

Краткое сообщение

С.К. ВОДОПЬЯНОВ, С.В. ПАВЛОВ

**ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА ГОМЕОМОРФИЗМОВ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ
ИСКАЖЕНИЕМ И МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ**

Аннотация. Известно, что предел последовательности (квази)конформных отображений — либо постоянное, либо (квази)конформное отображение. В настоящей работе доказано, что в случае групп Карно типа Гейзенберга аналогичное свойство справедливо для отображений квазиконформных в среднем, т. е. для гомеоморфизмов с конечным искажением и интегрируемой в подходящей степени функцией искажения. Данный результат применяется для решения модельных задач нелинейной теории упругости на группах Карно.

Ключевые слова: квазиконформный анализ, конечное искажение, функция искажения, оператор композиции, нелинейная упругость, поливыпуклая функция.

УДК: 517.548

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-6-73-79

ВВЕДЕНИЕ

Некоторые задачи нелинейной теории упругости сводятся к задаче минимизации интегрального функционала, называемого функционалом полной энергии [1]. Однако, в отличие от случая линейной теории упругости, подинтегральная функция почти всегда невыпуклая, что делает невозможным применение стандартных методов вариационного исчисления. Тем не менее существует заложенный Дж. Боллом математический подход, в рамках которого можно исследовать функционалы полной энергии, моделируя при этом достаточно широкий класс прикладных задач ([2], [3], § 7.4–7.7).

В работе [4] к вопросу о существовании решения вариационной задачи была применена современная теория квазиконформного анализа (основы теории отображений с ограниченным искажением заложены в 60-е годы прошлого века в работах Ю.Г. Решетняка [5]), с помощью которой удалось существенно ослабить предположения о суммируемости производных допустимых деформаций. Более того, экстремальная деформация оказывается гомеоморфизмом, что соответствует физическому содержанию задачи.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{n,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ называется *квазиконформным*, если f является гомеоморфизмом и имеет ограниченное искажение, т. е. с некоторой постоянной $K \geq 1$ неравенство $|Df(x)|^n \leq K \det Df(x)$ выполняется для

Поступила в редакцию 20.02.2025, после доработки 20.02.2025. Принята к публикации 26.03.2025.

Благодарности. Работа подготовлена в рамках выполнения гранта Российского научного фонда (код проекта № 23-21-00359).

почти всех (п. в.) $x \in \Omega$. Наименьшая из возможных констант K называется *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается символом $K(f)$.

Ю. Г. Решетняк установил ([5], гл. II, § 9.2), что если последовательность квазиконформных отображений $\{f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ такова, что $\sup_k K(f_k) < \infty$ и сходится к непостоянному отображению f_0 в $L_{n,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, то f_0 квазиконформное, и $K(f_0) \leq \liminf_k K(f_k)$.

В настоящей работе в случае групп Карно H -типа мы устанавливаем аналогичное утверждение для последовательности гомеоморфизмов с конечным искажением и ограниченными в подходящем пространстве Лебега функциями искажения. Данный результат является одним из основных для решения вариационных задач на группах Карно, подобных задачам нелинейной теории упругости [6], [7].

Многие применяемые в настоящей работе ключевые результаты и методы квазиконформного анализа на группах Карно H -типа получены в недавних работах [8]–[11]. Обобщения работы [10] на случай произвольных групп Карно пока не известны.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Более детальное изложение приводимых ниже фактов можно найти, например, в [12].

1) *Группы Карно.* Группой Карно (см., например, [13], гл. 1) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ подпространств $\mathfrak{g}_i$, связанных условиями $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$. Группа Карно $\mathbb{G}$ *двухступенчатая*, если $m = 2$.

Подпространство $\mathfrak{g}_1$ называется *горизонтальным* и задает на $\mathbb{G}$ распределение, порождающее метрику Карно–Каратеодори d_{cc} . А именно, фиксируем в $\mathfrak{g}$ произвольное скалярное произведение. Расстояние $d_{cc}(x, y)$ определяется как точная нижняя грань длин $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ кусочно гладких *горизонтальных* ($\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{g}_1(\gamma(t))$ для п. в. t) кривых γ с концевыми точками x и y . Согласно теореме Рашевского–Чоу эта величина конечна.

