

Р.К. БЕРА, Б.Л. ГОДАДРА

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Аннотация. Дана оценка скорости сходимости двойных рациональных рядов Фурье и, в частности, двойных тригонометрических рядов Фурье для функций обобщенной ограниченной вариации.

Ключевые слова: двойной ряд Фурье, двойной рациональный ряд Фурье, поточечная сходимость, скорость сходимости, (p, q) -(Λ, Λ')-ограниченная вариация.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-5-26-43

ВВЕДЕНИЕ

Теорема Харди утверждает, что ряд Фурье функции $f(x, y)$, являющейся 2π -периодической по каждой переменной и имеющей ограниченную вариацию на $\mathbb{T}^2$ в смысле Харди и Краузе, сходится к $s(f, x, y)$ в любой точке (x, y) . Ф. Мориц количественно уточнил этот результат, оценив скорость сходимости рядов Фурье для функций ограниченной вариации. В данной статье этот результат обобщается для определенного класса функций обобщенной ограниченной вариации, а также расширяется с тригонометрических рядов Фурье на рациональные ряды Фурье.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним некоторые определения, связанные с простым и двойным рациональными рядами Фурье. Рациональная ортогональная система определяется формулой

$$\phi_0(e^{ix}) = 1, \quad \phi_n(e^{ix}) = \frac{\sqrt{1 - |\alpha_n|^2} e^{ix}}{1 - \bar{\alpha}_n e^{ix}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{ix} - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k e^{ix}}, \quad (1)$$

при этом $\phi_{-n}(e^{ix}) = \overline{\phi_n(e^{ix})} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Здесь $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — такая комплексная последовательность, что все α_n принадлежат открытому единичному диску $\mathbb{D}$. В дальнейшем предполагается выполнение следующего условия, в котором значение r определяется ниже:

$$\sup |\alpha_n| = r < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) = \infty$, система (1) полна в $L^2[-\pi, \pi]$ ([1], [2]).

Поступила в редакцию 27.03.2024, после доработки 27.03.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Работа финансируется Советом по научным и промышленным исследованиям (CSIR) в рамках финансовой поддержки через SRF (номер дела 09/114(0233)/2019-EMR-I).

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, 2π -периодическая и интегрируемая на $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$. Рациональный ряд Фурье функции f определяется следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(e^{ix}),$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \overline{\phi_n(e^{iu})} du, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Через $S_n^r(f, x)$ обозначим n -ю симметричную частичную сумму рационального ряда Фурье функции f , она определяется следующим образом:

$$S_n^r(f, x) = \sum_{j=-n}^n c_j \phi_j(e^{ix}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Определение 2. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, 2π -периодическая по каждой переменной и интегрируемая на $\mathbb{T}^2$. Двойной рациональный ряд Фурье функции f определяется так:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \phi_j(e^{ix}) \phi_k(e^{iy}). \quad (2)$$

Симметричная прямоугольная частичная сумма порядка (m, n) ряда (2) может быть записана в интегральной форме

$$S_{m,n}^r(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} f(x-u, y-v) D_m(x-u) D_n(y-v) du dv, \quad (3)$$

где

$$D_l(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-l}^l \overline{\phi_l(e^{it})} \phi_l(e^{ix}) = \frac{\sin \left[\frac{x-t}{2} + \theta_l(t, x) \right]}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \quad \text{для } 0 < x-t \leq \pi, \quad l = m, n,$$

— ядро Дирихле,

$$\theta_l(t, x) = \sum_{k=1}^l \int_t^x \frac{1 - |\alpha_l|^2}{1 - 2|\alpha_l| \cos(x - a_l) + |\alpha_l|^2} dx = \sum_{k=1}^l \phi_l(e^{ix}) \overline{\phi_l(e^{ia_l})} \quad \text{для } l \in \mathbb{N}.$$

Замечание. Если $\alpha_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\{\phi_n(e^{ix})\}$ сводится к тригонометрической системе $\{e^{inx}\}$, и обозначаем частичную сумму S^r просто как S .

Определение 3. Даны функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ неубывающих положительных чисел такая, что ряд $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ расходится, и действительное число p , $1 \leq p < \infty$. Говорят, что $f \in \text{LBV}^p[a, b]$ (т. е. f имеет p - Λ -ограниченную вариацию на $[a, b]$), если

$$V_{p\Lambda}(f, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{|f(a_k) - f(b_k)|^p}{\lambda_k} \right\}^{1/p} < \infty,$$

где супремум берется по всем последовательностям $\{I_k\}$ непересекающихся интервалов

$$I_k = [a_k, b_k] \subset [a, b], \quad k = 1, \dots, n.$$

Когда $\Lambda = \{n^\alpha\}$, $0 \leq \alpha < 1$, обозначаем этот класс как $(n^\alpha)\text{BV}^p$, а вариацию для любой функции f из этого класса — как $V_{pn^\alpha}(f, [a, b])$.

Отметим, что если f имеет p - Λ -ограниченную вариацию, то $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют в каждой точке x отрезка $[a, b]$ ([3], теорема 2). Определим для $x \in \mathbb{T}$

$$s(f, x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\},$$

$$\phi_x(t) = \begin{cases} f(x+t) + f(x-t) - 2s(f, x), & t \in (0, \pi]; \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

$$\phi'_x(t) = \begin{cases} f(x-t) - s(f, x) & \text{при } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Для $a > 0$, $1 \leq \alpha \leq 1$, $1 \leq p < \infty$ обозначим вариации f на интервалах $[-a, 0]$ и $[0, a]$ соответственно как $V_{pn^\alpha}(f, -a)$ и $V_{pn^\alpha}(f, a)$. Также будем использовать следующие обозначения:

$$V'_{pn^\alpha}(f, a) := V_{pn^\alpha}(f, -a) + V_{pn^\alpha}(f, a) \text{ и } n_p := \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1+1/p}} \right)^{1-1/p}.$$

Теоремам о поточечной сходимости и скорости сходимости одиночных рядов Фурье посвящено много работ [4]–[9]. В [10] авторы доказали следующие теоремы для тригонометрических и рациональных рядов Фурье, обобщая эти результаты.

