

С.Э. ХАМИЗИ, Р. БУКУЧА

ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДВУХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Изучается семейство многопараметрических полиномиальных дифференциальных систем степени 11. Доказано, что рассматриваемое семейство имеет инвариантную алгебраическую кривую, заданную в явной форме. Мы демонстрируем интегрируемость этих систем и выводим явное выражение для первого интеграла. Кроме того, представлены достаточные условия для существования двух предельных циклов, заданных явно. Применимость наших результатов иллюстрируется конкретным примером.

Ключевые слова: предельный цикл, уравнение Риккати, инвариантная алгебраическая кривая, первый интеграл.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-4-71-79

Плоская полиномиальная дифференциальная система определяется уравнениями

$$\begin{aligned}x' &= \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\y' &= \frac{dy}{dt} = Q(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — вещественные многочлены с вещественными коэффициентами. Степень полиномиальной системы задается как $\max\{\deg P, \deg Q\}$.

Изучение предельных циклов систем (1) является одной из наиболее привлекательных задач качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений [1], [2].

Предельный цикл системы (1) представляет собой изолированную периодическую орбиту во множестве ее периодических орбит и называется алгебраическим предельным циклом, если он содержится в нулевом множестве инвариантной алгебраической кривой системы.

Алгебраическая кривая, определяемая уравнением $U(x, y) = 0$, является инвариантной кривой для системы (1), если существует многочлен $K(x, y)$ (называемый кофактором) такой, что

$$P \frac{\partial U}{\partial x} + Q \frac{\partial U}{\partial y} = KU.$$

Система, определяемая уравнением (1), является интегрируемой на открытом множестве Ω пространства $\mathbb{R}^2$, если существует нетривиальная аналитическая функция $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, называемая первым интегралом, удовлетворяющая уравнению

$$P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0.$$

Задачи поиска алгебраических решений полиномиальных систем, в частности алгебраических циклов, восходят к работам А. Пуанкаре и Ж.-Г. Дарбу [3]. Многие исследования и публикации в этой области посвящены изучению количества, устойчивости и расположения предельных циклов на фазовой плоскости [4], [5].

Интегрируемость системы (1) основана на существовании первого интеграла [6], [7] и связана с 16-й проблемой Гильберта [8]. Интегрируемость и количество инвариантных алгебраических кривых полиномиальных систем взаимосвязаны [9], поэтому вопросы о существовании первого интеграла, а также о его явном выражении, если он существует, остаются актуальными.

Множество исследований [10]–[15] содержат результаты и примеры как алгебраических, так и неалгебраических предельных циклов, однако не всегда легко определить, является ли предельный цикл алгебраическим. Например, известный предельный цикл дифференциальной системы ван дер Пола, описанный в 1926 году, был доказан только в 1995 году К. Одани [16]. Инвариантные алгебраические кривые являются основной темой для многих авторов и исследователей, поскольку они важны для понимания динамики систем, благодаря их значимости и актуальности в различных областях (см. [17] для исчерпывающего обзора по этой теме).

В настоящей статье мы изучаем следующую систему степени 11:

$$\begin{aligned} x' &= P_7(x, y) + x(S_2(x, y) + R_{10}(x, y)); \\ y' &= Q_7(x, y) + y(S_2(x, y) + R_{10}(x, y)), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} P_7(x, y) &= (x^2 + y^2)(a_1y^5 + a_6xy^4 + (a_2 - a_4 + a_6)x^5 + (a_4 - a_6)x^3y^2 + \\ &\quad + (3a_1 + a_5)x^2y^3 + (a_3 + 3a_1 - a_5)x^4y), \\ Q_7(x, y) &= (x^2 + y^2)(a_6y^5 - a_1x^5 + a_5xy^4 + (a_2 - a_4 + a_6)x^4y + (a_3 - a_5)x^3y^2 + (a_4 - a_6)x^2y^3), \\ R_{10}(x, y) &= -(x^2 + y^2)^3((a_6 + b_3)y^4 + (b_2 + a_1 + a_5)xy^3 + \\ &\quad + (b_1 + a_2 - a_4 + a_6)x^4 + (b_2 + a_3 + 2a_1 - a_5)x^3y + \\ &\quad + (b_1 + b_3 + a_4 - a_6)x^2y^2) \text{ и } S_2(x, y) = b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2; \end{aligned}$$

здесь $a_1, \dots, a_6, b_1, b_2$ и b_3 — вещественные константы.