Обозначим $N = \dim \mathfrak{g}$, $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$, $n = n_1$. Фиксируем ортонормированные базисы $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ подпространств $\mathfrak{g}_i$. Экспоненциальное отображение

$$g = \exp \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} X_{ij} \right) (e)$$

(где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) есть глобальный диффеоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{G}$ ([13], предложение 1.2). Поэтому мы можем отождествить точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$. Тогда $e = 0$ и $x^{-1} = -x$. *Растяжения* δ_λ , заданные как $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$, суть автоморфизмы группы для всех $\lambda > 0$.

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum_{i=1}^m i n_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$. Мера Лебега на $\mathbb{R}^N$ совпадает с ν -мерной мерой Хаусдорфа на $\mathbb{G}$, определенной относительно d_{cc} .

Группа Карно $\mathbb{H}$ называется *группой Карно H -типа*, если она двухступенчатая и ее алгебра Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ может быть снабжена скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ таким, что $\mathfrak{h}_1 \perp \mathfrak{h}_2$ и для каждого $Z \in \mathfrak{h}_2$, $|Z| = 1$, линейное отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$, определенное соотношением $\langle J_Z(X), Y \rangle = \langle Z, [X, Y] \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{h}_1$, ортогональное.

2) *Отображения класса Соболева.* Пространства Лебега $L_p(\Omega)$ и $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$ определяются по отношению к описанной выше мере Лебега.

Обозначим базис $\mathfrak{g}_1$ как $X_j = X_{1j}$, $1 \leq j \leq n$. Пусть Π_j — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{G} \mid x_{1j} = 0\}$, $j = 1, \dots, n$. Каждому $y \in \Pi_j$ соответствует интегральная линия $t \mapsto \exp(tX_j)(y)$. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow M$ из области $\Omega \subset \mathbb{G}$ в метрическое пространство M принадлежит $\text{ACL}(\Omega; M)$, если его можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы для каждого $j = 1, \dots, n$ оно было абсолютно непрерывным на интегральной линии $\{\exp(tX_j)(y) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap \Omega$ векторного поля X_j для п. в. $y \in \Pi_j$. Полагаем $\text{ACL}(\Omega) = \text{ACL}(\Omega; \mathbb{R})$.

Пространство $L_p^1(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega) \cap \text{ACL}(\Omega)$ таких, что классические производные $X_j u$ (существующие п. в.) принадлежат $L_p(\Omega)$. Положим $\|u\|_{L_p^1(\Omega)} = \|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$, где $\nabla_h u = (X_1 u, \dots, X_n u)$ — *горизонтальный градиент* $u \in L_p^1(\Omega)$.

Рассмотрим $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \mathbb{G})$. Тогда $X_j \varphi(x) \in \mathfrak{g}_1(\varphi(x))$ для п. в. $x \in \Omega$ ([14], предложение 4.1). Матрица $D_h \varphi(x) = (X_i \varphi_j)_{i,j=1}^n$ определяет линейный оператор $D_h \varphi(x) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1$, называемый *горизонтальным дифференциалом*. Известно ([15], теорема 1.2), что для п. в. x оператор $D_h \varphi(x)$ может быть продолжен до гомоморфизма алгебр Ли $\widehat{D}\varphi(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Гомоморфизму $\widehat{D}\varphi(x)$ также соответствует групповой гомоморфизм $D_P \varphi(x) = \exp \circ \widehat{D}\varphi(x) \circ \exp^{-1}$, известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом φ по отношению к структуре группы [15].

Определение. Класс отображений Соболева $W_p^1(\Omega; \mathbb{G})$ состоит из измеримых отображений $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \mathbb{G})$, для которых $\|\varphi\|_{W_p^1(\Omega; \mathbb{G})} = \|d_{cc}(\varphi(\cdot), 0)\|_{L_p(\Omega)} + \|D_h \varphi\|_{L_p(\Omega)} < \infty$. Отображение φ принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, если $\varphi \in W_p^1(U; \mathbb{G})$ для всякой компактной подобласти $U \Subset \Omega$.

