

А.О. ИГНАТЬЕВ

ОБ ИМПУЛЬСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Аннотация. Сформулированы понятия хаотических систем и систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Предложен метод стабилизации нулевого решения хаотической системы Лоренца с помощью импульсных воздействий, которые происходят на некотором множестве фазового пространства.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, система Лоренца, стабилизация.

УДК: 517.925

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-5-58-67

ВВЕДЕНИЕ

Хаотическое поведение — это кажущееся случайным явление детерминированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое характеризуется чувствительной зависимостью от начальных условий. Такое поведение может быть нежелательным или вредным при многих обстоятельствах, что говорит о важности изучения хаотических систем и связанных с ними проблем устойчивости. В последние десятилетия хаотические системы интенсивно исследовались [1]–[5]. Приведем определение хаотической системы [2]. Для этого рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (1)$$

где $x(t)$ — вектор состояния системы, t — время.

Определение 1. Замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется аттрактором системы (1), если

- а) существует открытое множество $\Omega_0 \supset \Omega$ такое, что все траектории $x(t)$ системы (1), начинающиеся в Ω_0 , определены при всех $t \geq 0$ и стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$ (т. е. $\text{dist}(x(t), \Omega) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $x(0) \in \Omega_0$, где

$$\text{dist}(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$$

— расстояние от точки x до множества Ω);

- б) никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Определение 2. Аттрактор называется хаотическим, если он ограничен, и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Поступила в редакцию 18.04.2024, после доработки 10.06.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке регионального научно-образовательного математического центра «Азово-Черноморский математический центр».

Определение 3. Система называется хаотической, если у нее существует хотя бы один хаотический аттрактор.

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое “сверхчувствительностью” от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории удаляются друг от друга на конечное расстояние.

В 1963 г. метеоролог Э. Лоренц опубликовал [6] пример параметризованной полиномиальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (2)$$

как очень упрощенную модель конвекции теплоносителя, мотивированную попыткой понимать основы прогноза погоды. В настоящее время эти дифференциальные уравнения называются уравнениями Лоренца. С помощью численного анализа Э. Лоренц показал, что при

$$a = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3} \quad (3)$$

эта система является хаотической. Эти дифференциальные уравнения демонстрируют решения, которые остаются в ограниченной области $\mathbb{R}^3$, но которые обладают тем свойством, что решения с близкими начальными условиями могут значительно отличаться друг от друга через конечный интервал времени. Позднее в работах [7], [4] показано, что дифференциальные уравнения движения некоторого лабораторного водяного колеса имеют вид (2) при $b = 1$. Отсюда следует, что уравнения (2) можно вывести непосредственно как модель механической системы, а не как приближение к уравнениям в частных производных. Это водяное колесо было построено в Массачусетском технологическом институте в 1970-х гг., оно помогло убедить скептически настроенных физиков и инженеров по поводу реальности хаоса в конкретных системах. В 2002 г. В. Такер [8] привел математическое доказательство существования аттрактора уравнений Лоренца. В настоящей статье предлагается метод стабилизации нулевого решения системы (2) с помощью импульсных воздействий. Для этого рассмотрим, что собой представляют дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями во многих случаях длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят “мгновенный” характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К первым работам в этом направлении следует отнести [9], [10]. Итогом первых работ по дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием явилась монография [11], в которой изложены основы этой теории. Сейчас теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием представляет собой интенсивно развивающееся направление математики, различные аспекты которого изложены в [12]–[15]. В последние годы опубликованы сотни прикладных работ, в качестве математических моделей которых использованы дифференциальные уравнения с импульсным воздействием (например, в [16]–[19] такие модели используются в медико-биологических исследованиях). Вследствие этого заметно увеличилось число математических работ по исследованию различных аспектов теории импульсных систем [20]–[29].