Мы приводим явное выражение инвариантных алгебраических кривых, доказываем, что эти системы интегрируемы, и указываем явное выражение для первого интеграла. Кроме того, мы представляем достаточные условия для того, чтобы полиномиальная дифференциальная система имела два предельных цикла, заданных явно. Рассматривается конкретный пример, иллюстрирующий применимость нашего результата.

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \left(\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_3\right)\cos(2\theta) + \frac{1}{2}b_2\sin(2\theta) + \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}b_1, \\ B(\theta) &= \left(\frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_3\right)\sin(2\theta) + \left(-\frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_2\right)\cos(2\theta) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{8}a_1 - \frac{1}{4}a_5 + \frac{1}{8}a_3\right)\sin(4\theta) + \left(\frac{3}{8}a_6 - \frac{1}{4}a_4 + \frac{1}{8}a_2\right)\cos(4\theta) - \frac{1}{4}a_4 + \frac{3}{8}a_2 + \frac{5}{8}a_6, \\ C(\theta) &= \left(-\frac{1}{2}b_2 - \frac{3}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_3\right)\sin(2\theta) + \left(-\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}a_4\right)\cos(2\theta) + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{8}a_1 + \frac{1}{4}a_5 - \frac{1}{8}a_3\right)\sin(4\theta) + \left(-\frac{1}{8}a_2 + \frac{1}{4}a_4 - \frac{3}{8}a_6\right)\cos(4\theta) - \frac{1}{2}b_1 - \frac{3}{8}a_2 - \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{4}a_4 - \frac{5}{8}a_6. \end{aligned}$$

$$F(\theta) = \exp \left(\int_0^\theta \frac{4B(s) + 8C(s)}{-a_1} ds \right),$$

$$G(\theta) = \int_0^\theta \left(\frac{4C(w)}{a_1} \exp \left(\int_0^w \frac{4B(s) + 8C(s)}{-a_1} ds \right) \right) dw.$$

Теорема. Рассмотрим многопараметрическую плоскую полиномиальную дифференциальную систему (2). Справедливы следующие утверждения.

- 1) Начало координат $O(0, 0)$ является единственной критической точкой системы (2) на конечном расстоянии.
- 2) Кривая

$$U(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 1$$

является инвариантной алгебраической кривой системы (2) с кофактором

$$K(x, y) = -4(x^2 + y^2)^2 \left((b_3 + a_6)y^6 + (b_1 + a_2 - a_4 + a_6)x^6 + \right. \\ \left. + (b_2 + a_1 + a_5)xy^5 + (b_2 + a_3 + 2a_1 - a_5)yx^5 + (2b_3 + a_4 + b_1)x^2y^4 + \right. \\ \left. + (b_3 + a_2 + 2b_1)y^2x^4 + (3a_1 + a_3 + 2b_2)x^3y^3 + b_3y^2 + b_2xy + b_1x^2 \right).$$

- 3) Система (2) имеет первый интеграл

$$H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 1}{\left(1 - (x^2 + y^2)^2\right) G\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + F\left(\arctan \frac{y}{x}\right)}.$$

- 4) Система (2) имеет явный предельный цикл, заданный в декартовых координатах формулой $(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^2 = 1$.
- 5) Если

$$\begin{aligned} a_1 &> 0, \\ 2a_4 - 4b_1 - 3a_2 - 4b_3 - 5a_6 &> |6a_1 + 2a_3 + 4b_2| + |2a_4 - a_2 - 3a_6| + \\ &+ |2a_5 - a_3 - a_1| + 4|a_4 - b_1 - a_2 + b_3|, \\ 8b_1 + 3a_2 + 8b_3 + 5a_6 - 2a_4 &> |6a_1 + 2a_3 + 8b_2| + |2a_4 - a_2 - 3a_6| + \\ &+ |2a_5 - a_3 - a_1| + |4a_4 - 8b_1 - 4a_2 + 8b_3|. \end{aligned} \quad (3)$$

то система (2) имеет еще один предельный цикл (Γ_2) , явно заданный в полярных координатах (r, θ) формулой

$$r(\theta, r_*) = \left(\frac{(G(2\pi) - 1)(F(\theta) + G(\theta)) + F(2\pi)}{F(\theta)(G(2\pi) - 1) + F(2\pi)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Более того, предельный цикл (Γ_1) лежит внутри предельного цикла (Γ_2) .