Отображение $\varphi \in W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ обладает *конечным искажением*, если $D_h \varphi = 0$ п. в. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det \widehat{D}\varphi(x) = 0\}$. *Внешняя функция искажения* $K_p(\cdot, \varphi)$, $p \in [1; \infty)$, определяется по правилу

$$K_p(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D_h \varphi(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $1 \leq q \leq p < \infty$ обозначим $K_{q,p}(\varphi, \Omega) = \|K_p(\cdot, \varphi)\|_{L_\sigma(\Omega)}$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$). Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с описанием ограниченных операторов композиции пространств Соболева.

Теорема 1 ([16], теорема 2; [17], теорема 2). *Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ областей в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда*

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$;
- 2) φ имеет конечное искажение;
- 3) $K_p(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

При этом для некоторой константы $\alpha_{p,q}$ справедливо $\alpha_{p,q} K_{q,p}(\varphi, \Omega) \leq \|\varphi^*\| \leq K_{q,p}(\varphi, \Omega)$.

Нам также будет полезна функция искажения в образе

$$\mathbb{G} \ni y \mapsto H_q(y, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi \mid \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0\} = \emptyset; \\ \left(\sum_{\substack{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi, \\ \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0}} \frac{|D_h \varphi(x)|^q}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{иначе,} \end{cases}$$

где Σ_φ — сингулярное множество отображения φ . Ясно, что $H_q(y, \varphi) = 0$ при $y \notin \varphi(\Omega)$. Для $1 \leq q \leq p < \infty$ обозначим $H_{q,p}(\varphi, \Omega') = \|H_q(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega')\|$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2. Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, $\Omega \subset \mathbb{H}$ — область и $q \in (\nu - 1; \nu]$. Пусть последовательность $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{H}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) каждое отображение φ_k — гомеоморфизм;
- 2) $\varphi_k \in W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$, $k \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{|D_h \varphi_k|\}$ ограничена в $L_\nu(\Omega)$;
- 3) каждый φ_k обладает конечным искажением, и последовательность $\{K_\nu(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(\Omega)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}$ ($\sigma = \infty$ при $q = \nu$);
- 4) $\det \widehat{D}\varphi_k \geq 0$ почти всюду в Ω .

Если $\{\varphi_k\}$ сходится к непостоянному отображению φ_0 в $L_{1, \text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$ (т. е. для каждого

компакта $K \Subset \Omega$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_K d_{cc}(\varphi_k(x), \varphi_0(x)) dx = 0$), то

- a) φ_0 — гомеоморфизм;
- b) $\varphi_0 \in W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$, и $\int_\Omega |D_h \varphi_0(x)|^\nu dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega |D_h \varphi_k(x)|^\nu dx$;
- c) φ_0 обладает конечным искажением и $K_{q, \nu}(\varphi_0, \Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} K_{q, \nu}(\varphi_k, \Omega) < \infty$;
- d) $\det \widehat{D}\varphi_0 \geq 0$ почти всюду в Ω .

3. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Свойство b) вытекает из условия 2) (подробности см. в [12]).
2. Гомеоморфизмы класса $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$ имеют локальный модуль непрерывности [12]:

$$d_{cc}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq C \left(\ln \frac{r_0}{r} \right)^{-1/\nu} \|D_h \varphi \mid L_\nu(B(x, r_0))\|,$$

где $r_0 = c_1 \text{dist}(x, \partial\Omega)$, $r < c_2 r_0$, $d_{cc}(x, y) < r$, а $B(x, r)$ — шар в метрике d_{cc} . Значит, $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ локально равномерно. Поскольку φ_k как гомеоморфизмы удовлетворяют равенствам $\text{diam } \varphi_k(B) = \text{diam } \varphi_k(\partial B)$, где $B \Subset \Omega$ — шар, то колебание φ_0 на всяком шаре $B \Subset \Omega$ оценивается колебанием на граничной сфере: $\text{diam } \varphi_0(B) \leq \text{diam } \varphi_0(\partial B)$, т. е. φ_0 — квазимонотонное отображение. Итак, φ_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обладают $\mathcal{N}$ -свойством Лузина как квазимонотонные отображения класса $W_{\nu, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$ ([18], теорема 3).

