

В.В. ВОЛЧКОВ, ВИТ.В. ВОЛЧКОВ

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ

Аннотация. Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для $r > 0$ через $V_r(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{|x| \leq r} f(x+y) dx = 0 \quad \text{для любого } y \in \mathbb{R}^n.$$

В работе исследуется интерполяция функций умеренного роста из класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ вместе с производными ограниченного порядка в заданном направлении.

Пусть $d \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ фиксированы, $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность точек, лежащих на прямой $\{x \in \mathbb{R}^n : x = d + t\sigma, t \in (-\infty, +\infty)\}$ и удовлетворяющих условиям

$$\inf_{i \neq j} |a_i - a_j| > 0, \quad |a_k| \leq |a_{k+1}| \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Пусть также $m \in \mathbb{Z}_+$, $b_{k,j} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, \dots, m\}$, — множество чисел, удовлетворяющих условию

$$\max_{0 \leq j \leq m} |b_{k,j}| \leq (k+1)^\alpha$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и некоторого $\alpha \geq 0$, не зависящего от k . Показано (теорема), что при указанных условиях интерполяционная задача

$$\left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \sigma_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^j f(a_k) = b_{k,j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \{0, \dots, m\},$$

разрешима в классе функций, принадлежащих $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, которые вместе со всеми своими производными имеют рост не выше степенного на бесконечности. Отмечено, что условие отделимости узлов $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ в теореме убрать нельзя, а также, что решение указанной интерполяционной задачи не является единственным. Кроме того, указано, что одномерный аналог теоремы неверен, поскольку всякая непрерывная функция класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ при $n = 1$ является $2r$ -периодической.

Ключевые слова: интерполяция, сферическое среднее, преобразование Фурье, функция Бесселя.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-5-44-57

Поступила в редакцию 29.03.2024, после доработки 19.04.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Исследование проводилось по темам государственного задания (регистрационные номера 124012400352-6 и 1023020800027-5-1.1.1).

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с разрешимостью интерполяционных задач для различных классов функций, изучались во многих работах (см., например, [1], раздел 4 и содержащуюся там библиографию). С недавнего времени исследуются условия разрешимости интерполяционных задач для гладких функций в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеющих нулевые интегралы по всем шарам одного фиксированного радиуса [2], [3].

Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для $r > 0$ через $V_r(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество функций $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{|x| \leq r} f(x+y) dx = 0 \quad (1)$$

для любого $y \in \mathbb{R}^n$. Вопрос о существовании ненулевой функции в классе $V_r(\mathbb{R}^n)$ был рассмотрен в 1929 г. известным румынским математиком Д. Помпейю, который ошибочно утверждал, что $V_r(\mathbb{R}^2) = \{0\}$ (см., например, [4]). Ошибка в рассуждениях Д. Помпейю была обнаружена в 1944 г. Л. Чакаловым [5], который показал, что функция $f(x) = \sin\left(\frac{\lambda}{r} x_1\right)$ удовлетворяет (1), если число λ является нулем функции Бесселя $J_{\frac{n}{2}}$. В дальнейшем класс $V_r(\mathbb{R}^n)$, а также различные его аналоги и обобщения изучались во многих работах (см. работы [4]–[10], содержащие обширную библиографию). В работе [2] было показано, что интерполяционная задача

$$f(a_k) = b_k \quad (2)$$

имеет решение $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, если множество узлов интерполяции $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ конечно, а $\{b_k\}$ — произвольный набор комплексных чисел. В случае бесконечного множества узлов ситуация становится значительно сложнее. Известны лишь некоторые частичные результаты в этом направлении, которые касаются случая, когда множество $\{a_k\}$ содержится на некоторой прямой в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \infty \quad (3)$$

(см. [2], [3]).

В данной работе изучается кратная интерполяционная задача для функций класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ с ограничениями роста на бесконечности. Рассматривается случай, когда множество узлов $\{a_k\}$ является бесконечным и лежит на некоторой прямой в $\mathbb{R}^n$, а к условиям (2) добавляются аналогичные условия для производных функции f не выше порядка $m \in \mathbb{Z}_+$ в направлении данной прямой. Показано, что если $\{a_k\}$ удовлетворяет условию отделимости (которое убрать нельзя), то соответствующая интерполяционная задача разрешима в классе функций умеренного роста, принадлежащих $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ (см. теорему и ее обсуждение в разделе 1).

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Далее, как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество n -мерных мультииндексов, т. е. векторов $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, у которых $\eta_j \in \mathbb{Z}_+$ при любом $j \in \{1, \dots, n\}$. Для мультииндекса $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ через

$$\partial^\eta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\eta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\eta_n}$$

обозначим оператор частного дифференцирования соответствующего порядка.

Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Для $d \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$L_{d,\sigma} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = d + t\sigma, t \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность точек, лежащих на некоторой прямой $L_{d,\sigma}$ в $\mathbb{R}^n$, таких, что

$$\inf_{i \neq j} |a_i - a_j| > 0, \quad (4)$$

$$|a_k| \leq |a_{k+1}| \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}.$$

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть $r > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$ и $b_{k,j} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, \dots, m\}$, — множество чисел, удовлетворяющих условию

$$\max_{0 \leq j \leq m} |b_{k,j}| \leq (k+1)^\alpha \quad (5)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и некоторого $\alpha \geq 0$, не зависящего от k . Тогда существует функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \sigma_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^j f(a_k) = b_{k,j} \quad (6)$$

при любых $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, \dots, m\}$, и

$$\partial^n f(x) = O\left((1 + |x|)^\beta\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

для всех $\eta \in \mathbb{Z}_+$ и некоторого $\beta \geq 0$, не зависящего от x и η .

Сделаем несколько замечаний.

Нетрудно видеть, что функция с условиями (6) и (7) в теореме не единственна. Для этого достаточно применить теорему к расширенной системе узлов $\{a_k\}_{k=1}^\infty \cup \{a\}$, где $a \in L_{d,\sigma} \setminus \{a_k\}_{k=1}^\infty$, добавив к условию (6) равенство $f(a) = b$, где $b \in \mathbb{C}$ выбирается произвольно.

Поскольку, согласно (5), последовательность $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ может иметь степенной рост, из (6) следует, что в общем случае оценка роста интерполирующей функции в теореме не может быть существенно усилена. Интересной нерешенной задачей является нахождение точной нижней грани возможных значений β в оценке (7).

Далее, условие (3) является очевидным необходимым условием для того, чтобы интерполяционная задача (2) имела решение $f \in C(\mathbb{R}^n)$ для любой ограниченной последовательности $\{b_k\}_{k=1}^\infty$. Одного этого условия, однако, недостаточно для справедливости теоремы даже при $m = 0$. Действительно, полагая $b_k = (-1)^k$, применяя к f , удовлетворяющей (6) и (7), теорему Лагранжа о среднем на отрезке с концами a_k , a_{k+1} , получаем, что условие отделимости узлов (4) в теореме убрать нельзя (даже при выполнении (3)).

Следует также отметить, что существуют функции класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, имеющие сколь угодно быстрый рост на заданном луче в $\mathbb{R}^n$ ([11], следствие 2). Поэтому оценка (7) не выполняется без каких-либо дополнительных условий на $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$. Отметим, наконец, что утверждение теоремы в одномерном случае неверно, поскольку, как нетрудно видеть, всякая непрерывная функция класса $V_r(\mathbb{R}^n)$ при $n = 1$ является $2r$ -периодической.

В разделах 2, 3 данной работы содержатся вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного результата. Доказательство теоремы приводится в разделе 4.

2. ФУНКЦИИ КЛАССА $V_r(\mathbb{R}^n)$

Пусть $\nu > -1$. Рассмотрим четную целую функцию

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1) 2^{2k+\nu}}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

где Γ — гамма-функция. Функция I_ν связана с функцией Бесселя J_ν равенством

$$I_\nu(z) = z^{-\nu} J_\nu(z), \quad z \neq 0, \quad (9)$$

где, как обычно, $z^{-\nu} = |z|^{-\nu} e^{-i\nu \arg z}$, $-\pi < \arg z \leq \pi$. Из (9) следует ([12], гл. 1, § 23), что функция I_ν имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули вещественные и простые.

Лемма 1. Пусть $\nu \geq -1/2$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\left| I_\nu^{(j)}(\xi) \right| \leq I_\nu(0) \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Доказательство. Если $\nu > -1/2$, из интегрального представления Пуассона ([12], гл. 1, формула (14.6)) имеем

$$I_\nu^{(j)}(\xi) = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (it)^j e^{i\xi t} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\left| I_\nu^{(j)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = I_\nu(0).$$

В случае $\nu = -1/2$ из (8) видно, что

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда также следует (10). $\square$

Обозначим через $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ пространство распределений с компактными носителями в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $SO(n)$ — группа вращений $\mathbb{R}^n$. Распределение $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ называется радиальным, если оно инвариантно относительно группы $SO(n)$, т. е.

$$\langle F, \varphi(\tau x) \rangle = \langle F, \varphi(x) \rangle \quad \text{для всех } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \quad \tau \in SO(n).$$

Обозначим через $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ множество всех радиальных распределений $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Одним из примеров распределения из класса $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ является χ_r — характеристическая функция (индикатор) шара $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