Согласно [14], [30] импульсная динамическая система (или система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием) состоит из трех элементов:

- непрерывной динамической системы, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений между моментами импульсного воздействия;
- системы разностных уравнений, которая описывает способ изменения положения в момент импульсного воздействия;
- критерия, по которому определяются моменты импульсного воздействия.

Таким образом, в общем случае система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием имеет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = Y(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (t, y(t)) \notin \mathcal{S}, \quad (4)$$

$$\Delta y(t) = J(t, y(t)), \quad (t, y(t)) \in \mathcal{S}, \quad (5)$$

где $t \geq t_0 \geq 0$ — время, $y(t) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}$ — открытое множество, $\mathcal{S}$ — заданное множество в расширенном фазовом пространстве, $\Delta y(t) \triangleq y(t^+) - y(t)$, где $y(t^+) \triangleq y(t) + J(y(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} y(t + \varepsilon)$. Функции Y и J считаем непрерывными при $(t, y) \in [0, +\infty) \times \mathcal{D}$.

Решением системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (4), (5) является кусочно-непрерывная функция $y(t)$ с начальным значением y_0 при $t = t_0$ с разрывами первого рода в моменты импульсного воздействия. Функция $y(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений на отрезке $[t_0, t_1]$, где $(t_1, y(t_1)) \in \mathcal{S}$, причем $(t, y(t)) \notin \mathcal{S}$ при $t \in [t_0, t_1)$, т.е. значение $t = t_1$ — это первый момент импульсного воздействия, при котором $y(t)$ совершает скачок $\Delta y(t_1) = J(t_1, y(t_1))$ и мгновенно перемещается в точку $y(t_1^+) = y(t_1) + J(t_1, y(t_1))$. Далее эволюция решения происходит согласно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(t)}{dt} = Y(t, y(t)), \quad y(t_1) = y_1$$

до следующего момента импульсного воздействия t_2 , когда $(t_2, y(t_2)) \in \mathcal{S}$, причем $(t, y(t)) \notin \mathcal{S}$ при $t \in (t_1, t_2)$ и в этот момент t_2 происходит следующий скачок $\Delta y(t_2) = J(t_2, y(t_2))$ и т.д.

В прикладных задачах обычно рассматриваются следующие частные случаи дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

- импульсное воздействие происходит на некотором множестве $\mathcal{M}$ фазового пространства, и система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad \text{при} \quad y \notin \mathcal{M}, \\ \Delta y &= J(y) \quad \text{при} \quad y \in \mathcal{M}; \end{aligned} \quad (6)$$

- импульсные воздействия происходят в известные фиксированные моменты времени и система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Y(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad \text{при} \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta y(t) &= J_k(y(t)) \quad \text{при} \quad t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отметим, что в системе (6) размерность множества $\mathcal{M}$ может как совпадать с размерностью фазового пространства (см., например, [31]), так может быть и меньше размерности фазового пространства (см., например, [30], [32]).

2. ИМПУЛЬСНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЛОРЕНЦА

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2) при условиях (3):

$$\dot{x} = -10x + 10y, \quad \dot{y} = 28x - y - xz, \quad \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z.$$

Эта система допускает нулевое решение

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad (7)$$

которое не является устойчивым по Ляпунову. В работах [33]–[38] рассмотрена задача стабилизации этого решения с помощью системы линейных импульсных возмущений, т. е. рассмотрена задача асимптотической устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени τ_k

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{при } t \neq \tau_k, \\ \Delta\mathbf{x} &= B\mathbf{x} \quad \text{при } t = \tau_k, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\mathbf{x}^T = (x, y, z), \quad A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$. Указаны ограничения на элементы матрицы B и величины $\delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, при выполнении которых нулевое решение системы (8) асимптотически устойчиво.

