

Краткое сообщение, представленное Н.Т. Темиргалиевым

М.Г. ГРИГОРЯН, Л.Н. ГАЛОЯН, Т.М. ГРИГОРЯН

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПАРАХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА

Аннотация. Доказывается существование универсальных пар $(\{\lambda_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}, E)$ в смысле модификации относительно мультипликативных систем, также построен универсальный ряд по двойной системе Виленкина в классе измеримых функций двух переменных.

Ключевые слова: коэффициент Фурье, универсальный ряд, универсальная пара, мультипликативная система, сходимость.

УДК: 517.51

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-6-80-87

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье рассматривается поведение коэффициентов Фурье по двойной системе Виленкина после исправления функции.

Напомним, что классическая теорема Лузина [1] об исправлении утверждает, что любая измеримая (например, на $[0, 1]$) функция с помощью исправления ее значений на множестве сколь угодно малой меры может быть сделана непрерывной.

Ряд работ [2]–[9] был посвящен вопросам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье (по системам Хаара, Уолша, Фабера–Шаудера, Виленкина) корректирующей функции монотонно убывали.

Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [10], гл. 1, § 1.5). Пусть $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ ($p_j \geq 2 \ \forall j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел) — произвольная

последовательность натуральных чисел и пусть $m_0 = 1$, $m_k = \prod_{j=1}^k p_j$, $k \in \mathbb{N}$. Легко заметить,

что для каждой точки $x \in [0, 1]$ и для каждого $n \in [m_k, m_{k+1}) \cap \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, существуют числа $x_j, \alpha_j \in \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ такие, что $n = \sum_{j=1}^k \alpha_j m_{j-1}$ и $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}$.

Поступила в редакцию 25.03.2025, после доработки 25.03.2025. Принята к публикации 26.03.2025.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

Отметим, что точки вида $\frac{l}{m_k}$, $l \in \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq m_k - 1$, имеют два различных P -ичных разложения: конечные и бесконечные, и чтобы иметь дело только с однозначными разложениями, условимся для таких точек брать конечные разложения.

Для заданной последовательности $P = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ мультипликативная система $\mathbb{V} = \{V_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ определяется следующим образом: $V_0(x) \equiv 1$; $V_n(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\right)$. Нетрудно ви-

деть, что $\int_0^1 V_n(t) \overline{V_k(t)} dt = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq n \end{cases}$ ($\bar{a}$ — комплексное сопряженное числа a).

Эти системы были введены Н.Я. Виленкиным в 1946 году (см. [11], [12]) и поэтому часто называются также системами Виленкина. В случае $\sup\{p_k\} < \infty$ система $\mathbb{V} = \{V_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой ограниченного типа. В противном случае $\sup\{p_k\} = \infty$ — системой неограниченного типа.

Пусть f — вещественная интегрируемая по Лебегу функция. Обозначим коэффициенты Фурье функции f по системе Виленкина через $c_n(f)$, т.е. $c_n(f) = \int_0^1 f(x) \overline{V_n(t)} dx$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Обозначим через $\text{spec}(f)$ спектр функции f (т.е. $\text{spec}(f)$ — множество номеров ненулевых коэффициентов $\{c_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$).

В работах ([13]–[19]) для мультипликативных систем получены результаты принципиального характера.

В 1957 году К. Ватари [13] доказал, что система Виленкина с $\sup\{p_k\} < \infty$ является базисом в $L^r[0, 1)$ при $r > 1$. Затем, в 1976 году, В. Янг [14] для произвольной последовательности $\{p_k\}$ установил базисность системы Виленкина в $L^r[0, 1)$ при $r > 1$ ($L^r[a, b)$ —

класс измеримых функций, для которых $\int_a^b |f(x)|^r dx < \infty$).

Очевидно, что системы $\mathbf{V} = \{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, соответствующие разным последовательностям $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$, отличаются друг от друга. В случае, когда $P = \{2, 2, \dots\}$, система $\mathbb{V} = \{V_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ совпадает с системой Волша–Пэли (см. [15], [16]), а в случае $P = \{a, a, \dots\}$, где $a > 2$ — простое число, система $\mathbb{V}$ совпадает с системой Крестенсона–Леви (см. [17]).

Большинство результатов по мультипликативным системам получены для систем ограниченного типа. Многие результаты пока не имеют своих аналогов для систем неограниченного типа, в частности, неизвестно верна ли теорема Карлесона (ряд Фурье любой функции $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$ по тригонометрической системе сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$ (см. [20]) для мультипликативных систем неограниченного типа, и изучение вопросов с точки зрения поведения последовательности $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет самостоятельный интерес.