Теорема 1. Если f — 2π -периодическая функция и принадлежит классу $(n^\alpha)\text{BV}^p(\mathbb{T})$, где $0 \leq \alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 - \alpha p \geq 0$, то для всех x и n выполняется неравенство

$$|S_n(f, x) - s(f, x)|^p \leq C_p \frac{1 + 1/p - \alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}} V_{pn^\alpha}^p \left(\phi_x, \frac{\pi}{j} \right), \quad (4)$$

где

$$C_p = \left(\frac{2^{1/p} + 1 + \pi}{\pi} \right)^p \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1+1/p}} \right)^{p-1}.$$

Теорема 2. Если f — 2π -периодическая функция и принадлежит классу $(n^\alpha)\text{BV}^p(\mathbb{T})$, где $0 \leq \alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 - \alpha p \geq 0$, то для всех x и n выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |S_n^r(f, x) - s(f, x)| &\leq C_{p,r} \left(\frac{1 + 1/p - \alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}} \right)^{1/p} \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}} V_{pn^\alpha}^p \left(\phi'_x, -\frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}} V_{pn^\alpha}^p \left(\phi'_x, \frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$C_{p,r} = \left(\frac{2^{1/p}}{\pi} + \frac{2(1+r)}{1-r} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1+1/p}} \right)^{1-1/p}.$$

Поскольку ϕ_x непрерывна в нуле, обобщенная вариация $V_{pn^\alpha}(\phi_x, [0, a])$ стремится к нулю при $a \rightarrow 0^+$. Правая часть (4) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Аналогично, если ϕ'_x непрерывна в нуле, то $V_{pn^\alpha}(\phi_x, [a, 0])$ и $V_{pn^\alpha}(\phi_x, [0, b])$ стремятся к нулю при $a \rightarrow 0^-$, $b \rightarrow 0^+$, а правая часть (5) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Определение 4. Пусть f — вещественнозначная измеримая функция, определенная на прямоугольнике $R := [a, b] \times [c, d]$, а $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и $\Lambda' = \{\lambda'_n\}_{n=1}^\infty$ — неубывающие последовательности положительных чисел такие, что ряды $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ и $\sum \frac{1}{\lambda'_n}$ расходятся. Пусть также p и q — действительные числа, $1 \leq p, q < \infty$. Говорят, что $f \in (\Lambda, \Lambda')\text{BV}_H^{(p,q)}(R)$ (т. е. f имеет (p, q) -(Λ, Λ')-ограниченную вариацию на R), если

- 1) $f(\cdot, c) \in \Lambda\text{BV}^p[a, b]$ и $f(a, \cdot) \in \Lambda'\text{BV}^q[c, d]$;
- 2) $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ — множества конечных наборов непересекающихся интервалов $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $J_k = [c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, в $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно, и $f(I_j \times J_k) = f(a_j, c_k) - f(a_j, d_k) - f(b_j, c_k) + f(b_j, d_k)$, тогда

$$V_{p\Lambda, q\Lambda'}(f, [a, b], [c, d]) := \sup_{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(|f(I_j \times J_k)|)^q}{\lambda'_k} \right)^{p/q} \right)^{1/p} < \infty.$$

В случае, когда $\Lambda = \{m^\alpha\}$ и $\Lambda' = \{n^\beta\}$ при $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta \leq 1$, обозначим этот класс как $(m^\alpha, n^\beta)\text{BV}_H^{(p,q)}$. В частности, если $p = q$, то обозначим этот класс как $(m^\alpha, n^\beta)\text{BV}_H^p$. Здесь параметры α, β, p и q удовлетворяют условиям $0 \leq \alpha q + \beta p \leq q$, $1 - \alpha p \geq 0$ и $1 - \beta q \geq 0$. Вариацию любой функции f из этого класса обозначим через $V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, [a, b], [c, d])$. Когда $\Lambda = \Lambda' = \{1\}$ и $p = q = 1$, этот класс называется классом функций ограниченной вариации в смысле Харди–Крауза ($f \in \text{BV}_H(R)$), а вариацию любой функции $f \in \text{BV}_H$ обозначают как $V(f, [a, b], [c, d])$. Когда $\Lambda = \{m^\alpha\}$ и $\Lambda' = \{n^\beta\}$ при $\alpha, \beta \geq 0$ и $\alpha + \beta \leq 1$, а $p = q = 1$, обозначим этот класс как $(m^\alpha, n^\beta)\text{BV}_H$ и вариацию любой функции f из этого класса — через $V_{m^\alpha, n^\beta}(f, [a, b], [c, d])$. Когда $\Lambda = \Lambda' = \{1\}$ и $p = q$, этот класс называется классом функций p -ограниченной вариации в смысле Харди–Крауза ($f \in \text{BV}_H^p(R)$), а вариацию любой функции $f \in \text{BV}_H^p$ обозначают как $V_p(f, [a, b], [c, d])$. Когда $\Lambda = \Lambda' = \{1\}$, этот класс называется классом функций (p, q) -ограниченной вариации в смысле Харди–Крауза ($f \in \text{BV}_H^{(p,q)}(R)$), а вариацию любой функции $f \in \text{BV}_H^{(p,q)}$ обозначают как $V_{p,q}(f, [a, b], [c, d])$.

Определение 5. Прямоугольная осцилляция функции $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ на подпрямоугольнике $J \times K$ прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$ определяется как

$$\text{osc}_2(f, J \times K) = \sup\{|f(u, v) - f(u', v) - f(u, v') + f(u', v')| : u, u' \in J, v, v' \in K\},$$

обычная осцилляция на отрезке J — как

$$\text{osc}_1(f(\cdot, c), J) = \sup\{|f(u, c) - f(u', c)| : u, u' \in J\},$$

обычная осцилляция на отрезке K — как

$$\text{osc}_1(f(a, \cdot), K) = \sup\{|f(a, v) - f(a, v')| : v, v' \in K\}.$$

В дальнейшем будем различать подынтервалы неотрицательной половины замыкания одномерного тора $\bar{\mathbb{T}} = [-\pi, \pi] : I_{j,n} = [\eta_{j,n}, \eta_{j+1,n}]$, $\eta_{j,n} = \frac{j\pi}{n+1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Если $f(x, y) \in (m^\alpha, n^\beta)\text{BV}^{(p,q)}(R)$ при $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha q + \beta p \leq q$, то все четыре предела $f(x \pm 0, y \pm 0)$ существуют в любой точке (x, y) (см. лемму 1). Введем следующие обозначения:

$$s(f, x, y) = \frac{1}{4}[f(x+0, y+0) + f(x-0, y+0) + f(x+0, y-0) + f(x-0, y-0)],$$

$$\phi_{xy}(u, v) = \begin{cases} f(x+u, y+v) + f(x-u, y+v) + f(x+u, y-v) \\ + f(x-u, y-v) - 4s(f, x, y) & \text{при } u, v > 0, \\ 2s(f(\cdot, y+v), x) + 2s(f(\cdot, y-v), x) - 4s(f, x, y) & \text{при } u = 0 \text{ и } v > 0, \\ 2s(f(x+u, \cdot), y) + 2s(f(x-u, \cdot), y) - 4s(f, x, y) & \text{при } u > 0 \text{ и } v = 0, \\ 0 & \text{при } u = v = 0, \end{cases}$$

$$g(u, v) := \phi_{xy}(u, v) - \phi_{xy}(u, 0) - \phi_{xy}(0, v),$$

$$\phi'_{xy}(u, v) = \begin{cases} f(x-u, y-v) - s(f, x, y) & \text{при } u, v \in \bar{\mathbb{T}}^2 \setminus (0, 0), \\ s(f(\cdot, y-v), x) - s(f, x, y) & \text{при } v \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \\ s(f(x-u, \cdot), y) - s(f, x, y) & \text{при } u \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \\ 0 & \text{при } u = v = 0, \end{cases}$$

$$g'(u, v) := \phi'_{xy}(u, v) - \phi'_{xy}(u, 0) - \phi'_{xy}(0, v), \quad (6)$$

