

Ш.Д. НОДИРОВ, М.Х. ФАЙЗРАХМАНОВ, З.К. ЩЕДРИКОВА

О БЕСКОНЕЧНЫХ ПРЯМЫХ СУММАХ МИНИМАЛЬНЫХ НУМЕРАЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ

Аннотация. В статье рассматриваются два подхода к определению вычислимости нумераций семейств всюду определенных функций. Рассматривается как классическое определение вычислимой нумерации семейства вычислимых функций, согласно которому по номеру функции в этой нумерации эффективно определяется ее геделевский номер, так и расширяющее предыдущее определение, основанное на равномерном применении понятия вычислимо перечислимого слева элемента бэровского пространства. Основной вопрос, исследуемый в статье, заключается в возможности порождения всех вычислимых нумераций семейства замыканием относительно сводимости бесконечных прямых сумм равномерных последовательностей его однозначных, позитивных и минимальных нумераций.

Ключевые слова: вычислимая нумерация, однозначная нумерация, позитивная нумерация, минимальная нумерация.

УДК: 510.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-4-38-52

ВВЕДЕНИЕ

В одной из ранних фундаментальных работ классической теории вычислимости Р. Фридберг [1] установил существование вычислимой нумерации без повторений семейства всех частично вычислимых (ч.в.) функций, т. е. он построил вычислимую функцию f такую, что каждая ч.в. функция входит в последовательность $\{\varphi_{f(x)}\}_{x \in \mathbb{N}}$ в точности один раз. *Нумерацией* произвольного множества S называется отображение ν множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на S . Конечно, каждый элемент множества S может иметь много номеров относительно этой нумерации ν , но если она инъективна, то ее называют *однозначной* или, принимая во внимание выше процитированный результат, *фридберговской* нумерацией. Такие нумерации играют важную роль, поскольку они определяют минимальные элементы относительно *сводимости* среди всех нумераций множества S (*сводимость* нумерации μ к нумерации ν имеет место, если существует вычислимая функция f , для которой $\mu = \nu \circ f$; в этом случае используется обозначение $\mu \leq \nu$). Таким образом, представляется естественным вопрос может ли каким-либо образом класс всех вычислимых нумераций семейства быть порожден его однозначными вычислимыми нумерациями. В [2] было доказано, что для геделевской нумерации $\gamma : x \mapsto \varphi_x$ семейства $\mathcal{P}_1$ всех ч.в. функций от одной переменной существует

Поступила в редакцию 05.03.2024, после доработки 05.03.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект 23-21-00181) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение 075-02-2023-944).

равномерно вычислимая последовательность $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (т. е. существует такая вычислимая функция g , что для всех n, x справедливо равенство $\mu_n(x) = \varphi_{g(n,x)}$) его однозначных нумераций, удовлетворяющая условию $\gamma \leq \bigoplus_n \mu_n$, где $\bigoplus_n \mu_n$ — бесконечная *прямая сумма* нумераций $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, определяемая равенствами

$$\left(\bigoplus_n \mu_n \right) (c(m, x)) = \mu_m(x)$$

для всех m, x . Поскольку к геделевской нумерации γ сводится любая вычислимая нумерация семейства $\mathcal{P}_1$, согласно этому результату класс всех вычислимых нумераций $\mathcal{P}_1$ порождается замыканием вниз относительно сводимости бесконечных прямых сумм равномерно вычислимых последовательностей его однозначных нумераций. В настоящей статье такая порождаемость однозначными и расширяющими образованный ими класс позитивными и минимальными нумерациями изучается для классов нумераций семейств всюду определенных вычислимых функций. Понятие вычислимости для этих семейств рассматривается с двух позиций. А именно используется как классический подход (см. [3], [4]) к определению вычислимой нумерации семейства вычислимых функций, согласно которому по номеру функции в этой нумерации эффективно определяется ее геделевский номер, так и расширяющий предыдущий подход, основанный на понятии вычислимо перечислимого слева элемента канторовского пространства (см. [5]–[7]), естественным образом продолженным до бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