В работе [5] была доказана

Теорема А. Пусть $\mathbf{V} = \{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Виленкина неограниченного или ограниченного типа. Тогда для любого положительного числа δ существует измеримое множество E с мерой $|E| \geq 1 - \delta$ такое, что для каждой интегрируемой функции $f(x)$ найдется функция $g \in L^1[0, 1)$ с $g(x) = f(x)$, $x \in E$, такая, что $\{|c_k(g)|, k \in \text{spec}(g)\} \downarrow$.

Теорему А можно усилить.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{V} = \{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Виленкина неограниченного или ограниченного типа. Тогда существуют убывающая последовательность положительных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, измеримое множество E с мерой $|E| \geq 1 - \delta$ (δ — наперед заданное положительное число) такие, что для каждой интегрируемой функции $f(x) \in L^1[0, 1)$ найдется функция $g \in L^1[0, 1)$ с $g(x) = f(x)$, $x \in E$, такая, что $|c_k(g)| = \lambda_k \quad \forall k \in \text{спес}(g)$.

В данной работе мы докажем, что имеет место двумерный аналог этой теоремы.

Отметим, что ряд классических результатов (К. Фефферман [21] доказал, что известные теоремы для тригонометрической системы Л. Карлесона [20] и М. Рисса [22] в двумерном случае не верны) невозможно перенести с одномерного случая на двумерный случай.

Определение 1. Будем говорить, что ненулевые члены в двойной последовательности $\{c_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем лучам (направлениям), если $c_{k_2,s_2}(f) < c_{k_1,s_1}(f)$ при $k_2 \geq k_1, s_2 \geq s_1, k_2 + s_2 > k_1 + s_1$ ($a_{k_2,s_2} a_{k_1,s_1} \neq 0$).

Пусть $f(x, y) \in L^1[0, 1)^2 \left(L^1[0, 1)^2 \right.$ — класс измеримых, вещественных функций двух переменных, для которых $\left. \int \int_{[0,1)^2} |f(x, y)| dx dy < \infty \right)$ и пусть $c_{k,s}(f) = \int \int_{[0,1)^2} f(x, y) \overline{V_k(x)} \overline{V_s(y)} dx dy$ — коэффициенты Фурье по двойной системе Виленкина функции $f(x, y)$.

Определение 2. Будем говорить, что двойная последовательность неотрицательных чисел $\lambda = \{\lambda_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ и измеримое множество $E \subset [0, 1)^2$ образуют универсальную пару (λ, E) в смысле модификации относительно двойной системы Виленкина, если для каждой интегрируемой функции $f(x, y)$ найдется функция $g \in L^1[0, 1)^2$ с $g(x, y) = f(x, y)$, $(x, y) \in E$, такая, что $|c_{k,s}(g)| = \lambda_{k,s} \quad \forall (k, s) \in \text{спес}(g) = \{(k, s), c_{k,s}(g) \neq 0\}$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{V} = \{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Виленкина неограниченного или ограниченного типа. Тогда существуют измеримое множество $E \subset [0, 1)^2$ с мерой $|E| > 1 - \delta$ (δ — наперед заданное положительное число) и двойная последовательность неотрицательных чисел $\lambda = \{\lambda_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$, ненулевые члены которой расположены в убывающем порядке по всем лучам, которые образуют универсальную пару (λ, E) в смысле модификации относительно двойной системы Виленкина.

Замечание. В случае системы Уолша–Пэли, в теореме 2 в качестве последовательности $\lambda = \{\lambda_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ можно взять любую последовательность вида $\{a_k b_s\}_{k,s=0}^{\infty}$, где $a_k \downarrow 0, b_s \downarrow 0$ с $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}, \{b_s\}_{s=0}^{\infty} \notin l^2$.

Пусть $M[a, b)^2$ ($M[a, b)$) — класс всех вещественных измеримых на $[a, b)^2$ (соответственно на $[a, b)$) функций.

Прямоугольные и сферические частные суммы двойного ряда $\sum_{k,s=0}^{\infty} f_{k,s}(x, y)$ ($f_{k,s}(x, y) \in M[a, b)^2$) определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{s=0}^M f_{k,s}(x, y), \quad S_R(x, y) = \sum_{k^2+s^2 \leq R^2} f_{k,s}(x, y).$$

Определение 3. Будем говорить, что двойной ряд $\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,s}(x, y)$ является универсальным в $M[a, b]^2$ по сферам (соответственно по прямоугольникам), если для каждой функции $f(x, y) \in M[a, b]^2$ существует подпоследовательность сферических (соответственно прямоугольных) частных сумм ряда Ω , которая сходится к $g(x, y)$ почти всюду на $[a, b]^2$.