3. По теореме 1 нормы операторов композиции $\varphi_k^* : L_\nu^1(\mathbb{H}) \cap \text{Lip}(\mathbb{H}) \rightarrow L_q^1(\Omega)$ ограничены в совокупности. Поэтому φ_0 также индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi_0^* : L_\nu^1(\mathbb{H}) \cap \text{Lip}(\mathbb{H}) \rightarrow L_q^1(\Omega)$ [12]. В работе [12] установлены свойства отображения

$\varphi \in W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, индуцирующего ограниченный оператор композиции $\varphi^*: L_\nu^1(\Omega') \cap \text{Lip}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$: оно обладает конечным искажением, $H_q(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega')$ и, если φ непостоянное, то оно обладает $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина.

4. С помощью идей и результатов [19] устанавливается, что если последовательность гомеоморфизмов $\{\varphi_k \in W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})\}$, $\det \hat{D}\varphi_k \geq 0$, сходится локально равномерно к отображению φ_0 , а последовательность $\{|D_h \varphi_k|\}$ ограничена в $L_{\nu,\text{loc}}(\Omega)$, то $\det \hat{D}\varphi_k \rightarrow \det \hat{D}\varphi_0$ слабо в $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \det \hat{D}\varphi_k(x) \theta(x) dx = \int_{\Omega} \det \hat{D}\varphi_0(x) \theta(x) dx$$

для каждой функции $\theta \in L_\infty(\Omega)$ с компактным носителем. Отсюда вытекает свойство d): $\det \hat{D}\varphi_0 \geq 0$. Применяя описанное свойство слабой непрерывности якобианов, $\mathcal{N}$ -свойство (обеспечивающее отсутствие множества сингулярности в формуле замены переменной с функцией кратности) и вытекающее из равномерной сходимости неравенство $|\varphi_0(T)| \geq \lim_k |\varphi_k(T)|$, справедливое для каждого компакта T , получаем

$$|\varphi_0(T)| \leq \int_{\varphi_0(T)} \mathcal{N}(y, \varphi_0, T) dy = \int_T \det \hat{D}\varphi_0 dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \det \hat{D}\varphi_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k(T)| \leq |\varphi_0(T)|.$$

Отсюда мера множества $S' = \{y \mid \mathcal{N}(y, \varphi_0, \Omega) \geq 2\}$ точек, имеющих более одного прообраза, нулевая. Множество $S = \varphi_0^{-1}(S')$ также имеет меру нуль в силу $\mathcal{N}^{-1}$ -свойства. Отображение $\varphi_0|_{\Omega \setminus S}$, как нетрудно заметить, является инъекцией.

5. Полученное свойство *инъективности почти всюду* гарантирует равенство

$$K_{q,\nu}(\varphi_0, \Omega) = H_{q,\nu}(\varphi_0, \mathbb{H}),$$

которое вместе с неравенством $H_{q,\nu}(\varphi_0, \mathbb{H}) \leq \lim_k H_{q,\nu}(\varphi_k, \mathbb{H})$, доказываемом аналогично ([11], теорема 11), влечет п. с).

6. Отображение φ_0 открыто по следующей теореме.

Теорема 3 ([10], теорема 2.2). Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, Ω — область в $\mathbb{H}$, $\nu(\nu - 1) < \sigma \leq \infty$, а $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ — непостоянное отображение класса $W_{\nu,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H})$ с конечным искажением такое, что $\det \hat{D}\varphi \geq 0$ почти всюду, и $K_\nu(\cdot, \varphi) \in L_{\sigma,\text{loc}}(\Omega)$. Тогда φ непрерывно открыто и дискретно.