кроме того, для $1 \leq p$, $q < \infty$ и $0 \leq \alpha$, $\beta \leq 1$

$$V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, u, v) := V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, [0, u], [0, v]),$$

$$V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, -u, v) := V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, [-u, 0], [0, v]),$$

аналогично задаются

$$V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, u, -v) \text{ и } V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, -u, -v).$$

Также

$$V'_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, u, v) := V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, u, v) + V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, u, -v) + V_{pm^\alpha, qn^\beta}(f, -u, -v) + V_{\gamma\delta}(f, -u, v).$$

Г.Х. Харди [11] доказал следующий двумерный аналог теоремы Дирихле–Жордана (см. [6] или [16], с. 57).

Теорема 3. *Если функция $f(x, y)$ является 2π -периодической по каждой переменной и имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{T}^2$ в смысле Харди–Крауза, то существуют предельные значения по квадрантам $f(x \pm 0, y \pm 0)$, и ряд Фурье (2) функции $f(x, y)$ сходится к $s(f, x, y)$ в каждой точке (x, y) .*

В [12] Ф. Мориц привел количественную версию теоремы 3, оценив скорость сходимости ряда Фурье в точке (x, y) .

Теорема 4 ([12], теорема 3). *Если функция $f(x, y)$ является 2π -периодической по каждой переменной и имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{T}^2$ в смысле Харди–Крауза, то для всех $m, n \geq 0$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} |S_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)| &\leq \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{4}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n V\left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right) + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \frac{2}{m+1} \sum_{j=1}^m V\left(\phi_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j}\right) + \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n V\left(\phi_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k}\right). \end{aligned}$$

Следующая теорема доказана авторами в работе [13] и является обобщением приведенной выше теоремы.

Теорема 5. Пусть $f \in (m^\alpha, n^\beta)BV_H(\bar{\mathbb{T}}^2)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$. Тогда

$$|S_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)| \leq \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{(2-\alpha)(2-\beta)}{(m+1)^{1-\alpha}(n+1)^{1-\beta}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^\alpha k^\beta} V_{m^\alpha, n^\beta} \left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k}\right) +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \frac{(2-\alpha)}{(m+1)^{1-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^\alpha} V_{m^\alpha} \left(\phi_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j}\right) + \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \frac{(2-\beta)}{(n+1)^{1-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta} V_{n^\beta} \left(\phi_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k}\right).$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основное утверждение формулируется следующим образом.

Теорема 6. Пусть $f \in (m^\alpha, n^\beta)BV_H^{(p,q)}(\mathbb{T}^2)$, $0 \leq \alpha q + \beta p \leq q$, $1 - \alpha p \geq 0$ и $1 - \beta q \geq 0$. Тогда для $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ имеем

$$|S_{m,n}^r(f, x, y) - s(f, x, y)| \leq$$

$$\leq 4C_{p,q}^r \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \left(\frac{1+1/q-\beta}{1/q-\beta} \right)^{p/q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha, qn^\beta}'^p \left(\phi'_{xy}, \frac{\pi}{j}, \pi \right) \right)^{1/p} +$$

$$+ 2C_p^r \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha}'^p \left(\phi'_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p} +$$

$$+ 2C_q^r \left(\frac{1+1/q-\beta}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'+\beta}} V_{qn^\beta}'^q \left(\phi'_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/q}, \quad (7)$$

где $C_{p,q}^r$, C_p^r и C_q^r — константы, зависящие от p , q и r , $p' = (p-1)/p$ и $q' = (q-1)/q$.

Более точный результат можно получить для конкретного класса $(m^\alpha, n^\beta)BV_H^p$ рациональных рядов Фурье. Для этого мы приводим следующий факт.

Следствие 1. Пусть $f \in (m^\alpha, n^\beta)BV_H^p(\mathbb{T}^2)$, $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$, $1 - \alpha p \geq 0$ и $1 - \beta p \geq 0$. Тогда для $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ имеем

$$|S_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)| \leq$$

$$\leq 4C_{p,q}^r \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\beta}} \frac{1+1/p-\beta}{(n+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^{p'+\alpha} k^{p'+\beta}} V_{pm^\alpha, pn^\beta}'^p \left(\phi'_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/p} +$$

$$+ 2C_p^r \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha}'^p \left(\phi'_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p} +$$

$$+ 2C_p^r \left(\frac{1+1/p-\beta}{(n+1)^{1/p-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p'+\beta}} V_{pn^\beta}'^p \left(\phi'_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/p}, \quad (8)$$

где $C_{p,p}^r$ и C_p^r — константы, зависящие от p и r .

В частности, в случае тригонометрического ряда Фурье, поскольку имеются хорошие оценки ядра Дирихле, можно получить следующие утверждения.

Следствие 2. Пусть $f \in (m^\alpha, n^\beta) \text{BV}_H^{(p,q)}(\mathbb{T}^2)$, $0 \leq \alpha q + \beta p \leq q$, $1 - \alpha p \geq 0$ и $1 - \beta q \geq 0$. Тогда для $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ имеем

$$\begin{aligned} & |S_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)| \leq \\ & \leq C_{p,q} \left(\frac{1 + 1/p - \alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \left(\frac{1 + 1/q - \beta}{1/q - \beta} \right)^{p/q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha, qn^\beta}^p \left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \pi \right) \right)^{1/p} + \\ & + C_p \left(\frac{1 + 1/p - \alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha}^p \left(\phi_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p} + \\ & + C_q \left(\frac{1 + 1/q - \beta}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'+\beta}} V_{qn^\beta}^q \left(\phi_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где $C_{p,q}$, C_p и C_q — константы, зависящие от p и q .

Следствие 3. Пусть $f \in (m^\alpha, n^\beta) \text{BV}_H^p(\mathbb{T}^2)$, $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$, $1 - \alpha p \geq 0$ и $1 - \beta p \geq 0$. Тогда для $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ имеем

$$\begin{aligned} & |S_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)| \leq \\ & \leq C_{p,p} \left(\frac{1 + 1/p - \alpha}{(m+1)^{1/p-\beta}} \frac{1 + 1/p - \beta}{(n+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^{p'+\alpha} k^{p'+\beta}} V_{pm^\alpha, pn^\beta}^p \left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/p} + \\ & + C_p \left(\frac{1 + 1/p - \alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha}^p \left(\phi_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p} + \\ & + C_p \left(\frac{1 + 1/p - \beta}{(n+1)^{1/p-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p'+\beta}} V_{pn^\beta}^p \left(\phi_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где $C_{p,p}$ и C_p — константы, зависящие от p .