Имеет место

Теорема 3. Пусть $V = \{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система Виленина неограниченного или ограниченного типа. Тогда существует двойной ряд вида $\sum_{k,s=0}^{\infty} a_{k,s} V_k(x) V_s(y)$ (где ненулевые члены в последовательности $\{|a_{k,s}|\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем лучам), который универсален в $M[0, 1]^2$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Отметим, что для двойной тригонометрической системы была доказана

Теорема В ([23]). Существует функция $U(x, y) \in L^1[0, 2\pi]^2$ такая, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ ряд $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} c_{k,s}(U) e^{ikx} e^{isy}$ является универсальным в $M[0, 2\pi]^2$ как по сферам, так и по прямоугольникам (здесь $c_{k,s}(U)$ — коэффициенты Фурье по двойной тригонометрической системе функции $U(x, y)$).

Теорема С является в некотором смысле окончательной, поскольку в работе [24] (см. также [25]) С.В. Конягиным доказана

Теорема С. Не существует функции $U(x, y) \in L^1[0, 2\pi]^2$, ряд Фурье которой по двойной тригонометрической системе был бы универсальным в $M[0, 2\pi]^2$ по прямоугольникам.

Необходимо отметить, что первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в классе $M[0, 2\pi]$ является работа Д.Е. Меньшова [26], в которой им была доказана

Теорема Д. Существует тригонометрический ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (|a_k| + |b_k|) = 0,$$

который универсален в $M[0, 2\pi]$.

Отметим также, что в работе [26] доказано, что существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k W_k(x)$ по системе Уолша с коэффициентами, монотонно убывающими и стремящимися к нулю по абсолютной величине ($|b_k| \downarrow 0$), который универсален в $M[0, 1]$.

Было бы интересно узнать ответы на следующие вопросы.

Вопрос 1. Можно ли в теореме выбрать функцию $g(x)$ так, чтобы еще и ее ряд Фурье сходилась в $L^1[0, 1]$?

Вопрос 2. Верны ли теоремы 1–3 для тригонометрической системы?

Вопрос 3. Верны ли теоремы В и С для системы Виленина?

1. СХЕМЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ

Пусть $V = \{V_k(x)\}$ — система Виленкина ограниченного ($\sup\{p_k\} < \infty$) или неограниченного ($\sup\{p_k\} = \infty$) типа и пусть $\chi_E(x, y)$ — характеристическая функция множества E .

Рассмотрим множество $\{\gamma, \Delta\}$, зависящее от двух параметров, где γ пробегает все рациональные числа, а Δ пробегает все квадраты вида $\Delta = \left[\frac{\nu-1}{m_k}, \frac{\nu}{m_k} \right) \times \left[\frac{l-1}{m_k}, \frac{l}{m_k} \right)$, $1 \leq \nu, l \leq$

$m_k = \prod_{j=1}^k p_j$, $k \in \mathbb{N}$, и множество функций

$$\Phi = \left\{ f(x, y) : f = \sum_{j=1}^{\nu_0} \gamma_j \chi_{\Delta_j}(x, y); (\gamma_j, \Delta_j) \in \{\gamma, \Delta\}, \Delta_j \cap \Delta_{j'} = \emptyset, j \neq j' \right\}.$$

Перенумеровав функции множества Φ , представим его в виде последовательности

$$\{f_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Основным средством для доказательства теорем 3 и 4 является

Лемма. Для любых чисел $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$ и для любой функции $f(x, y)$ из Φ существуют измеримое множество $E \subset [0, 1]^2$ и полином по двойной системе Виленкина вида

$$Q(x, y) = \sum_{k,s=N_0}^N a_{k,s} V_k(x) V_s(y), \text{ удовлетворяющие условиям:}$$

