

Т.Х. РАСУЛОВ, Ф.М. ЖУРАКУЛОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Аннотация. В данной статье рассматривается операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ третьего порядка со спектральным параметром $\mu > 0$. Она соответствует системе с не сохраняющимся и не более трех частиц на одномерной решетке и рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряженный оператор в обрезанном подпространстве пространства Фока. Используя спектральные свойства семейства обобщенных моделей Фридрихса, исследовано местоположение и структура существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$. Найден определитель Фредгольма, ассоциированный с операторной матрицей $\mathcal{A}_\mu$ и описан его дискретный спектр с помощью нулей определителя Фредгольма.

Ключевые слова: пространство Фока, операторная матрица, спектральный параметр, обобщенная модель Фридрихса, определитель Фредгольма, существенный спектр, дискретный спектр.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-5-84-90

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с существенными и дискретными спектрами операторных матриц третьего порядка, соответствующих гамильтонианам систем с не сохраняющимся и не более трех частиц на решетке, являются актуальными проблемами в физике твердого тела [1], квантовой теории поля [2], статистической физике [3], квантовой механике [4] и во многих других областях. Спектральные свойства операторных матриц подробно изучены в [5].

Отметим, что существенный и дискретный спектры гамильтонианов (операторных матриц) системы с не сохраняющимся и не более трех частиц на решетке изучены во многих работах (см., например, [6]–[9]). В работах [10], [11] существенный спектр и условия конечности числа собственных значений гамильтониана системы с не сохраняющимся и не более трех частиц на решетке были использованы при определении существенного спектра и при доказательстве конечности числа собственных значений модели спин-бозон с не более двумя фотонами на решетке, лежащих левее существенного спектра.

В настоящей работе рассматривается операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ третьего порядка со спектральным параметром $\mu > 0$, соответствующая системе с не сохраняющимся и не более трех

частиц на одномерной решетке. Изучаемая операторная матрица действует в прямой сумме нульчастичных, одночастичных и двухчастичных подпространств бозонного пространства Фока, т. е. в обрезанном подпространстве бозонного пространства Фока. В разделе 1 введено семейство обобщенных моделей Фридрихса и установлено, что оно имеет по одному изолированному простому собственному значению, лежащему ниже и выше своего существенного спектра. В разделе 2 определен так называемый канальный оператор, соответствующий операторной матрице $\mathcal{A}_\mu$. Показано, что канальный оператор имеет чисто существенный спектр и его спектр описан через спектр семейства обобщенных моделей Фридрихса. Установлено, что существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ совпадает со спектром канального оператора и исследовано расположение компонентов существенного спектра относительно спектрального параметра μ . Найдены значения параметра μ , для которых существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ имеет лауну. Построен определитель Фредгольма, ассоциированный с операторной матрицей $\mathcal{A}_\mu$ и показано, что его собственные значения совпадают с нулями определителя Фредгольма.

1. СПЕКТР СЕМЕЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

Через $\mathbb{T} := (-\pi; \pi]$ обозначим одномерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ — одномерное комплексное пространство и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}$.

Рассмотрим семейства обобщенных моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как 2×2 -операторная матрица

$$h_\mu(k) := \begin{pmatrix} h_{00} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$h_{00}f_0 = f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} f_1(t)dt, \quad (h_{11}(k)f_1)(y) = w(k, y)f_1(y). \quad (2)$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, $w(k, y) := 3 - \cos k - \cos y - \cos(k + y)$.