Следствие 4. Пусть $f \in (m^\alpha, n^\beta) \text{BV}_H^{(p,q)}(\mathbb{T}^2)$, $0 \leq \alpha q + \beta p \leq q$, $1 - \alpha p \geq 0$ и $1 - \beta q \geq 0$. Если $f \in C(\mathbb{T}^2)$, то для $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ имеем $S_{m,n}^r(f, x, y) \rightarrow s(f, x, y)$ при $m, n \rightarrow \infty$. В тригонометрическом случае $S_{m,n}(f, x, y) \rightarrow s(f, x, y)$ при $m, n \rightarrow \infty$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для доказательства результатов нам потребуются следующие важные леммы о существовании предела и сходимости, а также формулы частичного суммирования для одиночных и двойных последовательностей.

Лемма 1 ([14], раздел 3, лемма 2). Если $f \in (m^\alpha, n^\beta) \text{BV}_H^{(p,q)}(R)$ при $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha q + \beta p \leq q$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in R$ существуют четыре предела $f(x_0 \pm 0, y_0 \pm 0)$ функции $f(x, y)$ при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, когда (x, y) принадлежит соответствующему открытому координатному квадранту.

Лемма 2 ([14], раздел 3, лемма 3). Если $f \in (\Lambda, \Lambda') \text{BV}_H^{(p,q)}(R)$, то

- а) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V_{p\Lambda, q\Lambda'}(f, (a, a + \delta], [c, d]) = 0$;
- б) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V_{p\Lambda, q\Lambda'}(f, [a, a + \delta], [c, d]) = 0$, если $f(x, \cdot)$ непрерывна в точке a ;

- c) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V_{p\Lambda, q\Lambda'}(f, [a, b], (c, c + \delta]) = 0;$
- d) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V_{p\Lambda, q\Lambda'}(f, [a, b], [c, c + \delta]) = 0,$ если $f(\cdot, y)$ непрерывна в точке c ;
- e) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V_{p\Lambda, q\Lambda'}(f, (a, a + \delta], (c, c + \delta]) = 0;$
- f) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} V_{p\Lambda, q\Lambda'}(f, [a, a + \delta], [c, c + \delta]) = 0,$ если $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, c) .

Лемма 3 (формула одиночного частичного суммирования). Пусть

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_j \text{ и } b_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

— вещественные числа. Пусть также $B_j = \sum_{k=j}^n b_k$ при $j = 0, 1, 2, \dots, n$, и $B_{n+1} = 0$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j = \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) B_j + a_0 B_1. \quad (9)$$

Также для $B_j = \sum_{k=0}^j b_k$ имеем

$$\sum_{j=0}^n a_j b_j = \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) B_j + a_n B_n. \quad (10)$$

Лемма 4. Пусть $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $a_{j,k}$ и $b_{j,k}$ — вещественные числа. Пусть также $B_{j,k} = \sum_{j'=j}^m \sum_{k'=k}^n b_{j',k'}$ и $B_{m+1,n+1} = B_{j,n+1} = B_{m+1,k} = 0$ при $j = 0, 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, n$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{j,k} b_{j,k} &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (a_{j,k} - a_{j,k-1} - a_{j-1,k} + a_{j-1,k-1}) B_{j,k} + \\ &+ \sum_{j=1}^m (a_{j,0} - a_{j-1,0}) B_{j,1} + \sum_{k=1}^n (a_{0,k} - a_{0,k-1}) B_{1,k} + a_{0,0} B_{1,1}. \end{aligned}$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 6. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ фиксированы. Начнем с представления (3) и разности между $S_{m,n}^r(f, x, y)$ и $s(f, x, y)$. Обозначая $\phi' := \phi'_{xy}$, непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \pi^2(S_{m,n}^r(f, x, y) - s(f, x, y)) &= \iint_{\mathbb{T}^2} \{f(x-u, y-v) - s(f, x, y)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv = \\ &= \iint_{\mathbb{T}^2} \{\phi'(u, v) - \phi'(u, 0) - \phi'(0, v)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\ &+ \pi \int_{\mathbb{T}} \phi'(u, 0) D_m(x-u) du + \pi \int_{\mathbb{T}} \phi'(0, v) D_n(y-v) dv = \\ &= \iint_{I_{0,m} \times I_{0,n}} \{\phi'(u, v) - \phi'(u, 0) - \phi'(0, v)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\ &+ \sum_{j=1}^m \iint_{I_{j,m} \times I_{0,n}} \{g'(u, v) - g'(\eta_{j,m}, v)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \iint_{I_{j,m} \times I_{0,n}} g'(\eta_{j,m}, v) D_m(x-u) D_n(y-v) du dv + \\
& + \sum_{k=1}^n \iint_{I_{0,m} \times I_{k,n}} g'(u, v) D_m(x-u) D_n(y-v) du dv + \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} \{g'(u, v) - g'(u, \eta_{k,n}) - g'(\eta_{j,m}, v) + g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})\} D_m(x-u) D_n(y-v) du dv + \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} \{g'(\eta_{j,m}, v) - g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})\} D_m(x-u) D_n(y-v) du dv + \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} \{g'(u, \eta_{k,n}) - g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})\} D_m(x-u) D_n(y-v) du dv + \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}) D_m(x-u) D_n(y-v) du dv + \\
& + \iint_{\mathbb{T}^2 \setminus [0, \pi]^2} g'(u, v) D_m(x-u) D_n(y-v) du dv + \pi \int_{\mathbb{T}} \phi'(u, 0) D_m(x-u) du + \pi \int_{\mathbb{T}} \phi'(0, v) D_n(y-v) dv = \\
& = (A_1 + A_2 + \dots + A_8) + A_9 + \pi(A_{10} + A_{11}) \quad (\text{новые обозначения}). \quad (11)
\end{aligned}$$

Поскольку $\phi'(0, 0) = 0$, учитывая известное неравенство

$$|D_m(x-t)| \leq \frac{1}{2} \sum_{j=-m}^m |\overline{\phi_j(e^{i(x-t)})}| |\phi_j(e^{ix})| \leq \frac{1+r}{1-r} (m+1) \quad \text{при } t \in \mathbb{T}, \quad (12)$$