В обозначениях и терминологии теории вычислимости мы придерживаемся монографии Р. Соара [8]. Через φ_e и W_e обозначаем ч.в. функцию и вычислимо перечислимое (в.п.) множество множество с геделевским номером e соответственно. Для частичной функции ψ ее область определения обозначается как $\text{dom } \psi$, а область ее значений — как $\text{ran } \psi$. Используем запись $\psi(x) \downarrow$, если $x \in \text{dom } \psi$, и $\psi(x) \uparrow$ в противном случае. Пусть $\bar{A} = \mathbb{N} \setminus A$ — дополнение множества $A \subseteq \mathbb{N}$. Через $c(x, y)$ обозначаем вычислимую биекцию $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$. Для любого набора $x_0, \dots, x_{n+2}$ по индукции определим $c(x_0, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) = c(x_0, \dots, x_n, c(x_{n+1}, x_{n+2}))$. Символом « $\Leftarrow$ » заменяем словосочетание «равное по определению».

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В обозначениях и терминологии теории нумераций мы придерживаемся монографии Ю.Л. Ершова [9] и его статьи [10]. Нумерация μ множества S называется *позитивной*, если ее *нумерационная эквивалентность*

$$\eta_\mu \Leftarrow \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \mu(x) = \mu(y) \}$$

позитивна (т. е. в.п.), и *минимальной*, если $\mu \leq \nu$ для любой нумерации $\nu \leq \mu$ множества S . Таким образом, каждая однозначная нумерация позитивна, а каждая позитивная минимальна (см. [9]). Будем говорить, что μ *сводится посредством вычислимой функции f к нумерации ν множества S* , если $\mu = \nu \circ f$. Нумерации μ и ν называются *эквивалентными*, если $\mu \leq \nu$ и $\nu \leq \mu$. Для нумераций $\nu_0, \dots, \nu_k$ множества S определим их *прямую сумму*, положив

$$(\nu_0 \oplus \dots \oplus \nu_k)((k+1)x + r) = \nu_r(x)$$

для всех x и всех $r \leq k$.

Следуя [3], [9], назовем нумерацию α непустого счетного семейства $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *вычислимой*, если существует вычислимая функция f такая, что $\varphi_{f(x)}$ всюду определена и $\alpha(x) = \varphi_{f(x)}$ для всех x .

Далее нам понадобится линейный порядок $\leq$ на множестве $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \cup \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, определенный следующим образом. Для его элементов f, g положим $f \leq g$, если выполняется одно из следующих условий:

- $f \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ (т.е. f — конечная строка над алфавитом $\mathbb{N}$) является префиксом $g \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \cup \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,
- существует x , для которого $f(x) < g(x)$ и $f(y) = g(y)$ для всех $y < x$,
- $f = g$.

Будем использовать запись $f \triangleleft g$, если $f \leq g$ и $f \neq g$. Элемент $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ назовем *вычислимо перечислимым слева* [5], если множество

$$\{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \sigma \triangleleft f\}$$

в. п. (здесь и далее мы отождествляем элементы $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ с натуральными числами при некотором их эффективном кодировании). Согласно [6], [7] нумерация ν непустого счетного семейства $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется *вычислимой слева*, если по каждому номеру x эффективно определяется геделевский номер в. п. множества, состоящего из всех строк $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, для которых $\sigma \triangleleft \nu(x)$, т.е. существует такая вычислимая функция f , что для всех x

$$W_{f(x)} = \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \sigma \triangleleft \nu(x)\}.$$

Семейство $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ назовем *вычислимым (слева)*, если оно обладает вычислимой (слева) нумерацией. Отметим также, что в [11], [12] был предложен альтернативный эквивалентный подход к определению понятия вычислимого слева семейства, основанный на обобщении понятия предельно монотонной функции.

Последовательность $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ нумераций семейства $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ называется *равномерно вычислимой (слева)*, если существует такая бинарная вычислимая функция f (такое в. п. множество W), что для всех n, x имеет место

$$\nu_n(x) = \varphi_{f(n,x)} \left(\left\{ \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : c(n, x, \sigma) \in W \right\} = \left\{ \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \sigma \triangleleft \nu_n(x) \right\} \right). \quad (1)$$

Назовем $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно вычислимой (слева) *посредством вычислимой функции f (в. п. множества W)*, если для всех n, x выполняется (1). Назовем эту последовательность *равномерно позитивной*, если существует такое в. п. множество W , что для всех n

$$\eta_{\nu_n} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : c(n, x, y) \in W\}. \quad (2)$$