Семейство обобщенных моделей Фридрихса $h_\mu(k)$, определенное по формуле (1) с матричными элементами (2) является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Для удобства через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ обозначим, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Используя теоремы Вейля [12] о сохранении существенного спектра при конечномерных возмущениях, для существенного спектра операторной матрицы $h_\mu(k)$ имеем

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [m(k); M(k)],$$

где числа $m(k)$ и $M(k)$ определяются следующим образом:

$$m(k) := 3 - \cos k - \sqrt{2 + 2 \cos k}, \quad M(k) := 3 - \cos k + \sqrt{2 + 2 \cos k}.$$

Для каждого $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}$ определим регулярную функцию

$$\Delta_\mu(k; z) := \begin{cases} 1 - z - I_\mu(k; z), & z < m(k); \\ 1 - z + I_\mu(k; z), & z > M(k), \end{cases}$$

в области $\mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)]$, где

$$I_\mu(k; z) := \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3 - \cos k - z)^2 - 4 \cos^2 \frac{k}{2}}}.$$

Функция $\Delta_\mu(k; \cdot)$ обычно называется определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором $h_\mu(k)$.

Лемма 1. При каждом $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}$ число $z_\mu(k) \in \mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)]$ является собственным значением операторной матрицы $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(k; z_\mu(k)) = 0$.

Из леммы 1 следует $\sigma_{\text{disc}}(h_\mu(k)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)] : \Delta_\mu(k; z) = 0\}$.

Лемма 2. При каждом $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}$ оператор $h_\mu(k)$ имеет по одному простому собственному значению, лежащему слева от $m(k)$ и справа от $M(k)$.

Для определенности через $E_\mu^{(1)}(k)$ и $E_\mu^{(2)}(k)$ обозначим собственные значения оператора $h_\mu(k)$, лежащие слева от $m(k)$ и справа от $M(k)$, соответственно, т.е. $E_\mu^{(1)}(k) < m(k)$ и $E_\mu^{(2)}(k) > M(k)$. Для существования этих собственных значений одномерность тора играет важную роль. Причем, в силу аналитичности функции $w(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{T}^2$ и леммы 2 отображение $E_\mu^{(\alpha)} : k \in \mathbb{T} \rightarrow E_\mu^{(\alpha)}(k)$, $\alpha = 1, 2$, является непрерывной функцией на одномерном торе $\mathbb{T}$.

2. ОПЕРАТОРНАЯ МАТРИЦА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ЕГО СПЕКТР

Пусть $\mathcal{H}_2 := L_2^s(\mathbb{T}^2)$ — гильбертово пространство (комплекснозначных) квадратично-интегрируемых симметричных функций двух переменных, определенных на $\mathbb{T}^2$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Пространство $\mathcal{H}$ называется трехчастичным обрезанным подпространством стандартного бозонного пространства Фока

$$\mathcal{F}_b(L_2(\mathbb{T})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}) \oplus L_2^s(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^s(\mathbb{T}^3) \oplus \dots$$

над $L_2(\mathbb{T})$, где через $L_2^s(\mathbb{T}^n)$ обозначено гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций n переменных, определенных на $\mathbb{T}^n$, $n \geq 3$, симметричных относительно любых двух переменных.

В комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим операторную матрицу

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mu\mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mu\mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0,$$

где матричные элементы $\mathcal{A}_{ij} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются по формулам

$$\mathcal{A}_{00}f_0 = af_0, \quad \mathcal{A}_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt, \quad (\mathcal{A}_{11}f_1)(x) = f_1(x),$$

$$(\mathcal{A}_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} f_2(x, t)dt, \quad (\mathcal{A}_{22}f_2)(x, y) = w(x, y)f_2(x, y), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$ и $v(\cdot)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $\mathbb{T}$.

Операторы $\mathcal{A}_{01}$ и $\mathcal{A}_{12}$ называются операторами уничтожения, а операторы $\mathcal{A}_{01}^*$ и $\mathcal{A}_{12}^*$ называются операторами рождения, причем

$$\mathcal{A}_{01}^* : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{A}_{01}^*f_0)(x) = v(x)f_0,$$

$$\mathcal{A}_{12}^* : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2, \quad (\mathcal{A}_{12}^*f_1)(x, y) = \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2}, \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1.$$

Можно легко проверить, что операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{H}}_2 := L_2(\mathbb{T}^2)$. Рассмотрим так называемый канальный оператор, соответствующий операторной матрице $\mathcal{A}_\mu$ и действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2$ как

$$\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_{12} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что сопряженный оператор $\mathcal{A}_{12}^*$ на основе свойства гильбертова пространства $\mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2$ определяется как

$$\mathcal{A}_{12}^* : \mathcal{H}_1 \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_2, \quad (\mathcal{A}_{12}^* f_1)(x, y) = f_1(x), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

При этом канальный оператор $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$ также является линейным, ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2$.