В настоящей работе мы также рассматриваем задачу об импульсной стабилизации системы Лоренца, но предполагаем, что импульсные воздействия происходят не в фиксированные моменты времени, а на некотором множестве $\mathcal{M}$ фазового пространства. Обозначим

$$\mathcal{M} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -10x^2 + 38xy - y^2 \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема. Нулевое решение системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -10x + 10y, \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz \quad \text{при } (x, y, z) \notin \mathcal{M}, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \frac{8}{3}z, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta x = -x - y, \quad \Delta y = x - y, \quad \Delta z = 0 \quad \text{при } (x, y, z) \in \mathcal{M} \quad (10)$$

глобально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Ее производная в силу системы (9) равна $\dot{V} = -10x^2 + 38xy - y^2 - \frac{8}{3}z^2$. Обозначим через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ решение системы (9), (10) с произвольной начальной точкой $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, т. е. $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Если эта начальная точка принадлежит множеству $\mathcal{M}$, то с помощью импульсного воздействия (10) она переносится во множество $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$. Поэтому можно сразу предполагать, что $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$.

Обозначив $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем, что в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) множество $\mathcal{M}$ принимает вид

$$\mathcal{M} := \{(\rho, \varphi, z) : -10 \cos^2 \varphi + 38 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi \geq 0, \quad \rho \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}\}.$$

Неравенство $-10 \cos^2 \varphi + 38 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi \geq 0$ имеет решение

$$\varphi \in [\varphi_1 + \pi n, \varphi_2 + \pi n], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_1 = \arctan(19 - \sqrt{351}) \approx 0.25905$, $\varphi_2 = \arctan(19 + \sqrt{351}) \approx 1.54443$. Здесь и далее величина угла φ выражается в радианах. Согласно [39] обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (9), (10) в цилиндрической системе координат принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho(-10 \cos^2 \varphi + 38 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi - z \sin \varphi \cos \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 28 \cos^2 \varphi + 9 \sin \varphi \cos \varphi - 10 \sin^2 \varphi - z \cos^2 \varphi, \\ \frac{dz}{dt} &= \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{8}{3} z \\ \text{при } \varphi \in \Omega &:= (\varphi_2 + \pi n, \varphi_1 + \pi + \pi n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\rho = 0, \quad \Delta z = 0 \quad \text{при } \varphi \in [\varphi_1 + \pi n, \varphi_2 + \pi n], \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Непрерывная траектория $\mathcal{X}(t) := (\rho(t), \varphi(t), z(t))$, исходящая из начальной точки $\mathcal{X}(t_0) = (\rho_0, \varphi_0, z_0)$, представляет собой решение системы (11), (12) с начальными значениями (ρ_0, φ_0, z_0) . Начальным значениям x_0 и y_0 системы (9), (10) соответствуют $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ и φ_0 , где начальный угол φ_0 определяется из равенств

$$x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0.$$

Учитывая, что правые части системы (11), (12) периодичны с периодом π и предположение $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}$, можем считать, что $\varphi_0 \in (\varphi_2, \varphi_1 + \pi)$. Траектория $\mathcal{X}(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений (11) от момента времени t_0 до некоторого момента t_1 , при котором траектория достигнет границы области Ω , т. е. при $t = t_1$ значение $\varphi(t)$ будет равно $\varphi_1 + \pi$ или φ_2 .

Рассмотрим вспомогательную функцию $V(t) = \frac{1}{2} (\rho^2(t) + z^2(t))$. Ее производная в силу системы дифференциальных уравнений (11) равна

$$\dot{V}(t) = \rho^2(t) [-10 \cos^2 \varphi(t) + 38 \sin \varphi(t) \cos \varphi(t) - \sin^2 \varphi(t)] - \frac{8}{3} z^2(t).$$

Учитывая $-10 \cos^2 \varphi(t) + 38 \sin \varphi(t) \cos \varphi(t) - \sin^2 \varphi(t) < 0$ при $t \in (t_0, t_1)$, получаем, что при таких значениях t справедливо неравенство

$$V(t) < V(t_0) = \frac{1}{2} (\rho_0^2 + z_0^2) = \frac{1}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