Сферическое преобразование распределения $F \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\tilde{F}(z) = \left\langle F(x), 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(n/2) I_{\frac{n}{2}-1}(z|x|) \right\rangle$$

и является четной целой функцией переменной $z \in \mathbb{C}$. Пусть ω_{n-1} — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Используя полярные координаты в $\mathbb{R}^n$, для любого $r > 0$ находим

$$\widetilde{\chi}_r(z) = \int_{|x| \leq r} 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(n/2) I_{\frac{n}{2}-1}(z|x|) dx =$$

$$= \omega_{n-1} 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(n/2) \int_0^r \rho^{n-1} I_{\frac{n}{2}-1}(z\rho) d\rho = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n I_{\frac{n}{2}}(rz), \quad z \in \mathbb{C} \quad (11)$$

([12], гл. 1, формула (6.2)).

Пусть $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Теорема о среднем для решений уравнения Гельмгольца

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad (12)$$

при $\lambda \in \mathbb{C}$ утверждает ([8], ч. 1, гл. 7), что функция $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (12) тогда и только тогда, когда

$$\int_{|y| \leq R} f(x+y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} R^n I_{\frac{n}{2}}(\lambda R) f(x) \quad (13)$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$. Это утверждение позволяет строить примеры гладких функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$. Действительно, если $I_{\frac{n}{2}}(\lambda r) = 0$ и f удовлетворяет (12), то из (13) получаем, что $f \in V_r(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, в силу эллиптичности уравнения (12) функция f является вещественно аналитической в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) функция f удовлетворяет (12);
- (ii) для любого $F \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ выполнено равенство

$$(f * F)(x) = f(x) \tilde{F}(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где знак $*$ обозначает свертку f и F .

Доказательство. Согласно сказанному выше, достаточно доказать импликацию (i) $\rightarrow$ (ii) для $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что

$$F \in (\mathcal{E}'_b \cap L^1)(\mathbb{R}^n),$$

поскольку множество таких функций плотно в $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$. Если F — индикатор шара с центром в нуле, требуемое утверждение следует из (13) и (11). В общем случае достаточно приблизить F в $L^1(\mathbb{R}^n)$ подходящей линейной комбинацией индикаторов таких шаров. $\square$

Следствие. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет (12) при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ выполнено неравенство

$$|(\partial^\eta f)(x)| \leq c \max_{|y-x| \leq \varepsilon} |f(y)|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (14)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от x .

Доказательство. Пусть $\varphi \in (\mathcal{E}'_b \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \varphi \subset B_\varepsilon$ и $\tilde{\varphi}(\lambda) \neq 0$. Применяя лемму 2, имеем

$$\partial^\eta f = \frac{1}{\tilde{\varphi}(\lambda)} \partial^\eta (f * \varphi) = \frac{1}{\tilde{\varphi}(\lambda)} f * \partial^\eta \varphi.$$

Отсюда видно, что неравенство (14) выполняется с постоянной

$$c = \frac{1}{\tilde{\varphi}(\lambda)} \int_{|y| \leq \varepsilon} |(\partial^\eta \varphi)(y)| dy.$$

$\square$

Далее, пусть $\lambda > 0$ и

$$\Phi_\lambda(x, t) = e^{-itx_1} I_{\frac{n-3}{2}} \left(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(|x|^2 - x_1^2)} \right), \quad (15)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\lambda, \lambda).$$

Из (15) следует ([11], доказательство леммы 2), что

$$\Delta \Phi_\lambda + \lambda^2 \Phi_\lambda = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \quad (16)$$

Нам потребуется следующая оценка производных функции Φ_λ по переменной t .

Лемма 3. Для любых $\varepsilon \in (0, \lambda)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено неравенство

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \Phi_\lambda(x, t) \right| \leq c(2 + |x|)^k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |t| \leq \lambda - \varepsilon, \quad (17)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от x и t .

Доказательство. При $k = 0$ оценка (17) сразу следует из (15) и (10). Пусть $k \geq 1$. Применяя формулу Лейбница, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \Phi_\lambda(x, t) = \sum_{j=0}^k C_k^j (-ix_1)^{k-j} e^{-itx_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j I_{\frac{n-3}{2}} \left(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(|x|^2 - x_1^2)} \right). \quad (18)$$

Далее, для любого $j \in \mathbb{N}$ существуют функции $\psi_{l,j} \in C^\infty(-\lambda, \lambda)$, $l = 1, \dots, j$, такие, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j I_{\frac{n-3}{2}} \left(\sqrt{\lambda^2 - t^2} z \right) = \sum_{l=1}^j I_{\frac{n-3}{2}}^{(l)} \left(\sqrt{\lambda^2 - t^2} z \right) z^l \psi_{l,j}(t) \quad (19)$$