сразу получаем

$$\begin{aligned}
|A_1| & \leq \iint_{I_{0,m} \times I_{0,n}} |\phi'(u, v) - \phi'(u, 0) - \phi'(0, v) + \phi'(0, 0)| |D_m(x-u) D_n(y-v)| du dv \leq \\
& \leq \pi^2 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2 \text{osc}_2(\phi', I_{0,m}, I_{0,n}). \quad (13)
\end{aligned}$$

Теперь для $\alpha_j = |\alpha_j| e^{ia_j}$, $j \in \mathbb{N}$ и $|\alpha_j| < 1$ существует монотонная возрастающая и дифференцируемая функция ([15], раздел 3)

$$\theta_j(t) = \int_0^t \frac{1 - |\alpha_j|^2}{1 - 2|\alpha_j| \cos(x - a_j) + |\alpha_j|^2} dx$$

такая, что

$$\frac{e^{it} - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j e^{it}} = e^{i\theta_j(t)}.$$

Введя обозначение

$$\theta_n(t, x) = \sum_{j=1}^n (\theta_j(x) - \theta_j(t)),$$

можно записать

$$D_l(x-t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-l}^l \overline{\phi_l(e^{i(x-t)})} \phi_l(e^{ix}) = \frac{\sin[t/2 + \theta_l(x-t, x)]}{2 \sin t/2} \quad \text{для } 0 < t \leq \pi \text{ и } l \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Далее, из (6) получаем

$$|g'(u, v) - g'(\eta_{j,m}, v)| \leq \text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{0,n}) \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, m.$$

Учитывая вышеприведенные факты, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) |A_2| &= \left(\frac{1-r}{1+r} \right) \left| \sum_{j=1}^m \iint_{I_{j,m} \times I_{0,n}} \{g'(u, v) - g'(\eta_{j,m}, v)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^m \text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{0,n}) \iint_{I_{j,m} \times I_{0,n}} \frac{(n+1)}{u} dudv \leq \pi \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{1-1/p^2+1/p^2}} \text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{0,n}) \leq \\ &\leq \pi \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{1/p}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{0,n}))^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{j^{1-1/p^2}} \right)^{1-1/p} \right)^{\frac{1}{1-1/p}} \leq \\ &\leq \pi 2^{1/p} m_p \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{0,n}))^p \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь оценим A_3 . Положим

$$R_{j,l} = \int_{\eta_{j,l}}^{\pi} D_l(x-u) du, \quad j = 0, 1, \dots, l+1, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Тогда

$$R_{0,l} = \frac{\pi}{2}, \quad R_{l+1,l} = 0, \quad (17)$$

и для $0 < y < \pi$ по второй теореме о среднем получаем

$$\begin{aligned} \int_y^{\pi} D_l(x-t) dt &= \int_y^{\pi} \frac{\sin((t/2) + \theta_l(x-t, x))}{2 \sin(t/2)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_y^{\pi} \cos(\theta_l(x-t, x)) dt + \int_y^{\pi} \frac{\sin(\theta_l(x-t, x))}{2 \tan(t/2)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_y^{\pi} \cos(\theta_l(x-t, x)) dt + \frac{1}{2 \tan(y/2)} \int_y^{\xi} \sin(\theta_l(x-t, x)) dt \quad (y \leq \xi \leq \pi). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\left| \int_y^{\pi} e^{\pm i \theta_l(x-t, x)} dt \right| \leq \frac{(1+r)\pi}{(1-r)l},$$

для $0 < y < \pi$ ([8], лемма 2.2) имеем

$$\left| \int_y^{\pi} D_l(x-t) dt \right| \leq \frac{(1+r)\pi}{(1-r)l} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{y} \right),$$

следовательно,

$$|R_{j,l}| \leq \frac{1+r}{1-r} \frac{(\pi+4)}{2j} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, l. \quad (18)$$

Теперь по определению A_3 , используя формулу частичной суммы (9) из леммы 3 с $a_j = g(\eta_{j,m}, v)$ и $b_j = R_{j,m} - R_{j+1,m}$ для $j = 0, 1, \dots, m$, получаем

$$A_3 = \sum_{j=1}^m \iint_{I_{j,m} \times I_{0,n}} g'(\eta_{j,m}, v) D_m(x-u) D_n(y-v) dudv =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{I_{0,n}} \sum_{j=1}^m g'(\eta_{j,m}, v) (R_{j,m} - R_{j+1,m}) D_n(y - v) dv = \\
&= \int_{I_{0,n}} \left\{ \sum_{j=1}^m (g'(\eta_{j,m}, v) - g'(\eta_{j-1,m}, v)) (R_{j,m} - R_{m+1,m}) + \right. \\
&\quad \left. + g'(\eta_{0,m}, v) (R_{1,m} - R_{m+1,m}) \right\} D_n(y - v) dv = \\
&= \int_{I_{0,n}} \left\{ \sum_{j=1}^m (\phi'(\eta_{j,m}, v) - \phi'(\eta_{j,m}, 0) - \phi'(\eta_{j-1,m}, v) + \phi'(\eta_{j-1,m}, 0)) R_{j,m} \right\} D_n(y - v) dv,
\end{aligned}$$

так как $g'(\eta_{j,m}, v) - g'(\eta_{j-1,m}, v) = \phi'(\eta_{j,m}, v) - \phi'(\eta_{j,m}, 0) - \phi'(\eta_{j-1,m}, v) + \phi'(\eta_{j-1,m}, 0)$, $g'(\eta_{0,m}, v) = g'(0, v) = 0$ по продолжению $g'(u, v)$, а $R_{m+1,m} = 0$ в силу (17).

Из (12) и (18) можно заключить, что

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 |A_3| \leq \frac{(\pi+4)}{2} \int_{I_{0,n}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \text{osc}_2(\phi', I_{j-1,m}, I_{0,n})(n+1) dv \leq \\
&\leq \frac{\pi(\pi+4)}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{1-1/p^2+1/p^2}} \text{osc}_2(\phi', I_{j-1,m}, I_{0,n}) \leq \\
&\leq \frac{\pi(\pi+4)}{2} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{1/p}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j-1,m}, I_{0,n}))^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{j^{1-1/p^2}} \right)^{1-1/p} \right)^{1/(1-1/p)} = \\
&= \frac{\pi(\pi+4)}{2} m_p \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^{1/p}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{0,n}))^p \right)^{1/p}. \tag{19}
\end{aligned}$$

Поскольку A_4 — симметричный аналог $A_2 + A_3$, имеем

$$|A_4| \leq \pi \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \left(2^{1/q} + \frac{(\pi+4)}{2} \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right) n_q \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{0,m}, I_{k,n}))^q \right)^{1/q}. \tag{20}$$

По определению $g'(u, v)$

$$\begin{aligned}
&g'(u, v) - g'(u, \eta_{k,n}) - g'(\eta_{j,m}, v) + g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}) = \\
&= \phi'(u, v) - \phi'(u, \eta_{k,n}) - \phi'(\eta_{j,m}, v) + \phi'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}),
\end{aligned} \tag{21}$$