Момент времени t_1 представляет собой момент импульсного воздействия, в который значения ρ и z не изменяются, а угол φ увеличивается на $\frac{\pi}{2}$, т. е. становится равным одному из значений $\varphi_1 + \frac{3\pi}{2} \approx 4.97144$ или $\varphi_2 + \frac{\pi}{2} \approx 3.11523$. Рассматривая дальнейшее решение системы дифференциальных уравнений (11) с импульсными воздействиями (12), обозначим дальнейшие точки импульсных воздействий $\{t_i\}_{i=2}^\infty$, где $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Находим расстояние между значением $\varphi(t_i^+)$ и множеством

$$\Omega : \text{dist}(\varphi(t_i^+), \Omega) = \Delta\varphi, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$\Delta\varphi = \min \left\{ \frac{\pi}{2} - (\varphi_2 - \varphi_1), \varphi_1 + \pi - \left(\varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \varphi_2 \approx 0.28542.$$

Оценим величину $\dot{\varphi}(t)$:

$$\begin{aligned} |\dot{\varphi}(t)| &= |28 \cos^2 \varphi(t) + 9 \sin \varphi(t) \cos \varphi(t) - 10 \sin^2 \varphi(t) - z(t) \cos^2(t)| = \\ &= \left| 10 \cos 2\varphi(t) + \frac{9}{2} \sin 2\varphi(t) + 18 \cos^2 \varphi(t) - z(t) \cos^2 \varphi(t) \right| \leq \\ &\leq 10 + \frac{9}{2} + 18 + |z(t)| \leq \frac{65}{2} + \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}. \end{aligned}$$

Из ограниченности величины $\dot{\varphi}(t)$ следует ограниченность снизу величин $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$:

$$\Delta t_i \geq \frac{\Delta\varphi}{\frac{65}{2} + \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

что исключает наличие так называемых биений, когда на конечном промежутке времени находится неограниченное количество моментов импульсного воздействия.

Учитывая, что во все время движения при $t > t_0$ рассматриваемая траектория $\mathcal{X}(t) = (\rho(t), \varphi(t), z(t))$ удовлетворяет свойству $\varphi(t) \in \Omega$, можно сделать вывод, что

$$V(t) = \frac{1}{2} (\rho^2(t) + z^2(t)) \leq \frac{1}{2} (\rho_0^2 + z_0^2), \quad (13)$$

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{8}{3} z^2(t) \quad (14)$$

при $t \geq t_0$. Из неравенства (13) следует устойчивость по Ляпунову нулевого решения системы (9), (10). Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0. \quad (15)$$

Рассматриваемая траектория может удовлетворять или не удовлетворять соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим оба этих случая. Сначала предположим, что предельное соотношение (16) не выполняется, т. е. мы предполагаем, что существует $\eta > 0$ и последовательность моментов времени $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ такая, что $|z(T_k)| \geq 2\eta$. Это означает, что либо существует момент времени T_1 такой, что $|z(t)| \geq \eta$ при $t \geq T_1$, либо существует последовательность моментов времени $\tau_k \rightarrow \infty$ такая, что $\tau_{2k-1} < T_k < \tau_{2k}$, $|z(\tau_{2k-1})| = |z(\tau_{2k})| = \eta$, $z(t) \geq \eta$ при $\tau_{2k-1} \leq t \leq \tau_{2k}$. Учитывая ограниченность выражения $\rho^2(t) + z^2(t)$, заключаем, что функция $z(t)$ удовлетворяет условию Липшица и существует положительное число ξ такое, что $\tau_{2k} - \tau_{2k-1} \geq \xi > 0$. Следовательно, предположив, что предельное соотношение (16) не выполняется, заключаем, что функция $z(t)$ обладает свойством, которое аналогично [40] назовем свойством А.

Свойство А. Для некоторого $\eta > 0$ существуют интервал $(\tau_1, +\infty)$ или интервалы (τ_1, τ_2) , (τ_3, τ_4) , (τ_{2k-1}, τ_{2k}) такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} (\tau_{2k} - \tau_{2k-1}) = +\infty$, на которых $|z(t)| \geq \eta$.