Доказательство. 1) По определению $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ — критическая точка системы (2), если

$$P_7(x_0, y_0) + x_0(S_2(x_0, y_0) + R_{10}(x_0, y_0)) = 0;$$

$$Q_7(x_0, y_0) + y_0(S_2(x_0, y_0) + R_{10}(x_0, y_0)) = 0,$$

отсюда

$$y_0 P_7(x_0, y_0) - x_0 Q_7(x_0, y_0) = a_1 (x_0^2 + y_0^2)^4 = 0.$$

Так как $a_1 \neq 0$, то $(x_0, y_0) = (0, 0)$ — единственное решение этого уравнения. Таким образом, начало координат является единственной критической точкой на конечном расстоянии, ч.т.д.

2) Вычисления показывают, что

$$U(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 1$$

удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} Q(x, y) = U(x, y) K(x, y)$$

с ассоциированным кофактором

$$\begin{aligned} K(x, y) = & -4(x^2 + y^2)^2 \left((b_3 + a_6)y^6 + (b_1 + a_2 - a_4 + a_6)x^6 + \right. \\ & + (b_2 + a_1 + a_5)xy^5 + (b_2 + a_3 + 2a_1 - a_5)yx^5 + (2b_3 + a_4 + b_1)x^2y^4 + \\ & \left. + (b_3 + a_2 + 2b_1)y^2x^4 + (3a_1 + a_3 + 2b_2)x^3y^3 + b_3y^2 + b_2xy + b_1x^2 \right), \end{aligned}$$

ч.т.д.

3) Для доказательства нужно преобразовать систему (2) в полярные координаты (r, θ) с помощью формул $x = r \cos(\theta)$ и $y = r \sin(\theta)$. Тогда система (2) приобретает вид

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{dt} = A(\theta)r^3 + B(\theta)r^7 + C(\theta)r^{11}; \\ \theta' &= \frac{d\theta}{dt} = -a_1r^6. \end{aligned}$$

Приняв θ в качестве независимой переменной, мы получаем уравнение

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{A(\theta)}{a_1r^3} - \frac{B(\theta)}{a_1}r - \frac{C(\theta)}{a_1}r^5. \quad (4)$$

Заменой переменной $\rho = r^4$ уравнение (4) преобразуется в уравнение Риккати

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{4A(\theta)}{a_1} - \frac{4B(\theta)}{a_1}\rho - \frac{4C(\theta)}{a_1}\rho^2. \quad (5)$$

Это уравнение интегрируемо, так как обладает частным решением $\rho = 1$. Вводя стандартную замену переменных $z = \rho - 1$, мы получаем уравнение Бернулли

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{-4B(\theta) - 8C(\theta)}{a_1}z - \frac{4C(\theta)}{a_1}z^2. \quad (6)$$

Вводя стандартную замену переменных $y = \frac{1}{z}$, мы получаем линейное уравнение

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{4B(\theta) + 8C(\theta)}{a_1}y + \frac{4C(\theta)}{a_1}. \quad (7)$$

Общее решение линейного уравнения (7) имеет вид

$$y(\theta) = \frac{G(\theta) + \lambda}{F(\theta)},$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $F(\theta) = \exp\left(\int_0^\theta \frac{4B(s) + 8C(s)}{-a_1} ds\right)$ и

$$G(\theta) = \int_0^\theta \left(\frac{4C(w)}{a_1} \exp\left(\int_0^w \frac{4B(s) + 8C(s)}{-a_1} ds\right) \right) dw.$$

Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид

$$z(\theta) = 0, \quad z(\theta) = \frac{F(\theta)}{G(\theta) + \lambda}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Значит, общее решение уравнения (5)

$$\rho(\theta) = 1, \quad \rho(\theta) = \frac{F(\theta) + G(\theta) + \lambda}{G(\theta) + \lambda}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Соответственно общее решение уравнения (4)

$$r(\theta) = 1, \quad r(\theta) = \left(\frac{F(\theta) + G(\theta) + \lambda}{G(\theta) + \lambda} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Из этого решения мы получаем первый интеграл от переменных (x, y) в виде

$$H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 1}{(1 - (x^2 + y^2)^2) G\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + F\left(\arctan \frac{y}{x}\right)},$$

ч.т.д.