Предположим, что φ_0 — не инъекция. Существуют различные точки $x_1, x_2 \in \Omega$ такие, что $\varphi_0(x_1) = \varphi_0(x_2) = y \in \mathbb{H}$. Пусть U_1, U_2 — непересекающиеся окрестности точек x_1 и x_2 соответственно. Их образы $V_i = \varphi_0(U_i)$ — открытые множества, содержащие общую точку y . Значит, открытое множество $V = V_1 \cap V_2$ непустое и поэтому имеет положительную меру. Множество $\varphi_0(U_1 \setminus S) \cap \varphi_0(U_2 \setminus S)$ пустое, поскольку $\varphi_0|_{\Omega \setminus S}$ — инъекция. Из включений $V_i = \varphi_0(U_i) \subset \varphi_0(U_i \setminus S) \cup \varphi_0(S)$ вытекает $V = V_1 \cap V_2 \subset (\varphi_0(U_1 \setminus S) \cap \varphi_0(U_2 \setminus S)) \cup \varphi_0(S) = \varphi_0(S)$. Поскольку $S' = \varphi_0(S)$ имеет меру нуль, $|V| = 0$, чего быть не может. Таким образом, $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ — гомеоморфизм. Это завершает доказательство п. а).

4. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА

Пусть Ω и Q — области в группе Карно H -типа $\mathbb{H}$. Область Ω — тело в исходной конфигурации, а Q задает односторонние ограничения на положение тела при деформации.

Обозначим *функционал полной энергии* как

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, D_h \varphi(x)) dx.$$

Мы предполагаем, что *функция запасенной энергии* $W : \Omega \times \mathcal{L}(\mathfrak{h}_1) \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathcal{L}(\mathfrak{h}_1)$ — пространство всех линейных операторов $A : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$, обладает следующими свойствами.

а) *Поливыпуклость*: существует выпуклая функция со свойством Каратеодори $G(x, \cdot) : \mathcal{L}(\mathfrak{h}_1) \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для п. в. $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$G(x, F|_{\mathfrak{h}_1}, \det F) = W(x, F|_{\mathfrak{h}_1})$$

для всех гомоморфизмов $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$, $\det F \geq 0$, $F(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$.

б) *Коэрцитивность*: существуют постоянная $\alpha > 0$, функция $g \in L_1(\Omega)$ и непрерывная функция $f : (0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ такая, что $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = +\infty$, удовлетворяющие неравенству

$$W(x, F|_{\mathfrak{h}_1}) \geq \alpha |F|^\nu + f(\det F) + g(x)$$

для п. в. $x \in \Omega$ и всех гомоморфизмов $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})$, $\det F > 0$, $F(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$.

Фиксируя $q \in (\nu - 1; \nu]$, $M > 0$, вводим класс допустимых деформаций

$$\mathcal{A}(q, M; Q) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{H} \mid \varphi \in W_{1, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}) \text{ — гомеоморфизм с конечным} \right.$$

искажением, $\varphi(\Omega) \subset Q$, $I(\varphi) < \infty$, $K_{q, \nu}(\varphi, \Omega) \leq M$, $\det \hat{D}\varphi \geq 0$ почти всюду в Ω $\left. \right\}$.

Теорема 4. Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H -типа, Ω — произвольная область в $\mathbb{H}$, Q — ограниченная область, $\text{int } \bar{Q} = Q$, $q \in (\nu - 1; \nu]$, $M > 0$ — постоянные. Если множество $\mathcal{A}(q, M; Q)$ непустое и функция W удовлетворяет условиям а) и б), то существует по крайней мере один гомеоморфизм $\varphi_0 \in \mathcal{A}(q, M; Q)$ такой, что $I(\varphi_0) = \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}(q, M; Q)\}$.