а по определению A_5 и в силу (14) получаем

$$\begin{aligned}
|A_5| &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}) \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} |D_m(x - u)| |D_n(y - v)| dudv \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p^2+1/p^2} k^{1-1/q^2+1/q^2}} \text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}) \leq \\
&\leq 2^{1/p+1/q} m_p n_q \left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}. \tag{22}
\end{aligned}$$

Для оценки A_6 используем обозначение (16) и формулу частичного суммирования (9) из леммы 3 с $a_j = g'(\eta_{j,m}, v) - g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})$ и $b_j = R_{j,m} - R_{j+1,m}$ при $j = 0, 1, \dots, m$, тогда

$$\begin{aligned} A_6 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} \{g'(\eta_{j,m}, v) - g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})\} D_m(x-u) D_n(y-v) du dv = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{I_{k,n}} \left\{ \sum_{j=1}^m (g'(\eta_{j,m}, v) - g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})) (R_{j,m} - R_{j+1,m}) \right\} D_n(y-v) dv = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{I_{k,n}} \sum_{j=1}^m (\phi'(\eta_{j,m}, v) - \phi'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}) - \phi'(\eta_{j-1,m}, v) + \phi'(\eta_{j-1,m}, \eta_{k,n})) R_{j,m} D_n(y-v) dv, \end{aligned}$$

так как $g'(\eta_{0,m}, v) = g'(\eta_{0,m}, \eta_{k,n}) = 0$ по определению $g'(u, v)$, $R_{m+1,m} = 0$ в силу (17), а также (21), где $u = \eta_{j-1,m}$. Теперь с учетом (14) и (18) получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) |A_6| &\leq \frac{(\pi+4)}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p^2+1/p^2} k^{1-1/q^2+1/q^2}} \text{osc}_2(\phi', I_{j-1,m}, I_{k,n}) \leq \\ &\leq \frac{(\pi+4)m_p n_q}{2^{1/p}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично можно оценить

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right) |A_7| \leq \frac{(\pi+4)m_p n_q}{2^{1/q}} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}. \quad (24)$$

Учитывая обозначение (16), запишем

$$A_8 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}) (R_{j,m} - R_{j+1,m}) (R_{k,n} - R_{k+1,n}),$$

откуда, учитывая формулу двойного суммирования из леммы 4 с $a_{j,k} = g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})$ и $b_{j,k} = (R_{j,m} - R_{j+1,m}) (R_{k,n} - R_{k+1,n})$ при $j = 0, 1, \dots, m$ и $k = 0, 1, \dots, n$, получаем

$$\begin{aligned} A_8 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ g'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}) - g'(\eta_{j,m}, \eta_{k-1,n}) - g'(\eta_{j-1,m}, \eta_{k,n}) + g'(\eta_{j-1,m}, \eta_{k-1,n}) \right\} \times \\ &\quad \times (R_{j,m} - R_{j+1,m}) (R_{k,n} - R_{k+1,n}) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \{ \phi'(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}) - \phi'(\eta_{j,m}, \eta_{k-1,n}) - \phi'(\eta_{j-1,m}, \eta_{k,n}) + \phi'(\eta_{j-1,m}, \eta_{k-1,n}) \} R_{j,m} R_{k,n}, \end{aligned}$$

так как $a_{j,0} = a_{0,k} = 0$ по определению $g'(u, v)$ для всех $j = 0, 1, \dots, m$ и $k = 0, 1, \dots, n$, в силу (17), а также (21), где $u = \eta_{j-1,m}$ и $v = \eta_{k-1,n}$.

Таким образом, из (18) следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 |A_8| &\leq \left(\frac{\pi+4}{2}\right)^2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p^2+1/p^2} k^{1-1/q^2+1/q^2}} \text{osc}_2(\phi', I_{j-1,m}, I_{k-1,n}) \leq \\ &\leq \left(\frac{\pi+4}{2}\right)^2 m_p n_q \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (25)$$

Объединяя условия (13), (15), (19), (20), (22), (23)–(25), находим

$$\sum_{i=1}^8 |A_i| \leq C_{p,q} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}, \quad (26)$$

где

$$C_{p,q} = \left(\frac{(\pi+4)(2^{1/p} + 2^{1/q} + 1)}{2\pi^2} + \frac{2^{1/p} + 2^{1/q} + 4}{\pi} + 2 \right) m_p n_q.$$

Зафиксируем j и определим

$$a_{j,0} = 0 \text{ для } t \in [0, 1) \text{ и } a_{j,t} = \sum_{k=0}^{[t]-1} \frac{1}{(k+1)^\beta} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \text{ для } t \in [1, n+1].$$

Учитывая, что $1 - \beta q \geq 0 \implies \frac{1}{q} \geq \beta$, и используя формулу частичного суммирования (10), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q-\beta}} \frac{1}{(k+1)^\beta} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q-\beta}} (a_{j,k+1} - a_{j,k}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(k+1)^{1/q-\beta}} - \frac{1}{(k+2)^{1/q-\beta}} \right) a_{j,k+1} + \frac{1}{(n+1)^{1/q-\beta}} a_{j,n+1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку $a_{j,t}$ не убывает на $t \in [k+1, k+2]$ при фиксированном j и $k \in [0, n-1]$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1/q-\beta)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(k+1)^{1/q-\beta}} - \frac{1}{(k+2)^{1/q-\beta}} \right) a_{j,k+1} &= \\ = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j,k+1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t^{1+1/q-\beta}} dt &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k+1}^{k+2} \frac{a_{j,t}}{t^{1+1/q-\beta}} dt = \int_1^{n+1} \frac{a_{j,t}}{t^{1+1/q-\beta}} dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Заменяя теперь переменную t на $\frac{n+1}{s}$, получаем $t \rightarrow 1 \iff s \rightarrow n+1, t \rightarrow n+1 \iff s \rightarrow 1$

и $\frac{dt}{ds} = (-1) \frac{n+1}{s^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (n+1)^{1/q-\beta} \int_1^{n+1} \frac{a_{j,t}}{t^{1+1/q-\beta}} dt &= (n+1)^{1/q-\beta} \int_{n+1}^1 a_{j, \frac{n+1}{s}} \left(\frac{s}{n+1} \right)^{1+1/q-\beta} (-1) \left(\frac{n+1}{s^2} \right) ds = \\ &= \int_1^{n+1} a_{j, \frac{n+1}{s}} \left(\frac{1}{s^{1-1/q+\beta}} \right) ds = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} a_{j, \frac{n+1}{s}} \left(\frac{1}{s^{q'+\beta}} \right) ds \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'+\beta}} a_{j, \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}. \end{aligned} \quad (29)$$