4) Заметим, что система (2) имеет периодическую орбиту тогда и только тогда, когда уравнение (4) имеет строго положительное 2π -периодическое решение. Более того, это эквивалентно существованию решения уравнения (4), которое удовлетворяет условиям $r_* > 0$, $r(0, r_*) = r(2\pi, r_*)$ и $r(\theta, r_*) > 0$ для любого $\theta \in [0, 2\pi]$.

Мы имеем частное решение $\rho(\theta) = 1$ дифференциального уравнения (5); из этого решения получаем $r^4(\theta, 1) = 1 > 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, что является частным решением дифференциального уравнения (4). Это предельный цикл для дифференциальной системы (2). Более точно, в декартовых координатах кривая Γ_1 , определяемая этим предельным циклом, имеет вид $\Gamma_1 : (x^2 + y^2)^2 - 1 = 0$.

Следовательно, доказательство утверждения 4) теоремы завершено.

5) Решение $r(\theta, r_0)$ дифференциального уравнения (4), такое что $r(0, r_0) = r_0$, имеет вид

$$r(\theta, r_0) = \left(\frac{\frac{1}{\frac{r_0^4 - 1}{r_0^4 - 1} + F(\theta) + G(\theta)}}{\frac{1}{\frac{r_0^4 - 1}{r_0^4 - 1} + G(\theta)}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{где } r_0 = r(0).$$

Периодическое решение системы (2) должно удовлетворять условию $r(0, r_*) = r(2\pi, r_*)$, что приводит к единственному значению $r_0 = r_*$, заданному формулой

$$r_* = \left(\frac{F(2\pi) + G(2\pi) - 1}{G(2\pi)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

r_* — точка пересечения периодической орбиты с осью OX_+ . После подстановки этого значения r_* в $r(\theta, r_0)$ мы получаем

$$r(\theta, r_*) = \left(\frac{(F(2\pi) - 1)(F(\theta) + G(\theta)) + G(2\pi)}{G(\theta)(F(2\pi) - 1) + G(2\pi)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Покажем далее, что $r(\theta, r_*) > 0$. Действительно,

$$G(2\pi) - G(\theta) = \int_{\theta}^{2\pi} \left(\frac{4C(w)}{a_1} \exp \left(\int_0^w \frac{4B(s) + 8C(s)}{-a_1} ds \right) \right) dw.$$

Согласно условиям (3) мы имеем $\frac{C(w)}{a_1} > 0$ и $\frac{B(s) + 4C(s)}{-a_1} > 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Следовательно, $G(2\pi) - G(\theta) > 0$ и $F(2\pi) > 1$. Таким образом, $r_* > 0$ и $r(\theta, r_*) > 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Это второй предельный цикл для дифференциальной системы (2), обозначим его через Γ_2 . Более точно, в декартовых координатах $r^2 = x^2 + y^2$ и $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ кривая (Γ_2) , определяемая этим предельным циклом, имеет вид $(\Gamma_2) : L(x, y) = 0$, где

$$L(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \frac{(F(2\pi) - 1) \left(F\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + G\left(\arctan \frac{y}{x}\right) \right) + G(2\pi)}{(F(2\pi) - 1)G\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + G(2\pi)}.$$

В соответствии с условиями (3) получаем

$$r_* = \left(1 + \frac{F(2\pi) - 1}{G(2\pi)}\right)^{\frac{1}{4}} > 1$$

и

$$r(\theta, r_*) = \left(1 + \frac{F(\theta)}{\frac{1}{r_*^4 - 1} + G(\theta)}\right)^{\frac{1}{4}} > 1,$$

этим показано, что предельный цикл (Γ_1) лежит внутри предельного цикла (Γ_2) . Таким образом, система (2) имеет два предельных цикла (Γ_1) и (Γ_2) , ч.т.д. $\square$

Пример.