Будем говорить, что она равномерно позитивна *посредством в. п. множества W* , если она удовлетворяет (2) для всех n . Наконец, скажем, что последовательность $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *равномерно минимальна*, если существует такая бинарная вычислимая функция f , что для всех e, n выполняется

$$\varphi_e \text{ всюду определена} \ \& \ \text{ran}(\nu_n \circ \varphi_e) = \mathcal{A} \Rightarrow \varphi_{f(e,n)} \text{ всюду определена} \ \&$$

$$\& \ \nu_n \leq (\nu_n \circ \varphi_e) \text{ посредством } \varphi_{f(e,n)}.$$

Пусть d — стандартная метрика на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, т.е. для любых различных $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ выполняется $d(f, g) = 2^{-x}$, где $f(x) \neq g(x)$ и $f(y) = g(y)$ для всех $y < x$. Расширим область ее определения до множества $(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \cup \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \cup \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. Для различных $f, g \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \cup \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ определим $d(f, g) = 2^{-x}$, если существует x , для которого либо $f(x) \neq g(x)$ и $f(y) = g(y)$ для всех $y < x$, либо один из аргументов является конечной строкой длины x , которая, в свою очередь, является префиксом другого аргумента.

Если замкнутое вниз относительно порядка $\trianglelefteq$ множество $U \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию

$$\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} [\forall \sigma \in U [\sigma \triangleleft f] \ \& \ \forall \varepsilon > 0 \exists \sigma \in U [d(\sigma, f) < \varepsilon]], \quad (3)$$

то участвующая в нем функция f определяется однозначно, поэтому будем обозначать ее как $\hat{U}$. Кроме того, имеет место равенство $U = \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \sigma \triangleleft f\}$.

2. ПРЯМЫЕ СУММЫ ОДНОЗНАЧНЫХ НУМЕРАЦИЙ

Все рассматриваемые в этом и последующих разделах вычислимы и вычислимы слева семейства являются подмножествами $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Покажем, что класс вычислимых нумераций любого бесконечного вычислимого семейства порождается бесконечными прямыми суммами равномерно вычислимых последовательностей его однозначных нумераций, но для конечных прямых сумм это не имеет места.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}$ — бесконечное вычислимое семейство всюду определенных вычислимых функций.

1) Для любой вычислимой нумерации α семейства $\mathcal{A}$ существует равномерно вычислимая последовательность его однозначных нумераций $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что $\alpha \leq \bigoplus_n \beta_n$.

2) Если $\mathcal{A}$ обладает двумя неэквивалентными вычислимыми нумерациями, то существует его вычислимая нумерация α такая, что $\alpha \not\leq \bigoplus_{n \leq k} \beta_n$ для любой конечной последовательности $\beta_0, \dots, \beta_k$ однозначных нумераций.

Доказательство. 1) Для каждого n определим $\beta_n(0) = \alpha(n)$, обеспечивая тем самым сводимость $\alpha \leq \bigoplus_n \beta_n$. Поскольку множество $\overline{\alpha^{-1}(\alpha(n))}$ в. п. равномерно по n и бесконечно, эффективно по n определяется геделевский номер вычислимой функции h такой, что

$$\overline{\alpha^{-1}(\alpha(n))} = \text{ran } h.$$

Значит, композиция $\alpha \circ h$ является равномерно по n негативной нумерацией бесконечного семейства $\mathcal{A} \setminus \{\alpha(n)\}$. Согласно [9] по в. п. индексу дополнения нумерационной эквивалентности любой негативной нумерации бесконечного множества можно эффективно определить геделевский номер вычислимой функции, сводящей к ней однозначную нумерацию того же множества. Пусть δ — однозначная нумерация, соответствующая таким образом нумерации $\alpha \circ h$. Определив для всех x

$$\beta_n(x+1) = \delta(x),$$

получим, что β_n является однозначной вычислимой нумерацией семейства $\mathcal{A}$.