при любом $z \in \mathbb{C}$ (это утверждение легко доказывается индукцией по j). Принимая во внимание оценку (10), из (19), (18) получаем утверждение леммы 3. $\square$

Пусть теперь $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$,

$$\lambda > \sup \{|t| : t \in \text{supp } T\}, \quad I_{\frac{n}{2}}(\lambda r) = 0. \quad (20)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \langle T, \Phi_\lambda(x, t) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (21)$$

Лемма 4. Выполнены следующие утверждения:

- (i) $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) существует $\beta \geq 0$ такое, что

$$(\partial^\eta f)(x) = O\left((1 + |x|)^\beta\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для всех $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Доказательство. Из соотношений (21), (16) находим

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \quad (22)$$

Учитывая (20), отсюда и из (13) при $R = r$ получаем утверждение (i).

Далее, так как T имеет компактный носитель, из (21) следует, что существует $\beta \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|f(x)| \leq c \sum_{k=0}^{\beta} \max_{t \in E} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \Phi_\lambda(x, t) \right|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $E = \text{supp } T$ и $c > 0$ не зависит от x ([13], гл. 2, формула (2.3.1)). Отсюда, из (20) и леммы 3 заключаем, что

$$f(x) = O\left((1 + |x|)^\beta\right), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (23)$$

Пусть теперь $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$. Используя следствие и учитывая (22), (23), приходим к утверждению (ii). $\square$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $l \in \mathbb{Z}_+$ и

$$g_l(z) = \frac{(m + l + 1)!}{m!l!} \int_0^z (1 - \zeta)^m \zeta^l d\zeta, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

Из этого равенства следует

$$\begin{aligned} g_l(1) &= 1, \\ g_l^{(j)}(1) &= 0, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned} \quad (25)$$

Кроме того,

$$|g_l(z)| \leq \frac{(m + l + 1)!}{m!l!} |z|^{l+1} (1 + |z|)^m, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (26)$$

Далее, пусть $\{t_q\}_{q=-\infty}^\infty$ — строго возрастающая последовательность вещественных чисел, $t_0 = 0$ и

$$t_{q+1} - t_q \geq \delta > 0 \quad \text{для любого } q \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Предположим также, что существует $\gamma > 0$ такое, что

$$|t_q - q| \leq \gamma \quad \text{при всех } q \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Из (28) вытекает, что функция

$$u(z) = z \prod_{q=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{t_q}\right) \left(1 - \frac{z}{t_{-q}}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (29)$$

является целой.

Лемма 5. *Существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$|u(z)| \leq c_1 (1 + |z|)^{c_2} e^{\pi |\text{Im } z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (30)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$|z - q| \geq \varepsilon \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Используя разложение функции $\sin(\pi z)$ в бесконечное произведение, имеем

$$u(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \prod_{q=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{t_q}\right) \left(1 - \frac{z}{t_{-q}}\right) \left(1 - \frac{z}{q}\right)^{-1} \left(1 + \frac{z}{q}\right)^{-1}.$$

Пусть

$$N = \left[1 + \frac{2|z|}{\min\{1, \delta\}}\right] \quad (\text{целая часть}), \quad (32)$$

тогда

$$u(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} u_1(z) u_2(z), \quad (33)$$

где

$$u_1(z) = \prod_{q=1}^N \left(1 - \frac{t_q - q}{t_q}\right) \left(1 - \frac{t_{-q} + q}{t_{-q}}\right) \left(1 + \frac{t_q - q}{q - z}\right) \left(1 - \frac{t_{-q} + q}{q + z}\right),$$

$$u_2(z) = \prod_{q=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_q}\right) \left(1 - \frac{z}{t_{-q}}\right) \left(1 - \frac{z}{q}\right)^{-1} \left(1 + \frac{z}{q}\right)^{-1}.$$

Из определения u_1 получаем оценку

$$\begin{aligned} \ln |u_1(z)| \leq & \sum_{q=1}^N \left(\ln \left(1 + \frac{|t_q - q|}{t_q}\right) + \ln \left(1 + \frac{|t_{-q} + q|}{|t_{-q}|}\right) + \right. \\ & \left. + \ln \left(1 + \frac{|t_q - q|}{|q - z|}\right) + \ln \left(1 + \frac{|t_{-q} + q|}{|q + z|}\right) \right). \end{aligned}$$

Используя неравенство $\ln(1 + t) \leq t$ при $t \geq 0$, отсюда и из (28) имеем

$$\ln |u_1(z)| \leq \gamma \sum_{q=1}^N \left(\frac{1}{t_q} + \frac{1}{|t_{-q}|} + \frac{1}{|q - z|} + \frac{1}{|q + z|} \right). \quad (34)$$