Из свойства А и неравенства (14) следует предельное соотношение (15).

Предположим теперь, что функция обладает свойством (16). В этом случае существует такой момент времени $t = T$, что $|z(t)| \leq 1$ при $t \geq T$. В дальнейшем считаем, что $t \geq T$ и $|z(t)| \leq 1$. Выясним, при каких значениях φ справедливо неравенство

$$g(\varphi, z) := -10 \cos^2 \varphi + 38 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi - z \sin \varphi \cos \varphi \leq -1.$$

Учитывая, что $-1 = -\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi$, оно приводится к виду

$$[-9 \cos \varphi + (38 - z) \sin \varphi] \cos \varphi \leq 0.$$

Это неравенство справедливо при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \varphi_3 + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{N}_0$, где

$$\varphi_3 = \arctan \frac{9}{39} \approx 0.22680.$$

Таким образом, получили $|z(t)| \leq 1$ при $t \geq T$ и

$$\begin{aligned} -10 \cos^2 \varphi(t) + [38 - z(t)] \sin \varphi(t) \cos \varphi(t) - \sin^2 \varphi(t) &\leq -1 \\ \text{при } \varphi(t) &\in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n, \varphi_3 + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Выясним знак $\dot{\varphi}$ при $|z| \leq 1$. Для этого сначала решим уравнение

$$(28 - z) \cos^2 \varphi + 9 \sin \varphi \cos \varphi - 10 \sin^2 \varphi = 0$$

относительно φ . Оно имеет корни $\varphi^*(z) + \pi n$ и $\varphi^{**}(z) + \pi n$, $n \in \mathbb{N}_0$, где

$$\varphi^*(z) = \arctan \left(\frac{9 - \sqrt{1201 - 40z}}{20} \right), \quad \varphi^{**}(z) = \arctan \left(\frac{9 + \sqrt{1201 - 40z}}{20} \right).$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &> 0 \quad \text{при } \varphi^*(z) + \pi n < \varphi < \varphi^{**}(z) + \pi n, \\ \dot{\varphi} &< 0 \quad \text{при } \varphi^{**}(z) + \pi n < \varphi < \varphi^*(z) + \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi(t)$ возрастает при

$$\varphi^*(z) + \pi n < \varphi < \varphi^{**}(z) + \pi n$$

и убывает при

$$\varphi^{**}(z) + \pi n < \varphi < \varphi^*(z) + \pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Выражения $\varphi^*(z)$ и $\varphi^{**}(z)$ зависят от $z \in [-1, +1]$, причем $\frac{d\varphi^*}{dz} > 0$, $\frac{d\varphi^{**}}{dz} < 0$. Это означает, что $\varphi^*(z)$ имеет наибольшее значение при $z = 1$ и наименьшее при $z = -1$. Аналогично, $\varphi^{**}(z)$ имеет наибольшее значение при $z = -1$ и наименьшее при $z = 1$:

$$\begin{aligned} -0.91931 \approx \varphi^*(-1) &\leq \varphi^*(z) \leq \varphi^*(1) \approx -0.89749, \\ 1.13610 \approx \varphi^{**}(1) &\leq \varphi^{**}(z) \leq \varphi^{**}(-1) \approx 1.14611. \end{aligned} \tag{17}$$