2) Выберем вычислимые функции f и g такие, что отображение $\xi : x \mapsto \varphi_{f(x)}$ является нумерацией семейства $\mathcal{A}$, которая не сводится к его нумерации $\theta : x \mapsto \varphi_{g(x)}$. Определим его искомую нумерацию α . Для этого зафиксируем произвольный набор k, i, y и для всех m построим значения $\alpha(x_m)$, где

$$x_m = c(k, i, y, m).$$

Как будет установлено ниже, этим построением при подходящем y обеспечивается, что α не сводится ни к какой нумерации $\bigoplus_{n \leq k} \beta_n$ посредством φ_i при условии, что каждая из нумераций β_n , $n \leq k$, является однозначной. Приведем конструкцию построения значений $\alpha(x_m)$ для всех m .

Шаг 0. Для всех m полагаем $\alpha_0(x_m) = \emptyset$. На всех последующих шагах s будем обеспечивать, чтобы $\alpha_s(x_m) \subseteq \varphi_{f(y)}$.

Шаг $s + 1$. Если существуют различные числа $n_0 \leq s$ и $n_1 \leq s$ такие, что

$$\begin{aligned}\varphi_{i,s}(x_{n_0}) &= (k+1)a + r, \\ \varphi_{i,s}(x_{n_1}) &= (k+1)b + r\end{aligned}$$

для некоторого $r \leq k$, то при условии $a \neq b$ для всех $t > s$ и всех m полагаем

$$\alpha_t(x_m) = \varphi_{f(y)}$$

и прерываем построение. Поскольку $\alpha(x_{n_0}) = \alpha(x_{n_1})$ и $\varphi_i(x_{n_0}) \neq \varphi_i(x_{n_1})$, получаем, что для каждого набора нумераций $\beta_0, \dots, \beta_k$ либо β_r не однозначна, либо α не сводится к $\bigoplus_{n \leq k} \beta_n$ посредством φ_i . Если же $a = b$, то выберем число z_y такое, что $\varphi_{f(y),s} \subseteq \varphi_{g(z_y),u}$ для некоторого u , и определим

$$\begin{aligned}\alpha_t(x_{n_1}) &= \varphi_{g(z_y)}, \\ \alpha_t(x_l) &= \varphi_{f(y)}\end{aligned}$$

для всех $t > s$ и всех l , отличных от n_1 . После этого также прерываем построение. Если нужных n_0, n_1 не существует, то для всех m полагаем

$$\alpha_{s+1}(x_m) = \varphi_{f(y),s}$$

и переходим к следующему шагу.

В конце построения для всех m полагаем $\alpha(x_m) = \bigcup_s \alpha_s(x_m)$. Выберем произвольный набор однозначных нумераций $\beta_0, \dots, \beta_k$ и число i , для которого φ_i всюду определена. Покажем, что α не сводится к $\bigoplus_{n \leq k} \beta_n$ посредством φ_i методом от противного. Если $\alpha = (\bigoplus_{n \leq k} \beta_n) \circ \varphi_i$, то согласно построению для каждого y найдутся такие n_0 и n_1 , что

$$\xi(y) = \varphi_{f(y)} = \alpha(n_0) = \alpha(n_1) = \varphi_{g(z_y)} = \theta(z_y).$$

Отсюда $\xi \leq \theta$. Таким образом, приходим к противоречию с выбором этих нумераций. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Из только что доказанной теоремы немедленно вытекает

Следствие 1. Вычислимые нумерации семейств всюду определенных вычислимых функций порождаются прямыми суммами равномерно вычислимых последовательностей их положительных (минимальных) нумераций.

Из результатов работы [13] имеем, что любое вычислимое слева семейство без наибольшего относительно порядка $\leq$ элемента обладает однозначной вычислимой слева нумерацией. Покажем, что класс всех его вычислимых слева нумераций порождается бесконечными прямыми суммами равномерно вычислимых слева последовательностей его однозначных нумераций.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{B}$ — непустое семейство, не содержащее наибольшего относительно порядка $\leq$ элемента, и ν — его вычислимая слева нумерация. Тогда существует равномерно вычислимая слева последовательность $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ его однозначных нумераций такая, что $\nu \leq \bigoplus_n \mu_n$.