Из (27) следует

$$|t_q| \geq \delta |q|, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (35)$$

Далее символами $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от z . Используя (35), получаем

$$\gamma \sum_{q=1}^N \left(\frac{1}{t_q} + \frac{1}{|t_{-q}|} \right) \leq \frac{2\gamma}{\delta} \sum_{q=1}^N \frac{1}{q} \leq \lambda_1 \ln(2 + |z|). \quad (36)$$

Предположим теперь, что $x = \operatorname{Re} z \leq 0$. Тогда

$$\gamma \sum_{q=1}^N \frac{1}{|q - z|} \leq \gamma \sum_{q=1}^N \frac{1}{q} \leq \lambda_2 \ln(2 + |z|). \quad (37)$$

Аналогично, используя (31) и (27), имеем

$$\gamma \sum_{q=1}^N \frac{1}{|q + z|} \leq \lambda_3 + \gamma \sum_{q \in E_1} \frac{1}{|q + x|} + \gamma \sum_{q \in E_2} \frac{1}{|q + x|},$$

где $E_1 = \{q \leq N : q + x \geq \delta\}$, $E_2 = \{q \leq N : q + x \leq -\delta\}$. С учетом (35) это дает оценку

$$\gamma \sum_{q=1}^N \frac{1}{|t_{-q} - z|} \leq \lambda_4 \ln(2 + |z|). \quad (38)$$

Из неравенств (36)–(38) и (34) заключаем, что

$$\ln |u_1(z)| \leq \lambda_5 \ln(2 + |z|). \quad (39)$$

Проводя в случае $x > 0$ аналогичные рассуждения, получим оценку (39) для любого $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющего (31).

Пусть теперь $q \geq N + 1$. Тогда из (32) и (35) следует, что числа

$$\left|1 - \frac{z}{t_q}\right|, \quad \left|1 - \frac{z}{t_{-q}}\right|, \quad \left|1 - \frac{z}{q}\right|, \quad \left|1 + \frac{z}{q}\right|$$

лежат на интервале $(1/2, 3/2)$. Применяя теорему Лагранжа о среднем к функции $\ln t$ на отрезках с концами $\left|1 - \frac{z}{t_q}\right|$, $\left|1 - \frac{z}{q}\right|$ и $\left|1 - \frac{z}{t_{-q}}\right|$, $\left|1 + \frac{z}{q}\right|$, из определения u_2 получаем

$$\begin{aligned} \ln |u_2(z)| &= \sum_{q=N+1}^{\infty} \left(\ln \left|1 - \frac{z}{t_q}\right| - \ln \left|1 - \frac{z}{q}\right| + \ln \left|1 - \frac{z}{t_{-q}}\right| - \ln \left|1 + \frac{z}{q}\right| \right) \leq \\ &\leq 2|z| \sum_{q=N+1}^{\infty} \left(\frac{|t_q - q|}{t_q q} + \frac{|t_{-q} + q|}{|t_{-q}| q} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (28), (35) имеем

$$\ln |u_2(z)| \leq \lambda_6 |z| \sum_{q=N+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \leq \lambda_6 \frac{|z|}{N} \leq \lambda_7.$$

Из этого неравенства, (39) и (33) получаем (30) для $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих (31). Отсюда и из принципа максимума модуля, примененного к функции u в круге $|z - q| \leq \varepsilon$, $q \in \mathbb{Z}$, следует утверждение леммы 5. $\square$

Лемма 6. *Существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$|u'(t_q)| \geq \frac{c_1}{(1 + |q|)^{c_2}} \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, \delta/2)$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$|z - t_q| \geq \varepsilon \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z}. \quad (40)$$

Тогда

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = u(z) \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q}\right) \left(1 + \frac{z}{q}\right) \left(1 - \frac{z}{t_q}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{t_{-q}}\right)^{-1}.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 5, отсюда и из (40) получаем

$$|\sin \pi z| \leq c_3 (1 + |z|)^{c_4} |u(z)|, \quad (41)$$

где $c_3, c_4 > 0$ не зависят от z . Пусть $q \in \mathbb{Z}$ и $\|t_q\|$ — расстояние от t_q до ближайшего целого числа. Положим

$$\varepsilon = \begin{cases} 2\delta/5, & \text{если } \|t_q\| \leq \delta/5; \\ \delta/10, & \text{если } \|t_q\| > \delta/5. \end{cases}$$