1) ненулевые члены в последовательности $\{|a_{k,s}|\}_{k,s=N_0}^N$ расположены в убывающем порядке по всем лучам

$$2) |E| > (1 - \delta),$$

$$3) |a_{k,s}| \leq \varepsilon \quad \forall k, s \in [N_0, N],$$

$$4) Q(x, y) = f(x, y), (x, y) \in E,$$

$$5) \iint_{[0,1]^2} |Q(x, y)| dx dy \leq 4 \iint_{[0,1]^2} |f(x, y)| dx dy.$$

Схема доказательства теоремы 2. Нетрудно видеть, что последовательно применив лемму 3, по индукции можем найти последовательности множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ и полиномов по двойной системе Виленкина вида

$$Q_n(x, y) = \sum_{k,s=M_{n-1}}^{M_n-1} a_{k,s}^{(n)} V_k(x) V_s(y) \in \Phi, \quad n \in [1, \infty),$$

которые для всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям: нулевые коэффициенты в последовательности $\left\{ |a_{k,s}^{(n)}| \right\}_{k,s=M_{n-1}}^{M_n-1}$ (для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$) расположены в убывающем порядке по всем лучам (направлениям) и

$$\max_{(k,s) \in \text{spec}(Q_n)} \left\{ |a_{k,s}^{(n)}| \right\} \leq \min_{(j,m) \in \text{spec}(Q_{n-1})} \left\{ |a_{j,m}^{(n-1)}| \right\} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$Q_n(x, y) = f_n(x, y), (x, y) \in E_n; \quad |E_n| \geq 1 - 2^{-2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\iint_{[0,1]^2} |Q_n(x,y)| dx dy < 4 \iint_{[0,1]^2} |f_n(x,y)| dx dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть δ — любое положительное число. Положим

$$E = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n, \quad n_0 = \left[\log_{\frac{1}{2}} \delta \right] + 1, \quad \lambda_{k,s} = \begin{cases} |a_{k,s}^{(n)}|, & M_{n-1} \leq k, s < M_n, \quad n \geq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Осталось проверить, что двойная последовательность $\{\lambda_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ и множество E образуют универсальную пару в смысле модификации относительно двойной системы Виленкина.

Схема доказательства теоремы 3. Применяя лемму (по индукции), мы можем определить последовательности множеств $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($G_n \subset [0,1]^2$) и полиномов по двойной системе Виленкина вида

$$P_n(x,y) = \sum_{k,s=M_{n-1}}^{M_n-1} b_{k,s}^{(n)} V_k(x) V_s(y) \in \Phi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad M_0 = 1,$$

которые для всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям: нулевые коэффициенты в последовательности $\left\{ |a_{k,s}^{(n)}| \right\}_{k,s=M_{n-1}}^{M_n-1}$ (для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$) расположены в убывающем порядке по всем лучам (направлениям) и

$$\max_{(k,s) \in \text{spec}(Q_n)} \left\{ |b_{k,s}^{(n)}| \right\} \leq \min_{(j,m) \in \text{spec}(Q_{n-1})} \left\{ |b_{j,m}^{(n-1)}| \right\} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f_n(x,y) = \sum_{k=1}^n P_k(x,y), \quad (x,y) \in G_n; \quad |G_n| \geq 1 - 2^{-2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $g(x,y) \in M[a,b]^2$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности Φ такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x,y) = g(x,y)$ почти всюду на $[0,1]^2$. Положим

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} G_k \right), \quad R_k = \sqrt{2}(M_{n_k+1} - 1); \quad b_{k,s} = \begin{cases} b_{k,s}^{(n)}, & M_{n-1} \leq k, s < M_n, \quad n \geq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко убедиться, что подпоследовательность $\sum_{k^2+s^2 \leq R_k^2} b_{k,s} V_k(x) V_s(y)$ сферических частных сумм ряда $\sum_{k,s=0}^{\infty} b_{k,s} V_k(x) V_s(y)$ сходится к функции $g(x,y)$ на G и, следовательно, почти всюду на $[0,1]^2$.