Предположим, что $\varphi(t_i) = \varphi_1$ и $n = 0$. В этом случае $\varphi(t_i^+) = \varphi_1 + \pi/2 \approx 1.82980$ удовлетворяет неравенствам $\varphi^{**}(z) \leq \varphi(t_i^+) \leq \varphi^*(z) + \pi$. Это означает, что $\dot{\varphi}|_{\varphi=\varphi(t_i^+)} < 0$ и $\varphi(t)$ убывает при $t_i < t < t_{i+1}$, где t_{i+1} — следующий момент переключения, при котором функция $\varphi(t)$ достигает значения φ_2 . Функция $\varphi(t)$ согласно (11) является убывающей до тех пор, пока $\varphi(t) > \varphi^{**}(z)$. Но так как согласно (17) $\varphi^{**}(z) < \varphi_2$, функция $\varphi(t)$ раньше достигнет значения φ_2 , и это будет следующий момент переключения, т. е. $\varphi(t)$ будет убывающей на интервале (t_i, t_{i+1}) от значения $\varphi(t_i^+) = \varphi_1 + \pi/2$ до значения $\varphi(t_{i+1}) = \varphi_2$. Рассмотрим функцию

$$g(\varphi, z) = -10 \cos^2 \varphi + 38 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi - z \sin \varphi \cos \varphi.$$

Найдем наибольшее значение этой функции при $\varphi \in [\pi/2, \varphi_1 + \pi/2]$, $z \in [-1, +1]$. Оно равно -1 . Следовательно, $g(\varphi, z) \leq -1$ при $\varphi \in [\pi/2, \varphi_1 + \pi/2]$, $z \in [-1, +1]$.

Функция $\varphi(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$ монотонно убывает от значения $\varphi(t_i^+) = \varphi_1 + \pi/2$ до $\varphi(t_{i+1}) = \varphi_2$, причем $g(\varphi(t), z(t)) \leq 0$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$ и $g(\varphi(t), z(t)) \leq -1$ при $t \in (t_i, T_i)$, где T_i — момент времени, при котором $\varphi(t)$ достигает значения $\varphi = \pi/2$. Аналогично оценке (13) получаем

$$T_i - t_i \geq \frac{(\varphi_1 + \pi/2) - \pi/2}{\frac{65}{2} + \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}} = \frac{\varphi_1}{\frac{65}{2} + \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}} := \gamma > 0.$$

Исследуем поведение функции $\rho(t)$. Так как $d\rho(t)/dt = \rho(t)g(\varphi(t), z(t))$, то

$$\ln \rho(t_{i+1}) - \ln \rho(t_i) = \int_{t_i}^{T_i} g(\varphi(s), z(s)) ds + \int_{T_i}^{t_{i+1}} g(\varphi(s), z(s)) ds.$$

Учитывая, что

$$\int_{t_i}^{T_i} g(\varphi(s), z(s)) ds \leq -\gamma, \quad \int_{T_i}^{t_{i+1}} g(\varphi(s), z(s)) ds \leq 0,$$

отсюда получаем

$$\rho(t_{i+1}) \leq \rho(t_i) e^{-(T_i - t_i)} \leq \rho(t_i) e^{-\gamma}.$$

После того, как $\varphi(t)$ достигает значения $\varphi(t_{i+1}) = \varphi_2$, происходит скачок, в результате которого функция $\varphi(t)$ переходит в положение $\varphi(t_{i+1}^+) = \varphi_2 + \pi/2$. В дальнейшем $\varphi(t)$ возрастает до значения $\varphi_1 + \pi$ при $t \in (t_{i+1}, t_{i+2})$, так как в интервале $\varphi \in (\varphi_2 + \pi/2, \varphi_1 + \pi)$ ее производная $d\varphi/dt$ положительна при $z \in [-1, +1]$, а функция $g(\varphi, z)$ неположительна при таких значениях φ и z . Анализ дифференциального уравнения $d\rho/dt = \rho g(\varphi, z)$ показывает, что $\rho(t_{i+2}) \leq \rho(t_{i+1}) \leq \rho(t_i) e^{-\gamma}$. Правые части системы дифференциальных уравнений (11) периодичны по φ с периодом π , отсюда следует

$$\rho(t_{i+4}) \leq \rho(t_{i+3}) \leq \rho(t_{i+2}) e^{-\gamma},$$

откуда имеем $\rho(t_{i+2m}) \leq \rho(t_i) e^{-m\gamma}$. В силу того, что $\lim_{m \rightarrow \infty} m\gamma = \infty$, получаем предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$. Учитывая

$$V(t) = \frac{1}{2} [x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)] = \frac{1}{2} [\rho^2(t) + z^2(t)]$$

и предположение (16), отсюда следует $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$.