Учитывая, что $\delta \leq 1$ (см. (28), (35)), отсюда заключаем, что существует $c_5 > 0$, зависящее только от δ , такое, что

$$\min_{|z - t_q| = \varepsilon} |\sin \pi z| \geq c_5. \quad (42)$$

Используя принцип минимума модуля, далее имеем

$$|u'(t_q)| \geq \min_{|z - t_q| \leq \varepsilon} \frac{|u(z)|}{|z - t_q|} \geq \frac{1}{\varepsilon} \min_{|z - t_q| = \varepsilon} |u(z)|. \quad (43)$$

Сопоставляя неравенства (43), (41), (42), приходим к утверждению леммы 6. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Поскольку класс $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ инвариантен относительно всех сдвигов и вращений пространства $\mathbb{R}^n$, не ограничивая общности, можно считать, что $d = 0$ и $\sigma = (1, 0, \dots, 0)$. В этом случае $a_k = (\alpha_k, 0, \dots, 0)$, где последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ вещественных чисел удовлетворяет условию

$$|\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}| \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \quad (44)$$

Кроме того, достаточно доказать теорему в случае, когда

$$\inf_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j| \geq 1 \quad (45)$$

(в противном случае нужно использовать преобразование подобия $x \rightarrow \lambda x$, $x \in \mathbb{R}^n$, при подходящем $\lambda > 1$ и доказывать утверждение теоремы для λr вместо r). Определим теперь последовательность $\{\beta_q\}_{q=-\infty}^\infty$ следующим образом. Если полуинтервал $[q, q+1)$ не содержит элементов последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, то положим $\beta_q = q + \frac{1}{2}$. В противном случае в промежутке $[q, q+1)$ содержится точка α_k при некотором $k \in \mathbb{N}$. Из (45) следует, что такая точка α_k единственная. В этом случае положим $\beta_q = \alpha_k$. Отметим, что при этом

$$k \leq 3 + 2|q|. \quad (46)$$

Действительно, поскольку $\alpha_k \in [q, q+1)$, имеем $|\alpha_k| < 1 + |q|$. Тогда из (44) следует, что все точки α_j при $j \leq k$ лежат в интервале $(-1 - |q|, 1 + |q|)$. Отсюда и из (45) получаем (46). Положим теперь

$$t_q = \beta_q - \beta_0, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Тогда из построения чисел β_q видно, что

$$t_{q+1} - t_q \geq \frac{1}{2}, \quad -\beta_0 \leq t_q - q \leq 1 - \beta_0. \quad (47)$$

Далее символами $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от q . Рассмотрим целую функцию

$$H(z) = (u(z))^{m+1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (48)$$

где u определяется равенством (29) для данной последовательности $\{t_q\}_{q=-\infty}^\infty$. Положим

$$M_q = \max_{|z-t_q|=1} |H(z)|, \quad \mu_q = u'(t_q)^{m+1}.$$

Из (29) и (48) следует

$$H^{(j)}(t_q) = 0, \quad \text{если } j \in \{0, \dots, m\}, \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (49)$$

Согласно лемме 6

$$|H^{(m+1)}(t_q)| = (m+1)!|\mu_q| > (2+|q|)^{-\zeta_1}. \quad (50)$$

Далее, пусть

$$H_{q,\nu}(z) = \frac{H(z)}{(z-t_q)^\nu}, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad \nu \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (51)$$

Применяя формулу Коши, при любом $j \in \{0, \dots, m\}$ имеем

$$H_{q,\nu}^{(j)}(t_q) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|z-t_q|=1} \frac{H(z)}{(z-t_q)^{\nu+j+1}} dz,$$

откуда

$$|H_{q,\nu}^{(j)}(t_q)| \leq j!M_q. \quad (52)$$

Кроме того,

$$H_{q,m+1-j}^{(j)}(t_q) = (H_{q,m+1}(z)(z - t_q)^j)_{z=t_q}^{(j)} = j!H_{q,m+1}(t_q) = j!\frac{H^{(m+1)}(t_q)}{(m+1)!} = j!\mu_q. \quad (53)$$

Определим теперь набор $c_{q,j} \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Z}$, $j = 0, \dots, m$, следующим образом. Если полуинтервал $[q, q+1)$ не содержит точек из последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, то положим $c_{q,j} = 0$. В противном случае, как и выше, видно, что на $[q, q+1)$ содержится единственная точка α_k и полагаем $c_{q,j} = b_{k,j}$. При каждом $q \in \mathbb{Z}$ рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{m+1} \gamma_{q,\nu} H_{q,\nu}^{(j)}(t_q) = c_{q,j}, \quad j = 0, \dots, m, \quad (54)$$