Также имеем

$$\frac{1}{(n+1)^{1/q-\beta}} a_{j,n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'+\beta}} a_{j, \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}. \quad (30)$$

Теперь из (27)–(30) вытекает

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \leq \left(\frac{1+1/q-\beta}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{a_{j, \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}}{k^{q'+\beta}} \right)^{p/q}.$$

Аналогично, для фиксированного n определим

$$b_{0,n} = 0 \text{ для } t \in [0, 1) \text{ и } b_{t,n} = \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} \frac{1}{(j+1)^\alpha} \left(\frac{1+1/q-\beta}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{a_{j, \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}}{k^{q'+\beta}} \right)^{p/q}, \quad t \in [1, m+1],$$

тогда можно доказать неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \leq \\ & \leq \sum_{j=0}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\frac{1+1/q-\beta}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{a_{j, \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}}{k^{q'+\beta}} \right)^{p/q} \leq \frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} b_{\lfloor \frac{m+1}{j} \rfloor, n} \leq \\ & \leq \frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} \sum_{j'=1}^{\lfloor \frac{m+1}{j} \rfloor - 1} \frac{1}{(j'+1)^\alpha} \left(\frac{1+1/q-\beta}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{a_{j', \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}}{(k+1)^{q'+\beta}} \right)^{p/q} \leq \\ & \leq \frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \left(\frac{1+1/q-\beta}{1/q-\beta} \right)^{p/q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} \sum_{j'=1}^{\lfloor \frac{m+1}{j} \rfloor - 1} \frac{1}{(j'+1)^\alpha} (a_{j', n+1})^{p/q}. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь по определению $a_{j,t}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j'=1}^{\lfloor \frac{m+1}{j} \rfloor - 1} \frac{1}{(j'+1)^\alpha} (a_{j', n+1})^{p/q} &= \sum_{j'=1}^{\lfloor \frac{m+1}{j} \rfloor - 1} \frac{1}{(j'+1)^\alpha} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^\beta} (\text{osc}_2(\phi', I_{j',m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \leq \\ &\leq V_{pm^\alpha, qn^\beta}^p \left(\phi'_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{j} \right], [0, \pi] \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/q}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^q \right)^{p/q} \leq \\ & \leq \frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \left(\frac{1+1/q-\beta}{1/q-\beta} \right)^{p/q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha, qn^\beta}^p \left(\phi'_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{j} \right], [0, \pi] \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь из (26) и (32) получаем

$$\sum_{i=1}^8 |A_i| \leq C_{p,q} \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \left(\frac{1+1/q-\beta}{1/q-\beta} \right)^{p/q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha, qn^\beta}^p \left(\phi'_{xy}, \frac{\pi}{j}, \pi \right) \right)^{1/p}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sum_{i=1}^9 |A_i| \leq 4C_{p,q} \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \left(\frac{1+1/q-\beta}{1/q-\beta} \right)^{p/q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha, qn^\beta}^{p'} \left(\phi'_{xy}, \frac{\pi}{j}, \pi \right) \right)^{1/p}. \quad (33)$$

Из теоремы 2 вытекает

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi'(u, 0) D_m(x-u) du \right| &\leq |S_m(f(x, \cdot)) - s(f(x, \cdot))| \leq \\ &\leq 2C_{p,r} \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha}^{p'} \left(\phi'_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi'(0, v) D_n(y-v) dv \right| &\leq |S_n(f(\cdot, y)) - s(f(\cdot, y))| \leq \\ &\leq 2C_{q,r} \left(\frac{1+1/q-\alpha}{(n+1)^{1/q-\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'+\beta}} V_{qn^\beta}^q \left(\phi'_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, из (33)–(35) получаем (7). $\square$

Доказательство следствия 1. Для $f \in (m^\alpha, n^\beta) BV_H^p(\mathbb{T}^2)$ из (31) имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/p}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^p \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \left(\frac{1+1/p-\beta}{(n+1)^{1/p-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p'+\beta}} a_{j, [\frac{n+1}{k}]} \right) \leq \\ &\leq \frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \frac{1+1/p-\beta}{(n+1)^{1/p-\beta}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^{p'+\alpha} k^{p'+\beta}} \sum_{j'=1}^{[\frac{m+1}{j}]-1} \frac{1}{(j'+1)^\alpha} a_{j', [\frac{n+1}{k}]}. \end{aligned}$$

Теперь по определению $a_{j,t}$

$$\begin{aligned} \sum_{j'=1}^{[\frac{m+1}{j}]-1} \frac{1}{(j'+1)^\alpha} a_{j', [\frac{n+1}{k}]} &= \sum_{j'=1}^{[\frac{m+1}{j}]-1} \frac{1}{(j'+1)^\alpha} \left(\sum_{k'=0}^{[\frac{n+1}{k}]-1} \frac{1}{(k'+1)^\beta} (\text{osc}_2(\phi', I_{j',m}, I_{k',n}))^p \right) \leq \\ &\leq V_{pm^\alpha, pn^\beta}^p \left(\phi'_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{j} \right], \left[0, \frac{\pi}{k} \right] \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^m \frac{1}{(j+1)^{1/p}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^{1/p}} (\text{osc}_2(\phi', I_{j,m}, I_{k,n}))^p \leq \\ &\leq \frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \frac{1+1/p-\beta}{(n+1)^{1/p-\beta}} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{j^{p'+\alpha} k^{p'+\beta}} V_{pm^\alpha, pn^\beta}^p \left(\phi'_{xy}, \frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{k} \right). \end{aligned}$$

Используя вышеуказанное неравенство вместо (32) и действуя аналогично доказательству теоремы 6, получаем (8). $\square$

Доказательство следствия 2. Для фиксированных m, n и $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ можем записать представление (11) в тригонометрическом случае в виде

$$\begin{aligned}
\pi^2(S_{m,n}(f, x, y) - s(f, x, y)) &= \iint_{\bar{\mathbb{T}}^2} \{f(x-u, y-v) - s(f, x, y)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv = \\
&= \int_0^\pi \int_0^\pi \{\phi_{xy}(u, v) - \phi_{xy}(u, 0) - \phi_{xy}(0, v)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \pi \int_0^\pi \phi_{xy}(u, 0) D_m(x-u) du + \pi \int_0^\pi \phi_{xy}(0, v) D_n(y-v) dv = \\
&= \iint_{I_{0,m} \times I_{0,n}} \{\phi_{xy}(u, v) - \phi_{xy}(u, 0) - \phi_{xy}(0, v)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \iint_{I_{j,m} \times I_{0,n}} \{g(u, v) - g(\eta_{j,m}, v)\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \iint_{I_{j,m} \times I_{0,n}} g(\eta_{j,m}, v) D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \iint_{I_{0,m} \times I_{k,n}} g(u, v) D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&+ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} \{g(u, v) - g(u, \eta_{k,n}) - g(\eta_{j,m}, v) + g(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})\} \times D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} \{g(\eta_{j,m}, v) - g(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} \{g(u, \eta_{k,n}) - g(\eta_{j,m}, \eta_{k,n})\} D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \iint_{I_{j,m} \times I_{k,n}} g(\eta_{j,m}, \eta_{k,n}) D_m(x-u) D_n(y-v) dudv + \\
&\quad + \pi \int_0^\pi \phi(u, 0) D_m(x-u) du + \pi \int_0^\pi \phi(0, v) D_n(y-v) dv = \\
&= (A_1 + A_2 + \dots + A_8) + \pi(A_{10} + A_{11}) \quad (\text{новые обозначения}).
\end{aligned}$$