Таким образом доказано, что решение $(x(t), y(t), z(t))$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (9), (10), начинающееся в произвольной точке (x_0, y_0, z_0) стремится к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Так как устойчивость по Ляпунову решения (7) системы (9), (10) была доказана ранее, из этого следует, что решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ этой системы глобально асимптотически устойчиво, что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем исследовании показано, что неустойчивое положение равновесия хаотической системы Лоренца может быть стабилизировано с помощью импульсных воздействий, которые происходят на некотором множестве фазового пространства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lorenz E.N. *The essence of chaos. The Jessie and John Danz Lectures* (UCL Press, 1993).
- [2] Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. *Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы*, Автомат. телемехан. (5), 3–45 (2003).
- [3] Xuze Wu, Yu Sun, Yu Wang, Yu Chen *Passive chaos suppression for the planar slider-crank mechanism with a clearance joint by attached vibro-impact oscillator.*, Mechanism Machine Theory **174**, 104882 (2022).
- [4] Strogatz S.H. *Nonlinear dynamics and chaos. With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, 2nd edition (CRC Press, Boca Raton London, 2015).
- [5] Жукова Н.И., Левин Г.С., Тонышева Н.С. *Хаотические топологические слоения*, Изв. вузов. Матем. (8), 81–86 (2022).
- [6] Lorenz E.N. *Deterministic nonperiodic flow.*, J. Atmos. Sci. **20** (2), 130–141 (1963).
- [7] Lorenz E.N. *On the prevalence of aperiodicity in simple systems*, Global Anal. Lect. Notes Math. **755**, 53–75 (Springer, Berlin, 1979).
- [8] Tucker W. *A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem*, Found. Comput. Math. **2** (1), 53–117 (2002).
- [9] Мильман В.Д., Мышкис А.Д. *Об устойчивости движения при наличии толчков*, Сиб. матем. журн. **1** (2), 233–237 (1960).
- [10] Мышкис А.Д., Самойленко А.М. *Системы с толчками в заданные моменты времени*, Матем. сб. **74** (2), 202–208 (1967).
- [11] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием* (Вища шк., Киев, 1987).
- [12] Bainov D.D., Simeonov P.S. *Systems with impulse effect: stability, theory and applications* (Ellis Horwood Lim./John Wiley & Sons, Chichester, 1989).
- [13] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. *Theory of impulsive differential equations* (World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1989).
- [14] Haddad W.M., Chellaboina V., Nersesov S.G. *Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control* (Princeton Univ. Press, Princeton, 2006).
- [15] Li Z., Soh Y., Wen C. *Switched and Impulsive Systems: Analysis, Design, and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 2005).
- [16] d'Onofrio A. *Pulse vaccination strategy in the sir epidemic model: global asymptotic stable eradication in presence of vaccine failures*, Math. Comput. Model. **36** (4–5), 473–489 (2002).
- [17] Smith R.J., Wahl L.M. *Distinct effects of protease and reverse transcriptase inhibition in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects*, Bull. Math. Biol. **66** (5), 1259–1283 (2004).
- [18] Smith R.J., Wahl L.M. *Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects*, Bull. Math. Biol. **67** (4), 783–813 (2005).
- [19] Zhou Y., Liu H. *Stability of periodic solutions for an SIS model with pulse vaccination*, Math. Comput. Model. **38** (3–4), 299–308 (2003).
- [20] Перестюк М.О., Чернікова О.С. *До питання про стійкість інтегральних множин систем імпульсних диференціальних рівнянь*, Укр. матем. журн. **54** (2), 249–257 (2002).
- [21] Cabada A., Liz E. *Discontinuous impulsive differential equations with nonlinear boundary conditions*, Nonlinear Anal. TMA **28** (9), 1491–1497 (1997).
- [22] Гладиліна Р.І., Ігнат'єв А.О. *О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости для импульсных систем*, Укр. матем. журн. **55** (8), 1035–1043 (2003).
- [23] Платонов А.В. *Анализ устойчивости нестационарных систем с переключениями*, Изв. вузов. Матем. (2), 63–73 (2020).
- [24] Гладиліна Р.І., Ігнат'єв А.О. *Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием*, Матем. заметки **76** (1), 44–51 (2004).
- [25] Ігнат'єв А.О. *Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием*, Матем. сб. **194** (10), 117–132 (2003).
- [26] Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. *Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях*, Дифференц. уравнения **27** (9), 1516–1521 (1991).
- [27] Ігнат'єв А.О., Ігнат'єв О.А., Солиман А.А. *Об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений систем с импульсным воздействием*, Матем. заметки **80** (4), 516–525 (2006).
- [28] Двирный А.И., Слынько В.И. *Аналог критического случая А.М. Молчанова для импульсных систем*, Автомат. телемехан. **76** (6), 3–17 (2015).