Для $\alpha = 1, 2$ через $\text{Im } E_\mu^{(\alpha)}(\cdot)$ обозначим множество значений функции $E_\mu^{(\alpha)}(\cdot)$.

В следующем утверждении спектр оператора канала $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$ описывается спектром семейства обобщенных моделей Фридрихса $h_\mu(k)$.

Теорема 1. *Канальный оператор $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$ имеет чисто существенный спектр, и имеет место равенство*

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}) = \text{Im } E_\mu^{(1)}(\cdot) \cup \left[0; \frac{9}{2}\right] \cup \text{Im } E_\mu^{(2)}(\cdot).$$

При доказательстве теоремы 1 пользуемся разлагаемостью в прямой интеграл канального оператора $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$:

$$\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}} = \int_{\mathbb{T}} \oplus h_\mu(k) dk,$$

леммой 2 и теоремой о спектре разложимых операторов [12].

Местоположение существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и максимальное число компонентов $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ описывается с помощью следующего утверждения.

Теорема 2. *Существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ совпадает со спектром канального оператора $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$. Кроме того, множество $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ состоит из объединения не более трех отрезков.*

Теорема 2 доказывается с использованием критерия Вейля, характеристического свойства уравнения Фаддеева и аналитической теоремы Фредгольма. А при доказательстве второй части этой теоремы используется лемма 2.

Следующее утверждение описывает структуру существенного спектра, т. е. расположение компонентов существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ в зависимости от параметра μ .

Теорема 3.

а) Если $\mu \in \left(0; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \left[\min_{k \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(k); \max_{k \in \mathbb{T}} E_\mu^{(2)}(k) \right];$$

б) если $\mu \in \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}} \right]$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \text{Im } E_\mu^{(1)}(\cdot) \cup \left[0; \max_{k \in \mathbb{T}} E_\mu^{(2)}(k) \right]$$

и $\max_{k \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(k) < 0$;

с) если $\mu > \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}}$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \text{Im } E_\mu^{(1)}(\cdot) \cup \left[0; \frac{9}{2} \right] \cup \text{Im } E_\mu^{(2)}(\cdot)$$

и $\max_{k \in \mathbb{T}} E_\mu^{(1)}(k) < 0$, $\min_{k \in \mathbb{T}} E_\mu^{(2)}(k) > \frac{9}{2}$.

Очевидно, что в случаях б), с) появляется лакуна существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

Теорема 3 играет важную роль при изучении числа собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, лежащих вне, в том числе в лакунах существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$.

Пусть I — единичный оператор в $\mathcal{H}_1$, K_μ — интегральный оператор в $\mathcal{H}_1$, порожденный ядром

$$K_\mu(x, y; z) := \frac{\mu^2}{2\Delta_\mu(x, z)(w(x, y) - z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu),$$

$\Delta_\mu(z)$ и $D_\mu(x, y; z)$ — соответственно определитель и минор Фредгольма оператора $I - K_\mu$.

При $\mu > 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ определим регулярную функцию вида

$$\Omega_\mu(z) := \left(a - z - \int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t)dt}{\Delta_\mu(t; z)} \right) \Delta_\mu(z) + \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{v(x)v(t)D_\mu(x, t; z)}{\Delta_\mu(t; z)} dx dt.$$

Связь между собственными значениями операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ и нулями функции $\Omega_\mu(\cdot)$ устанавливает

Теорема 4. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}_\mu$ тогда и только тогда, когда $\Omega_\mu(z) = 0$.