с неизвестными $\gamma_{q,\nu}$. Из (49) и (50) видно, что

$$\begin{aligned} H_{q,\nu}^{(j)}(t_q) &= 0, \quad \text{если } 0 \leq j \leq m - \nu; \\ H_{q,\nu}^{(j)}(t_q) &\neq 0, \quad \text{если } j = m - \nu + 1. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, из равенств (54) находим

$$\gamma_{q,m+1} = \frac{c_{q,0}}{H_{q,m+1}(t_q)}, \quad (55)$$

а также

$$\gamma_{q,m+1-j} = \frac{c_{q,j} - \sum_{\nu=m+2-j}^{m+1} \gamma_{q,\nu} H_{q,\nu}^{(j)}(t_q)}{H_{q,m+1-j}^{(j)}(t_q)} \quad (56)$$

при $j = 1, \dots, m$. Полагая

$$C_q = \max_{0 \leq j \leq m} |c_{q,j}|,$$

из (55), (56), (52) и (53) имеем

$$|\gamma_{q,m+1}| \leq \frac{C_q}{|\mu_q|}, \quad (57)$$

$$|\gamma_{q,m+1-j}| \leq \frac{C_q}{|\mu_q|} + \frac{1}{|\mu_q|} \sum_{\nu=m+2-j}^{m+1} |\gamma_{q,\nu}| M_q, \quad (58)$$

где $j \in \{1, \dots, m\}$. Учитывая (47), из леммы 5 и (48) получаем

$$M_q \leq (2 + |q|)^{\zeta_2}. \quad (59)$$

Кроме того, из определения $c_{q,j}$ и неравенств (5) и (46) следует оценка

$$C_q \leq (2 + |q|)^{\zeta_3}. \quad (60)$$

Применяя индукцию по $j \in \{0, \dots, m\}$, из неравенств (57)–(60) и (50) заключаем, что

$$|\gamma_{q,\nu}| \leq (2 + |q|)^{\zeta_4} \quad (61)$$

при всех $\nu \in \{1, \dots, m+1\}$. Равенства (54) показывают, что функция

$$H_q(z) = \sum_{\nu=1}^{m+1} \gamma_{q,\nu} H_{q,\nu}(z) \quad (62)$$

удовлетворяет условиям

$$H_q^{(j)}(t_q) = c_{q,j}, \quad j \in \{0, \dots, m\}. \quad (63)$$

Кроме того, из (48) и (51) видно, что

$$H_q^{(j)}(t_p) = 0, \quad \text{если } p \in \mathbb{Z}, \quad p \neq q, \quad j \in \{0, \dots, m\}. \quad (64)$$

Пусть теперь $z \in \mathbb{C}$ и $|z - t_q| \geq 1$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$. Тогда из (62), (61), (51) и леммы 5 имеем оценку

$$|H_q(z)| \leq (2 + |q|)^{\zeta_5} (1 + |z|)^{\lambda_1} e^{\pi(m+1)|\operatorname{Im} z|} \quad (65)$$

с некоторой постоянной $\lambda_1 > 0$, не зависящей от z . Применяя к функции H_q принцип максимума модуля в круге $|z - t_q| \leq 1$, из (65) получаем, что аналогичная оценка имеет место для всех $z \in \mathbb{C}$.

Далее, пусть $l \in \mathbb{N}$ и функция g_l определяется равенством (24). Тогда из (65) и (26) следует

$$\left| g_l \left(\frac{z}{t_q} \right) H_q(z) \right| \leq \frac{(m+l+1)!}{m!l!} \frac{(2+|q|)^{\zeta_5}}{|t_q|^{l+1}} (1+|z|)^{\lambda_1+m+l+1} e^{\pi(m+1)|\operatorname{Im} z|} \quad (66)$$

при $q \neq 0$. Рассмотрим теперь функцию

$$W(z) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q(z) H_q(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (67)$$

где

$$G_q(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 0; \\ g_l \left(\frac{z}{t_q} \right), & \text{если } q \neq 0, \end{cases}$$

и $l \in \mathbb{N}$, $l > \zeta_5$. Из (66) следует, что ряд в правой части равенства (67) сходится в $\mathbb{C}$ локально равномерно и функция W является целой. Кроме того, из (66), (67) имеем оценку

$$|W(z)| \leq (2 + |z|)^{\lambda_2} e^{\pi(m+1)|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (68)$$

с постоянной $\lambda_2 > 0$, не зависящей от z . Равенства (63), (64), (25) показывают, что

$$W^{(j)}(t_q) = c_{q,j}, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{0, \dots, m\}. \quad (69)$$

Из (68) и теоремы Пэли–Винера–Шварца ([13], теорема 7.3.1) заключаем, что существует распределение $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ с носителем на $[-\pi(m+1), \pi(m+1)]$ такое, что

$$\widehat{T}(z) = \langle T, e^{-itz} \rangle = W(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (70)$$