- [29] Двирный А.И., Слынько В.И. *Применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием*, Матем. заметки **96** (1), 22–35 (2014).
- [30] Игнатъев А.О. *О существовании периодического решения системы Лъенара с импульсным воздействием*, Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН **27** (1), 79–87 (2021).
- [31] Ambrosino R., Iervolino R. *Finite-time stabilization of state dependent impulsive dynamical linear systems*, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. **47**, 101305 (2023).
- [32] Zhang Q., Tang S., Zou X. *Rich dynamics of a predator-prey system with state-dependent impulsive controls switching between two means*, J. Diff. Equat. **364**, 336–377 (2023).
- [33] Liu X., Teo K.L. *Impulsive control of chaotic system*, Intern. J. Bifurcat. Chaos **12** (5), 1181–1190 (2002).
- [34] Liu X., Liu Y., Teo K.L. *Stability Analysis of Impulsive Control Systems*, Math. Comput. Model. **37**, 1357–1370 (2003).
- [35] Sun J., Zhang Y., Wub Q. *Impulsive control for the stabilization and synchronization of Lorenz systems*, Phys. Lett. A **298**, 153–160 (2002).
- [36] Wu X., Lu J., Tse C.K., Wang J., Liu J. *Impulsive control and synchronization of the Lorenz systems family*, Chaos, Solit. Fract. **31**, 631–638 (2007).
- [37] Xie W., Wen C., Li Z. *Impulsive control for the stabilization and synchronization of Lorenz systems*, Phys. Lett. A **275**, 67–72 (2000).
- [38] Yang T., Yang L.-B., Yang C.-M. *Impulsive control of Lorenz system*, Phys. Lett. D **110**, 18–24 (1997).
- [39] Игнатъев А.О. *Метод функций Ляпунова в системах разностных уравнений: устойчивость относительно части переменных*, Дифференц. уравнения **58** (3), 407–415 (2022).
- [40] Игнатъев А.О. *Об использовании аналога функции Ляпунова со знакопеременной производной при исследовании глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия*, Матем. заметки **96** (2), 212–216 (2014).

Александр Олегович Игнатъев

Институт прикладной математики и механики,
ул. Розы Люксембург, д. 74, г. Донецк, 283048, Россия,

e-mail: aoignat@mail.ru

A.O. Ignatyev

On the impulse stabilization of the Lorenz system

Abstract. The concepts of chaotic systems and systems of differential equations with impulsive action are formulated. A method for stabilizing the zero solution of the chaotic Lorenz system by means of impulsive actions that occur on a certain set of the phase space is proposed.

Keywords: system of differential equations with impulsive action, Lorenz system, stabilization.

Alexander Olegovich Ignatyev

Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
74 Rosa Luxemburg str., Donetsk, 283048 Russia,

e-mail: aoignat@mail.ru