Доказательство. Сначала зафиксируем произвольное n и эффективно по нему определим вычислимую слева нумерацию θ семейства $\mathcal{B} \setminus \{\nu(n)\}$. Для этого построим равномерно в. п. последовательность $\{V_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ замкнутых вниз относительно порядка $\leq$ подмножеств $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию (3), после чего для каждого x положим

$$\theta(x) = \widehat{V}_x.$$

Для каждого y обозначим через U_y множество

$$U_y \Leftarrow \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \sigma \triangleleft \nu(y)\}.$$

Пусть $\{U_{y,s}\}_{y,s \in \mathbb{N}}$ — равномерно вычислимое перечисление всех U_y , $y \in \mathbb{N}$.

Шаг 0. Для каждого $x = c(m, y, u)$ положим $V_x^0 = U_y$.

Шаг $s + 1$. Если $U_{n,s+1} \neq \emptyset$, то для каждого $x = c(m, y, u) \leq s$ такого, что $V_{x,s+1}^s \neq \emptyset$ ($V_{x,s+1}^s = \bigcup_{z \leq y+t} U_{z,s+1}$, если на одном из предыдущих шагов выполнялось присваивание (5) и $t+1$ — последний такой шаг; в противном случае $V_{x,s+1}^s = U_{y,s+1}$), выполняем следующую последовательность действий:

i) обозначим через σ и σ_x наибольшие относительно порядка $\leq$ элементы множеств $U_{n,s+1}$ и $V_{x,s+1}^s$ соответственно;

ii) если ни на одном из предыдущих шагов не выполнялось присваивание (5) и справедливо неравенство

$$d(\sigma, \sigma_x) \leq 2^{-m}, \quad (4)$$

то определим

$$V_x^{s+1} = \bigcup_{z \leq y+s} U_z; \quad (5)$$

iii) если на одном из предыдущих шагов присваивание (5) выполнялось (обозначим через $t+1$ последний такой шаг) и справедливо неравенство

$$d(\sigma, \sigma_x) \leq 2^{-t}, \quad (6)$$

то также выполним присваивание (5). Этим завершается описание построения.

Для всех x полагаем $V_x = \bigcup_s V_x^s$. Покажем, что нумерация θ определена корректно.

Лемма 1. Для каждого x множество V_x удовлетворяет условию (3) и $\hat{V}_x \in \mathcal{B}$.

Доказательство. Непосредственно из построения следует, что для всех x и s выполняется включение $V_x^s \subseteq V_x^{s+1}$. Поскольку $\mathcal{B}$ не содержит наибольшего относительно порядка $\leq$ элемента, то с учетом выполнения проверок (6) в построении для каждого x присваивание (5) может выполняться лишь на конечном числе шагов. Стало быть, для каждого x существует такое p , что $V_x = U_p$. Этим завершается доказательство леммы. $\square$

Лемма 2. Для каждого x справедливо $V_x \neq U_n$.

Доказательство. Если для произвольно выбранного $x = c(m, y, u)$ ни на одном из шагов построения не выполняется неравенство (4), то имеет место неравенство $d(\hat{U}_n, \hat{V}_x) \geq 2^{-m}$. В противном случае ввиду отсутствия в $\mathcal{B}$ наибольшего относительно порядка $\leq$ элемента, присваиваний (5) и проверок (6) в построении существует такое t , что $d(\hat{U}_n, \hat{V}_x) \geq 2^{-t}$. Этим завершается доказательство леммы. $\square$

Лемма 3. Для каждого y такого, что $U_y \neq U_n$, существует x , для которого $V_x = U_y$.

Доказательство. Для произвольно выбранного y такого, что $U_y \neq U_n$, возьмем такие числа m и u , что на каждом шаге $s+1$, если $x = c(m, y, u) \leq s$, то неравенство (4) не имеет места. Тогда согласно построению $V_x = U_y$. Этим завершается доказательство леммы. $\square$

Из леммы 1 следует, что θ является вычислимой слева нумерацией подсемейства $\mathcal{B}$, в которой согласно леммам 2 и 3, соответственно, элемент $\nu(n)$ не имеет номера, но любой отличный от него элемент $\mathcal{B}$ номер имеет. Таким образом, нумерация θ является искомой.