В ходе доказательства теоремы 4 применяем методы из теории линейных интегральных уравнений. Из теоремы 4 для дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_\mu$ получим

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_\mu) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) : \Omega_\mu(z) = 0\}.$$

Видно, что согласно теореме 4 функция $\Omega_\mu(\cdot)$ обладает характеристическим свойством определителя Фредгольма. По этой причине назовем ее определителем Фредгольма, ассоциированным с операторной матрицей $\mathcal{A}_\mu$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели операторную матрицу $\mathcal{A}_\mu$ со спектральным параметром μ , который соответствует гамильтониану системы с не сохраняющимся и не более трех частиц на одномерной решетке. Операторная матрица $\mathcal{A}_\mu$ действует в прямой сумме нульчастичных, одночастичных и двухчастичных подпространств бозонного пространства Фока. Выделен канальный оператор $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$, соответствующий операторной матрице $\mathcal{A}_\mu$ и установлено, что канальный оператор $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$ имеет чисто существенный спектр. Показано, что существенный

спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$ совпадает со спектром канального оператора $\mathcal{A}_\mu^{\text{ch}}$. Структура существенного спектра, точнее расположение компонентов существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$, описана относительно параметра взаимодействия μ . Построен определитель Фредгольма, множество нулей которого совпадает с дискретным спектром операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mogil'ner A.I. *Hamiltonians in solid-state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: Problems and results*, Adv. Sov. Math. **5**, 139–194 (1991).
- [2] Фридрихс К.О. *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве* (Мир, М., 1969).
- [3] Malyshev V.A., Minlos R.A. *Linear infinite-particle operators*, Translations of Mathematical Monographs (Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995).
- [4] Thaller B. *The Dirac equation (Texts and Monographs in Physics)* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [5] Tretter C. *Spectral theory of block operator matrices and applications* (World Scientific, 2008).
- [6] Расулов Т.Х., Исмоилова Д.Э. *Спектральные соотношения для матричной модели в фермионном пространстве Фока*, Изв. вузов. Матем. (3), 91–96 (2024).
- [7] Муминов М.Э., Бозоров И.Н., Расулов Т.Х. *О числе компонентов существенного спектра одной 2×2 -операторной матрицы*, Изв. вузов. Матем. (2), 85–90 (2024).
- [8] Расулов Т.Х. *Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц*, Изв. вузов. Матем. (12), 59–69 (2008).
- [9] Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. *Бесконечность числа собственных значений операторных 2×2 -матриц. Асимптотика дискретного спектра*, ТМФ **205** (3), 368–390 (2020).
- [10] Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T. *On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case*, J. Math. Phys. **56** (5), 053507 (2015).
- [11] Расулов Т.Х. *О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами*, ТМФ **186** (2), 293–310 (2016).
- [12] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов* (Мир, М., 1982).

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,
e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Фарангис Мурот кизи Журакулова

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,
e-mail: juraqulova.farangis@mail.ru, f.m.juraqulova@buxdu.uz

T.H. Rasulov and F.M. Jurakulova

Investigation of the spectrum of an operator matrix of order three in one-dimensional case

Abstract. In this paper, operator matrix $\mathcal{A}_\mu$ of order three with spectral parameter μ is considered. It corresponds to a system with non-conserved and no more than three particles on the one-dimensional lattice and is considered as a linear, bounded and self-adjoint operator in a cut subspace of the Fock space. Using the spectral properties of a family of generalized Friedrich models, the location and structure of the essential spectrum of the operator matrix $\mathcal{A}_\mu$ is investigated. The Fredholm determinant associated with the operator matrix $\mathcal{A}_\mu$ is found and its discrete spectrum is described by the zeros of the Fredholm determinant.

Keywords: Fock space, operator matrix, spectral parameter, generalized Friedrichs model, Fredholm determinant, essential spectrum, discrete spectrum.

Tulkin Husenovich Rasulov

Bukhara State University,

11 M. Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Farangis Murot kizi Jurakulova

Bukhara State University,

11 M. Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: juraqulova.farangis@mail.ru, f.m.juraqulova@buxdu.uz