квазиунитарный полигон над вполне простой полугруппой изоморфен копроизведению полигонов вида R_i/ρ , где $\rho \in \text{Con} R_i$.

Теорема 3. Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа. Следующие условия эквивалентны:

- (i) все квазиунитарные полигоны над S коканторовы;
- (ii) S — полугруппа левых нулей.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа. Нетрудно видеть, что эта полугруппа является полугруппой левых нулей в том и только том случае,

если $|G| = |\Lambda| = 1$. Пусть S не является полугруппой левых нулей. Тогда $|G| > 1$ или $|\Lambda| > 1$ (это не исключает выполнения обоих неравенств). В обоих случаях $|R_i| > 1$. Пусть $\Theta = \{z\}$ — одноэлементный полигон над S (т. е. состоящий из одного нуля). Рассмотрим полигоны

$$X = \Theta \sqcup \Theta \sqcup U_1 \sqcup U_2 \sqcup \dots \text{ и } Y = \Theta \sqcup U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \sqcup \dots,$$

где $U_t = R_i$ при всех t . Они являются квазиунитарными. Сюръективный гомоморфизм X на Y мы получим, отображая $\Theta \sqcup \Theta$ на Θ , а U_t на себя тождественно. Также несложно построить сюръективный гомоморфизм Y на X : отобразить Θ на Θ , U_1 на второе Θ , U_2 на U_1 и т. д. Таким образом, существуют сюръективные гомоморфизмы X на Y и Y на X . Вместе с тем X и Y не изоморфны, так как X имеет две одноэлементные компоненты связности, а Y — только одну. Следовательно, X не является коканторовым.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть S — полугруппа левых нулей и $\alpha : X \rightarrow Y$, $\beta : Y \rightarrow X$ — сюръективные гомоморфизмы полигонов, причем X квазиунитарный. Нетрудно видеть, что над полугруппой левых нулей любой квазиунитарный полигон состоит из нулей. Следовательно, все элементы полигона X — нули. Так как α сюръективно, то Y тоже состоит из нулей. Для полигонов из нулей любое отображение является гомоморфизмом. По теореме Кантора–Шрёдера–Бернштейна существует взаимно однозначное отображение $\gamma : X \rightarrow Y$. Следовательно, γ — изоморфизм. Итак, $X \cong Y$. Таким образом, доказано, что полигон X коканторов. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. *Monoids, Acts and Categories* (W. de Gruyter, N. Y., Berlin, 2000).
- [2] Кожухов И.Б., Михалёв А.В. *Полигоны над полугруппами*, Фундамент. и прикл. матем. **23** (3), 141–199 (2020).
- [3] Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А. *Элементы алгебраической теории автоматов* (Высш. школа, М., 1994).
- [4] Кожухов И.Б., Михалёв А.В. *Полигоны над полугруппами, унарные алгебры и автоматы*, Информатика и кибернетика **16** (2), 96–100 (2019).
- [5] Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B. *Acts Over Completely 0-Simple Semigroups*, Acta Cybernetica **14** (4), 523–531 (2000).
- [6] Карташов В.К. *Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр*, Дискретн. матем. **20** (4), 79–84 (2008).
- [7] Кожухов И.Б., Колесникова К.А. *О хопфовости и кохопфовости полигонов над группами*, Фундамент. и прикл. матем. **23** (3), 131–139 (2020).
- [8] Кожухов И.Б., Колесникова К.А. *Копроизведение кохопфовых полигонов*, в сб.: Матер. VIII Межд. научн. конф. «Донецкие чтения 2023: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности», 167–169 (ДонНУ, Донецк, 2023).
- [9] Колесникова К.А., Артиновы и нётеровы полигоны над вполне 0-простыми полугруппами, Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. (5), 67–71 (2024).
- [10] Кон П.М. *Универсальная алгебра* (Мир, М., 1968).
- [11] Сотов А.С. *Теорема Кантора–Бернштейна для полигонов над группами*, в сб.: Матер. VI Межд. научно-техн. конф. "Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях", 120–123 (ДонНТУ, Донецк, 2019).
- [12] Кожухов И.Б., Сотов А.С. *Канторовость квазиунитарных полигонов над вполне (0)-простыми полугруппами*, Дальневост. матем. журн. **23** (1), 27–33 (2023).
- [13] Кожухов И.Б., Сотов А.С. *Об условиях канторовости полигонов над полурешеткой*, Матем. заметки **109** (4), 581–589 (2021).
- [14] Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп*, Т. 1 (Мир, М., 1972).
- [15] Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп*, Т. 2 (Мир, М., 1972).
- [16] Kozhukhov I.B., Pryanichnikov A.M. *Acts with identities in the congruence lattice*, Algebra Universalis **83** (2), 1–18, article 16 (2022).

Игорь Борисович Кожухов

*Национальный исследовательский университет "МИЭТ",
пл. Шокина, д. 1, г. Москва, г. Зеленоград, 124498, Россия;
Московский государственный университет,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru*

Александр Сергеевич Сотов

*Московский государственный университет,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,
e-mail: alexandersotov@yandex.ru*

I.B. Kozhukhov and A.S. Sotov

Conditions of cantorness and co-cantorness for acts over the trivial semigroup

Abstract. We find the necessary and sufficient conditions for an act X over a trivial semigroup $\{e\}$ to be cantorion (or co-cantorion), i.e., for any act Y the existence of injective (resp., surjective) homomorphisms $X \rightarrow Y$ and $Y \rightarrow X$ implies the isomorphism $X \cong Y$.

Keywords: act over semigroup, finiteness condition, cantorness, co-cantorness.

Igor Borisovich Kozhukhov

*National Research University,
1 Shokin sq., Moscow, Zelenograd, 124498 Russia;
Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru*

Alexander Sergeevich Sotov

*Moscow State University,
1 Leninskiye Gory, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: alexandersotov@yandex.ru*