Используя вместо (12), (14) и (18) неравенства

$$|D_n(t)| = \left| \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n e^{int} \right| \leq n + \frac{1}{2},$$

$$|D_n(t)| = \left| \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin(t/2)} \right| \leq \frac{1}{t} \quad \text{для } 0 < t < \pi,$$

применяя затем при $j = 1, 2, \dots, n$ вторую теорему о среднем

$$\int_{\eta_{j,n}}^\pi D_n(t) dt = \int_{\eta_{j,n}}^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\eta_{j,n}}{2}\right)} \int_{\eta_{j,n}}^\xi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \quad (\eta_{j,n} \leq \xi \leq \pi) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\eta_{j,n}}{2}\right)} \left[\frac{-\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \right]_{\eta_{j,n}}^{\xi} \leq \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta_{j,n}} \leq \frac{\pi}{(n+1)\eta_{j,n}} = \frac{1}{j},$$

и рассуждая аналогично доказательству теоремы 6, можно получить следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^8 |A_i| \leq C_{p,q} \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \left(\frac{1+1/q-\beta}{1/q-\beta} \right)^{p/q} \sum_{j=1}^m \frac{1}{(j+1)^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha, qn^\beta}^p \left(\phi_{xy}, \frac{\pi}{j} \cdot \pi \right) \right)^{1/p}.$$

Из теоремы 1 вытекает

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \phi_{xy}(u, 0) D_m(x-u) du \right| &\leq |S_m(f(x, \cdot)) - s(f(x, \cdot))| \leq \\ &\leq C_p \left(\frac{1+1/p-\alpha}{(m+1)^{1/p-\alpha}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^{p'+\alpha}} V_{pm^\alpha}^p \left(\phi_{xy}(\cdot, 0), \frac{\pi}{j} \right) \right)^{1/p}, \\ \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \phi_{xy}(0, v) D_n(y-v) dv \right| &\leq |S_n(f(\cdot, y)) - s(f(\cdot, y))| \leq \\ &\leq C_q \left(\frac{1+1/q-\alpha}{(n+1)^{1/q-\beta}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{q'+\beta}} V_{qn^\beta}^q \left(\phi_{xy}(0, \cdot), \frac{\pi}{k} \right) \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Доказательство следствия 3 получаем из доказательства теоремы 6 с небольшими модификациями, аналогичными доказательствам следствий 1 и 2.

Доказательство следствия 4 легко выводится из теоремы 6 и леммы 2, поскольку f непрерывна в $(0, 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bultheel A., González-Vera P., Hendriksen E., Njåstad O. *Orthogonal rational functions* (Cambridge Univ. Press, 1999).
- [2] Ninness B., Gustafsson F. *A unifying construction of orthonormal bases for system identification*, IEEE Transact. Automat. Control **42** (4), 515–521 (1997).
- [3] Vyas R.G. *Properties of functions of generalized variation*, Math. Anal., Approx. Theory Their Appl. **235** (21), 715–741 (2016).
- [4] Bojanić R. *An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **26** (40), 57–60 (1979).
- [5] Bojanić R., Waterman D. *On the rate of convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Akad. Nauka Umjet. Bosne Hercegov. Rad. Odjelj. Prirod. Mat. Nauka **22**, 5–11 (1983).
- [6] Jordan C. *Sur la series de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris. **92**, 228–230 (1881).
- [7] Khachar H., Vyas R. *Rate of convergence for rational and conjugate rational Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Acta Comm. Univ. Tartuensis Math. **26** (2), 233–241 (2022).
- [8] Tan L., Qian T. *On convergence of rational Fourier series of functions of bounded variations*, Sci. Sin. Math. **43** (6), 541–550 (2013).
- [9] Wiener N. *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, Mass. J. Math. (3), 72–94 (1924).
- [10] Бера Р.К., Годадра Б.Л. *Скорость сходимости некоторых рядов Фурье функций обобщенной ограниченной вариации*, Изв. вузов. Матем. (10), 3–17 (2024).
- [11] Hardy G.H. *On double Fourier series*, Quart. J. Math. **35**, 53–79 (1906).
- [12] Móricz F. *A quantitative version of the Dirichlet-Jordan test for double Fourier series*, J. Approx. Theory **71**, 344–358 (1992).

- [13] Bera R.K., Ghodadra B.L. *On the rate of convergence of double Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Acta Sci. Math. (Szeged) **88**, 723–737 (2022).
- [14] Bera R.K., Ghodadra B.L. *Pointwise convergence of the double Fourier-Legendre series of functions of generalized bounded variation*, J. Class. Anal. **23** (2), 105–125 (2024).
- [15] Garnett J.B. *Bounded analytic functions* (Acad. Press, 1981).
- [16] Zygmund A. *Trigonometric series*. V. I (Cambridge Univ. Press, 1959).

Рамешбхай Каршанбхай Бера

Университет Махараджи Саяджирао в Бароде,
Вадодара (Гуджарат), 390002, Индия,

e-mail: rameshkbera8080@gmail.com

Биха Ли́ла Годадра

Университет Махараджи Саяджирао в Бароде,
Вадодара (Гуджарат), 390002, Индия,

e-mail: bhikhu_ghodadra@yahoo.com

R.K. Bera and B.L. Ghodadra

Rate of convergence of double rational Fourier series of functions of generalized bounded variation

Abstract. The rate of convergence of double rational Fourier series and, in particular, double trigonometric Fourier series of functions of generalized bounded variation is estimated.

Keywords: double Fourier series, double rational Fourier series, pointwise convergence, rate of convergence, (p, q) -(Λ, Λ')-bounded variation.

Rameshbhai Karshanbhai Bera

The Maharaja Sayajirao University of Baroda,
Vadodara (Gujarat), 390002 India,

e-mail: rameshkbera8080@gmail.com

Bhikha Lila Ghodadra

The Maharaja Sayajirao University of Baroda,
Vadodara (Gujarat), 390002 India,

e-mail: bhikhu_ghodadra@yahoo.com