Пусть $\lambda > \pi(m+1)$ и $I_{\frac{n}{2}}(r\lambda) = 0$. Рассмотрим теперь функцию f , заданную формулой (21) для данного T . Из соотношений (70), (69) и определения $c_{q,j}$ следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^j f(a_k) = b_{k,j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \{0, \dots, m\}.$$

Кроме того, согласно лемме 4 $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ и выполнено условие (7). Таким образом, функция f удовлетворяет всем требуемым условиям и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. *Целые и мероморфные функции*, Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. матем. Фундамент. напр. **85**, 5–185 (1991).
- [2] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. *Interpolation problems for functions with zero ball means*, Probl. Anal. Issues Anal. **10** (28) (3), 129–140 (2021).
- [3] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. *Interpolation problem with knots on a line for solutions of a multidimensional convolution equation*, Lobachevskii J. Math. **44** (8), 3630–3639 (2023).

- [4] Zalcman L. *A bibliographic survey of the Pompeiu problem*, Approx. Solut. Partial Diff. Equat., 185–194 (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992).
- [5] Chakalov L. *Sur un problème de D. Pompeiu*, Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1, **40**, 1–14 (1944).
- [6] Беренштейн К.А., Струппа Д. *Комплексный анализ и уравнения в свертках*, Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. матем. Фундамент. напр. **54**, 5–111 (1989).
- [7] Bagchi S.C., Sitaram A. *The Pompeiu problem revisited*, Enseign. Math. **36** (1–2), 67–91 (1990).
- [8] Volchkov V.V. *Integral Geometry and Convolution Equations* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003).
- [9] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group* (Springer-Verlag, London, 2009).
- [10] Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces* (Birkhäuser, Basel, 2013).
- [11] Волчков В.В., Волчков Вит.В. *Аппроксимация функций на лучах в $\mathbb{R}^n$ решениями уравнений свертки*, Сиб. матем. журн. **64** (1), 56–64 (2023).
- [12] Корнев Б.Г. *Введение в теорию бесселевых функций* (Наука, М., 1971).
- [13] Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Т. 1 (Мир, М., 1986).

Валерий Владимирович Волчков

Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, д. 24, г. Донецк, 283001, Россия,

e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Виталий Владимирович Волчков

Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, д. 24, г. Донецк, 283001, Россия,

e-mail: volna936@gmail.com

V.V. Volchkov and Vit.V. Volchkov

Multiple interpolation problem for functions with zero spherical mean

Abstract. Let $|\cdot|$ be the Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. For $r > 0$, we let $|\cdot|$ be the Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. For $r > 0$, we denote by $V_r(\mathbb{R}^n)$ the set of functions $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ satisfying the condition

$$\int_{|x| \leq r} f(x+y) dx = 0 \quad \text{for any } y \in \mathbb{R}^n.$$

The paper investigates the interpolation of tempered growth functions of class $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ together with the derivatives of bounded order in a given direction. Let $d \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ be fixed, $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ be a sequence of points lying on the line $\{x \in \mathbb{R}^n : x = d + t\sigma, t \in (-\infty, +\infty)\}$ and satisfying the conditions

$$\inf_{i \neq j} |a_i - a_j| > 0, \quad |a_k| \leq |a_{k+1}| \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}.$$

Let also $m \in \mathbb{Z}_+$ and $b_{k,j} \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, \dots, m\}$) be a set of numbers satisfying the condition

$$\max_{0 \leq j \leq m} |b_{k,j}| \leq (k+1)^\alpha$$

for all $k \in \mathbb{N}$ and some $\alpha \geq 0$ independent of k . It is shown (Theorem) that, under the indicated conditions, the interpolation problem

$$\left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \sigma_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^j f(a_k) = b_{k,j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \{0, \dots, m\},$$

is solvable in a class of functions belonging to $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, which, together with all their derivatives, have growth no higher than a power-law at infinity. It is noted that the condition of separability of nodes $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ in the Theorem cannot be removed, and also that the solution of the considered interpolation problem is not the only one. In addition, it is stated that the one-dimensional analogue of the Theorem is not valid since every continuous function of class $V_r(\mathbb{R}^n)$ at $n = 1$ is $2r$ -periodic.

Keywords: interpolation, spherical mean, Fourier transform, Bessel function.

Valeriy Vladimirovich Volchkov

Donetsk State University,

24 Universitetskaya str., Donetsk, 283001 Russia,

e-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Vitaliy Vladimirovich Volchkov

Donetsk State University,

24 Universitetskaya str., Donetsk, 283001 Russia,

e-mail: volna936@gmail.com