Теперь определим равномерно вычислимую слева последовательность $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ однозначных нумераций $\mathcal{B}$ такую, что $\nu \leq \bigoplus_n \mu_n$. С этой целью эффективно по произвольно выбранному n зафиксируем вычислимую нумерацию θ семейства $\mathcal{B} \setminus \{\nu(n)\}$. В [13] было установлено (см. доказательство теоремы 7), что любую вычислимую слева нумерацию бесконечного семейства можно эффективно преобразовать в однозначную вычислимую слева нумерацию того же семейства. Преобразуем таким образом нумерацию θ в однозначную вычислимую слева нумерацию μ семейства $\mathcal{B} \setminus \{\nu(n)\}$. Полагаем $\mu_n(0) = \nu(n)$ и $\mu_n(x+1) = \mu(x)$ для всех x . Таким образом, по своему определению последовательность $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является искомой. $\square$

Следствие 2. Если $\mathcal{B}$ — непустое семейство, не содержащее наибольшего относительно порядка $\leq$ элемента, то его вычислимые нумерации порождаются прямыми суммами равномерно вычислимых слева последовательностей его позитивных (минимальных) нумераций.

Покажем, что в теореме 2 вычислимое слева семейство без наибольшего элемента, вообще говоря, нельзя заменить на произвольное семейство, обладающее однозначной вычислимой слева нумерацией.

Предложение. *Существует семейство, обладающее двумя неэквивалентными вычислимыми слева нумерациями и единственной с точностью до эквивалентности однозначной вычислимой слева нумерацией μ .*

Доказательство. Для каждого n определим функцию f_n , положив для всех x

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < n; \\ 1, & \text{если } x \geq n, \end{cases}$$

и покажем, что семейство

$$\mathcal{B} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$$

и его однозначная нумерация $\mu : n \mapsto f_n$ являются искомыми. Выберем произвольную однозначную вычислимую слева нумерацию ν семейства $\mathcal{B}$ и покажем, что $\nu \leq \mu$. Для каждого x выберем такое n , что $0^n 1 \triangleleft \nu(x)$ и, если $n > 0$, существуют попарно различные неравные x числа $y_0, \dots, y_{n-1}$ такие, что $0^m 1 \triangleleft \nu(y_m)$ для всех $m < n$. Поскольку ν однозначна, такое n единственное (обозначим его через $g(x)$), а также $\nu(x) = f_n$ и $\nu(y_m) = f_m$ для всех $m < n$. Отсюда следует, что функция g определена корректно и в силу вычислимости ν слева является вычислимой. Кроме того, по определению g имеет место $\nu(x) = f_{g(x)} = \mu(g(x))$. Значит, $\nu \leq \mu$. Поскольку $\mathcal{B}$ бесконечно и содержит наибольший элемент, согласно [14] оно обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных вычислимых слева (и позитивных) нумераций. Этим завершается доказательство предложения. $\square$

3. ПРЯМЫЕ СУММЫ ПОЗИТИВНЫХ НУМЕРАЦИЙ

В [15] было показано, что любое вычислимое слева семейство обладает бесконечным числом попарно неэквивалентных позитивных вычислимых слева нумераций. В следующей теореме устанавливается, что, несмотря на это, класс вычислимых слева нумераций бесконечного семейства может не порождаться прямыми суммами равномерно вычислимых слева равномерно позитивных последовательностей его нумераций.

Теорема 3. *Существует бесконечное семейство $\mathcal{B}$, содержащее наибольший относительно порядка $\leq$ элемент и обладающее вычислимой слева нумерацией ν такой, что $\nu \not\leq \bigoplus_n \mu_n$ для любой равномерно вычислимой слева и равномерно позитивной последовательности $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ его нумераций.*

Доказательство. Определим семейство $\mathcal{B}$, построив его вычислимую слева нумерацию ν , удовлетворяющую заключению теоремы. С этой целью для каждого x определим вычислимую неубывающую относительно порядка $\leq$ последовательность $\{g_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ элементов $2^{\mathbb{N}}$, а затем положим $\nu(x) = \lim_s g_s$. Тогда, определив в. п. множество

$$U = \left\{ \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \exists s \exists r [\sigma \leq g_s \upharpoonright r] \right\},$$

имеем $\nu(x) = \widehat{U}$. Таким образом, определив последовательность $\{g_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ эффективно по x , получим, что ν будет вычислимой слева.