В доказательстве теоремы 4 применяются теорема 2 и известные соображения, связанные с поливыпуклыми функциями и леммой Мазура ([3], § 7.7).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ball J.M. *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. **63**, 337–403 (1976).
- [2] Ball J.M. *Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A: Math. **88** (3–4), 315–328 (1981).
- [3] Ciarlet Ph.G. *Mathematical Elasticity*, Vol. I, *Three-Dimensional Elasticity* (Ser. “Studies in Mathematics and its Applications”, North-Holland, Amsterdam, 1988).
- [4] Molchanova A., Vodopyanov S. *Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity*, Calc. Var. and Part. Diff. Equat. **59** (17), 2–25 (2019).
- [5] Решетняк Ю.Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Сиб. матем. журн. **8** (3), 629–658 (1967).
- [6] Christodoulou D. *On the geometry and dynamics of crystalline continua*, Ann. Inst. Henri Poincaré **69** (3), 335–358 (1998).
- [7] Maione A. *Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields* (Thesis submitted to the University of Trento for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Math. Univ. Trento, 2020).
- [8] Басалаев С.Г., Водопьянов С.К. *Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathcal{P}$ -дифференцируемость соболевских отображений*, Сиб. матем. журн. **64** (4), 700–719 (2023).
- [9] Водопьянов С.К. *Непрерывность отображений класса Соболева $W_{\nu, \text{loc}}^1$ с конечным искажением на группах Карно*, Сиб. матем. журн. **64** (5), 912–934 (2023).

- [10] Басалаев С.Г., Водопьянов С.К. *Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно*, Сиб. матем. журн. **64** (6), 1151–1159 (2023).
- [11] Водопьянов С.К., Сбоев Д.А. *Полунепрерывность операторной функции искажения при сходимости гомеоморфизмов в $L_{1,\text{loc}}$* , Сиб. матем. журн. **65** (4), 605–621 (2024).
- [12] Водопьянов С.К., Павлов С.В. *Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением*, СМФН **70** (2), 215–236 (2024).
- [13] Folland G.B., Stein E.M. *Hardy Spaces on Homogeneous Groups* (Princeton Univ. Press, Math. Notes; V. 28, Princeton, 1982).
- [14] Pansu P. *Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. Math. **129** (1), 1–60 (1989).
- [15] Vodop'yanov S.K. *$\mathcal{P}$ -Differentiability on Carnot Groups in Different Topologies and Related Topics*, in: *Proceedings on Analysis and Geometry* (Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000).
- [16] Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. *Пространства Соболева и (P, Q) -квазиконформные отображения групп Карно*, Сиб. матем. журн. **39** (4), 776–795 (1998).
- [17] Водопьянов С.К., Евсеев Н.А. *Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно*, Сиб. матем. журн. **63** (2), 283–315 (2022).
- [18] Vodop'yanov S.K. *Differentiability of maps of Carnot groups of Sobolev classes*, Sbornik: Math. **194** (6), 857–877 (2003).
- [19] Pavlov S.V., Vodop'yanov S.K. *Weak continuity of Jacobians of W_p^1 -homeomorphisms on Carnot groups*, Eurasian Math. J. **15** (4), 82–95 (2024).

Сергей Константинович Водопьянов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: vodopis@math.nsc.ru

Степан Валерьевич Павлов

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,
e-mail: s.pavlov4254@gmail.com

S.K. Vodop'yanov and S.V. Pavlov

On closure of the class of homeomorphisms with integrable distortion and the minimization of functionals

Abstract. It is known that the limit of a sequence of (quasi)conformal mappings is either a constant or a (quasi)conformal mapping. In this paper, we prove that in the case of Heisenberg-type Carnot groups, a similar property is valid for mappings that are quasiconformal in the mean, i.e., for homeomorphisms with finite distortion and a distortion function integrable to an appropriate degree. This result is applied to solving model problems of nonlinear elasticity theory on Carnot groups.

Keywords: quasiconformal analysis, finite distortion, distortion function, composition operator, nonlinear elasticity, polyconvex function.

Sergey Konstantinovich Vodop'yanov

Sobolev Institute of Mathematics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: vodopis@math.nsc.ru

Stepan Valerievich Pavlov

Novosibirsk State University,
1 Pirogov str., Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: s.pavlov4254@gmail.com