Авторы выражают благодарность профессору Н.Т. Темиргалиеву за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лузинъ Н.Н. *Къ основной теоремъ интегральнаго исчисления*, Матем. сб. **28** (2), 266–294 (1912).
- [2] Григорян М.Г. *Об усиленном L^1 -greedy-свойстве системы Уолша*, Изв. вузов. Матем. (5), 26–37 (2008).
- [3] Галоян Л. Н., Меликбекян Р.Г. *О поведении коэффициентов Фурье–Уолша исправленной функции*, Сиб. матем. журн. **57** (3), 641–649 (2016).
- [4] Grigoryan M.G., Sargsyan A.A. *On the coefficients of the expansion of elements from $C[0, 1]$ space by the Faber–Schauder system*, Funct. Spaces **9** (2), 191–203 (2011).
- [5] Grigoryan M.G., Sargsyan S. *On the Fourier–vilenkin coefficients*, Acta Math. Sci. **37** (2), 293–300 (2017).
- [6] Григорян М.Г., Гогян С.Л. *Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций*, Anal. Math. **32**, 49–80 (2006).
- [7] Episkoposian S.A., Grigorian M.G., Grigorian T.M. *On the universal pair with respect to the generalized Walsh system*, Adv. Oper. Theory **9** (3), 1–15 (2024).
- [8] Grigoryan M.G., Galoyan L.N. *On the universal functions*, J. Approx. Theory **225**, 191–208 (2018).
- [9] Григорян М.Г., Кротов В.Г. *Теорема Лузина об исправлении и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера–Шаудера*, Матем. заметки **93** (2), 172–178 (2013).
- [10] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения* (Наука, М., 1987).
- [11] Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **11** (4), 363–400 (1947).
- [12] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах* (ЭЛМ, Баку, 1981).
- [13] Watari C. *On generalizes Walsh Fourier series, I*, Proc. Japan Acad. **33** (8), 435–438 (1957).
- [14] Young W.S. *Mean convergence of generalized Walsh–Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218**, 311–320 (1976).
- [15] Walsh J.L. *A Closed Set of Normal Orthogonal Functions*, Amer. J. Math. **45** (1), 5–24 (1923).
- [16] Price J.J. *Certain Groups of Orthonormal Step Functions*, Canad. J. Math. **9** (3), 413–425 (1957).
- [17] Chrestenson H.E. *A class of generalized Walsh functions*, Pacif. J. Math. **5** (1), 17–31 (1955).
- [18] Григорян М.Г., Саргсян С.А. *Нелинейная аппроксимация функций класса L^r по системе Виленкина*, Изв. вузов. Матем. (2), 30–39 (2013).
- [19] Grigoryan M.G., Sargsyan S.A. *On the L_1 -convergence and behavior of coefficients of Fourier–Vilenkin series*, Positivity **22** (3), 897–918 (2018).
- [20] Carleson L. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. **116**, 135–157 (1966).
- [21] Fefferman C. *On the divergence of multiple Fourier series*, Bull Amer. Math. Soc. **77** (2), 191–195 (1971).
- [22] Riss M. *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Zeit. **27**, 218–244 (1927).
- [23] Конягин С.В. *О сходимости подпоследовательности частных сумм тригонометрического ряда Фурье по Прингсгейму*, Тр. ИММ УрО РАН **28** (4), 121–127 (2022).
- [24] Григорян М.Г., Конягин С.В. *О рядах Фурье по кратной тригонометрической системе*, УМН **78** (4), 201–202 (2023).
- [25] Меньшов Д.Е. *О частных суммах тригонометрических рядов*, Матем. сб. **20** (2), 197–238 (1947).
- [26] Григорян М.Г. *Функции, с универсальными рядами Фурье–Уолша*, Матем. сб. **211** (6), 107–131 (2020).

Мартин Геворгович Григорян

Ереванский государственный университет,

ул. А. Манукяна, д. 1, г. Ереван, 0025, Республика Армения,

e-mail: gmarting@ysu.am

Левон Николаевич Галоян

Ереванский государственный университет,

ул. А. Манукяна, д. 1, г. Ереван, 0025, Республика Армения,

e-mail: levongaloyan@ysu.am

Тигран Мартинович Григорян

Ереванский государственный университет,

ул. А. Манукяна, д. 1, г. Ереван, 0025, Республика Армения,

e-mail: t.grigoryan@ysu.am

M.G. Grigoryan, L.N. Galoyan and T.M. Grigoryan

On universal pairs relative to the Vilenkin system

Abstract. In this paper it is proved that there exist universal pairs $(\{\lambda_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}, E)$ in the sense of modification with respect to double multiplicative systems. A universal series with respect to the double Vilenkin system in the class of measurable functions of two variables is constructed.

Keywords: Fourier coefficient, universal series, universal pair, Vilenkin system, convergence.

Martin Gevorgovich Grigoryan

Yerevan State University,

1 A. Manukyan str., Yerevan, 0025 Republic of Armenian,

e-mail: gmarting@ysu.am

Levon Nikolaevich Galoyan

Yerevan State University,

1 A. Manukyan str., Yerevan, 0025 Republic of Armenian,

e-mail: levongaloyan@ysu.am

Tigran Martinovich Grigoryan

Yerevan State University,

1 A. Manukyan str., Yerevan, 0025 Republic of Armenian,

e-mail: t.grigoryan@ysu.am