Возьмем $a_1 = \frac{7}{2}$, $a_2 = -\frac{601}{100}$, $a_3 = -12$, $a_4 = -\frac{599}{100}$, $a_5 = -\frac{399}{100}$, $a_6 = -\frac{7}{2}$, $b_1 = 2$, $b_2 = \frac{1}{5}$ и $b_3 = \frac{5}{2}$, тогда система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} x' = \frac{dx}{dt} = & (x^2 + y^2) \left(-\frac{7}{2}xy^4 + \frac{7}{2}y^5 - \frac{88}{25}x^5 - \frac{249}{100}x^3y^2 + \frac{651}{100}x^2y^3 + \frac{249}{100}x^4y \right) + \\ & + x \left(2x^2 + \frac{xy}{5} + 2y^2 - (x^2 + y^2)^3 \left(-\frac{3}{2}y^4 - \frac{29}{100}xy^3 - \frac{38}{25}x^4 - \frac{81}{100}x^3y + \frac{151}{100}x^2y^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dt} = & (x^2 + y^2) \left(-\frac{7}{2}x^5 - \frac{399}{100}xy^4 - \frac{7}{2}y^5 - \frac{88}{25}x^4y - \frac{801}{100}x^3y^2 - \frac{249}{100}x^2y^3 \right) + \\ & + y \left(2x^2 + \frac{xy}{5} + 2y^2 - (x^2 + y^2)^3 \left(-\frac{3}{2}y^4 - \frac{29}{100}xy^3 - \frac{38}{25}x^4 - \frac{81}{100}x^3y + \frac{151}{100}x^2y^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Кривая $U(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 1$ является инвариантной алгебраической кривой системы (8) с кофактором

$$\begin{aligned} K(x, y) = & -4(x^2 + y^2)^2 \left(-\frac{38}{25}x^6 - \frac{81}{100}xy^5 - \frac{1}{100}y^2x^4 - \frac{11}{10}y^3x^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{100}x^2y^4 - \frac{29}{100}xy^5 - \frac{3}{2}y^6 + 2x^2 + \frac{1}{5}xy + 2y^2 \right). \end{aligned}$$

Система (8) имеет первый интеграл

$$H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 1}{\left(1 - (x^2 + y^2)^2\right)G\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + F\left(\arctan \frac{y}{x}\right)},$$

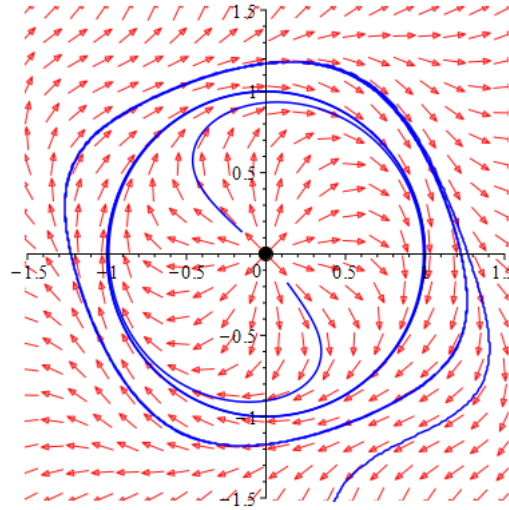


Рис. 1. Предельные циклы системы (8)

где

$$G(\theta) = \int_0^\theta \left(\left(\frac{2 \cos(2t)}{175} + \frac{11 \sin(2t)}{35} + \frac{13 \sin(4t)}{175} + \frac{453 \cos(4t)}{700} + \frac{151}{140} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-\frac{83}{700} + \frac{169t}{140} - \frac{\sin(2t)}{175} - \frac{453 \sin(4t)}{2800} + \frac{\cos(2t)}{10} + \frac{13 \cos(4t)}{700} \right) \right) dt, \\ F(\theta) = \exp \left(-\frac{83}{700} + \frac{169\theta}{140} - \frac{\sin(2\theta)}{175} - \frac{453 \sin(4\theta)}{2800} + \frac{\cos(2\theta)}{10} + \frac{13 \cos(4\theta)}{700} \right).$$

Система (8) имеет первый предельный цикл (Γ_1) , задаваемый формулой

$$(\Gamma_1) : (x^2 + y^2)^2 - 1 = 0.$$

Система (8) имеет второй предельный цикл (Γ_2) , задаваемый в полярных координатах (r, θ) формулой

$$r(\theta, r_*) = \left(\frac{(F(2\pi) - 1)(F(\theta) + G(\theta)) + G(2\pi)}{G(\theta)(F(2\pi) - 1) + G(2\pi)} \right)^{\frac{1}{4}},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$. Предельный цикл пересекается с осью OX_+ в точке

$$r_* = \left(\frac{1562.605089 + 1967.860644 - 1}{1562.605089} \right)^{\frac{1}{4}} \simeq 1.225927914.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dumortier F., Llibre J., Artés J.C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems (Universitex)* (Springer-Verlag, Berlin, 2006).
- [2] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed., Texts in Appl. Math. **7** (Springer-Verlag, New York, 2001).
- [3] Llibre J., Zhang X. *A survey on algebraic and explicit non-algebraic limit cycles in planar differential systems*, Expo. Math. **39** (1), 48–61 (2021), DOI: 10.1016/j.exmath.2020.03.001.
- [4] Bendjeddou A., Cheurfa R. *On the exact limit cycle for some class of planar differential systems*, Nonlinear Diff. Equat. Appl. **14** (5), 491–498 (2007).

- [5] Llibre J., Zhao Y. *Algebraic limit cycles in polynomial systems of differential equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (47), 14207–14222 (2007).
- [6] Boukoucha R., Bendjeddou A. *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, J. Nonlinear Math. Phys. **23** (1), 21–27 (2016).
- [7] Schlomiuk D. *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of center*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (2), 799–841 (1993).
- [8] Hilbert D. *Mathematical Problems, Lecture, Second Internat. Congr. Math (Paris, 1900)*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. 253–297 (1900).
- [9] Christopher C., Llibre J., Pantazi C., Zhang X. *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (10), 2457–2476 (2002).
- [10] Bendjeddou A., Cheurfa R. *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles for quintic polynomial differential systems*, Elect. J. Diff. Equat. **2017** (71), 1–7 (2017).
- [11] Benterki R., Llibre J. *Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles*, Elect. J. Diff. Equat. **2012** (78), 1–6 (2012).
- [12] Boukoucha R. *Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems*, Elect. J. Diff. Equat. **2017** (217), 1–7 (2017).
- [13] Cheresiz V., Volokitin E. *The algebraic curves of planar polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, Elect. J. Qual. Theory Differ. Equat. (51), 1–12 (2021), DOI: 10.14232/ejqtde.2021.1.51.
- [14] Gasull A., Giacomini H., Torregrosa J. *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. Comput. Appl. Math. **200** (1), 448–457 (2007).
- [15] Giné J., Grau M. *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given, using Riccati equations*, Nonlinearity **19** (8), 1939–1950 (2006).
- [16] Odani K. *The Limit Cycle of the van der Pol Equation Is Not Algebraic*, J. Diff. Equat. **115** (1), 146–152 (1995).
- [17] Chavarriga J., Llibre J. *Invariant Algebraic Curves and Rational First Integrals for Planar Polynomial Vector Fields*, J. Diff. Equat. **169** (1), 1–16 (2001).

Саад Эддине Хамизи

Высшая национальная школа возобновляемых источников энергии, окружающей среды и устойчивого развития,

г. Батна, 05078, Алжир,

e-mail: se.hamizi@hns-re2sd.dz

Рашид Букуча

Университет Беджая,

г. Беджая, 06000, Алжир,

e-mail: rachid.boukoucha@univ-bejaia.dz

S.E. Hamizi and R. Boukoucha

Explicit formulas for two limit cycles of a family of planar differential systems

Abstract. In this work, we study a family of multi-parameter polynomial differential systems of degree eleven. We prove that the considered family has an invariant algebraic curve, which is given explicitly. Subsequently, we demonstrate the integrability of these systems and derive an explicit expression for a first integral. Moreover, we provide sufficient conditions for the systems to possess two explicitly given limit cycles. The applicability of our results is illustrated by a concrete example.

Keywords: limit cycle, Riccati equation, invariant algebraic curve, first integral.

Saad Eddine Hamizi

Higher National School of Renewable Energies, Environment and Sustainable Development,
Batna, 05078 Algeria,

e-mail: se.hamizi@hns-re2sd.dz

Rachid Boukoucha

*University of Bejaia,
Bejaia, 06000 Algeria,*

e-mail: rachid.boukoucha@univ-bejaia.dz