Зафиксируем произвольно $x = c(e, i, j)$. Определим значение $\nu(x)$ таким образом, чтобы ν не сводилась к прямой сумме $\bigoplus_m \mu_m$ нумераций $\mathcal{B}$ посредством φ_e при условии, что φ_e всюду определена, последовательность $\{\mu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ равномерно вычислима слева посредством W_i и равномерно позитивна посредством W_j . Для каждого $t = 0, 1, 2, \dots$ определяем g_t как тождественно нулевую функцию до тех пор, пока не встретится первое $t > 0$, удовлетворяющее условию

$$\varphi_{e,t}(x) \downarrow \ \& \ \exists z \leq t \exists \sigma \in 2^{<\mathbb{N}} [c(n, z, \sigma) \in W_{i,t} \ \& \ \sigma \text{ содержит } 1], \quad (7)$$

где $\varphi_e(x) = c(n, y)$ для некоторого (единственного) y . Если такое t встретилось, то фиксируем наименьшее z , для которого

$$\exists \sigma \in 2^{<\mathbb{N}} [c(n, z, \sigma) \in W_{i,t} \ \& \ \sigma \text{ содержит } 1],$$

и начнем определять оставшиеся функции g_s , $s \geq t$, таким образом, чтобы выполнялось $\nu(x) \neq \widehat{V}_{n,y}$, где

$$V_{m,a} = \left\{ \sigma \in 2^{<\mathbb{N}} : c(m, a, \sigma) \in W_i \right\}, \quad m, a \in \mathbb{N},$$

при условии, что для всех m, a множество $V_{m,a}$ удовлетворяет условию (3) и

$$\{c(a, b) : c(n, a, b) \in W_j\} = \{c(a, b) : \widehat{V}_{n,a} = \widehat{V}_{n,b}\}.$$

Тогда получим, что ν не сводится к $\bigoplus_m \mu_m$ посредством φ_e , если последовательность нумераций $\{\mu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ семейства $\mathcal{B}$ равномерно вычислима слева посредством W_i и равномерно позитивна посредством W_j . Вернемся к определению функций g_s , $s \geq t$. Если

$$c(n, y, z) \in W_{j,s}, \quad (8)$$

то полагаем $g_s = g_{s-1}$. В противном случае выберем наибольшую относительно порядка $\leq$ строку $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$, для которой

$$c(n, z, \sigma) \in W_{i,s},$$

зафиксируем наибольшее m , для которого $\sigma(m) = 1$, и определим

$$g_s(l) = \begin{cases} \sigma(l), & \text{если } l < m; \\ 0, & \text{если } l = m; \\ 1, & \text{если } l > m. \end{cases}$$

Отметим, что поскольку существуют e и i , удовлетворяющие условию (7), $\mathcal{B}$ содержит функцию, отличную от тождественно нулевой. Кроме того, по определению функций g_s имеем, что любая отличная от тождественно нулевой функция семейства $\mathcal{B}$ принимает значение 1 на бесконечном множестве аргументов.

Выберем произвольную последовательность нумераций $\{\mu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ семейства $\mathcal{B}$, равномерно вычислимую слева посредством W_i и равномерно позитивную посредством W_j , а также

произвольное e . Покажем, что ν не сводится к $\bigoplus_m \mu_m$ посредством φ_e . Предположим обратное, эта сводимость имеет место. Выберем наименьшее t , удовлетворяющее условию (7), которое существует в силу выбора последовательности нумераций $\{\mu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ и чисел i, j, e . Если не существует s , удовлетворяющего (8), то согласно определению последовательности $\{g_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ имеем

$$\widehat{V}_{n,y} = \nu(\varphi_e(x)) = \lim_s g_s = \widehat{V}_{n,z},$$

где $x = c(e, i, j)$, что невозможно в силу равномерной позитивности $\{\mu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ посредством W_j . Если s , удовлетворяющее (8), существует, то согласно определению последовательности $\{g_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ имеем

$$\widehat{V}_{n,y} = \nu(\varphi_e(x)) = \lim_s g_s \neq \widehat{V}_{n,z},$$

что снова невозможно в силу равномерной позитивности $\{\mu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ посредством W_j . Полученными противоречиями завершается доказательство теоремы. $\square$

Покажем, что классы вычислимых слева нумераций нетривиальных (содержащих по крайней мере два различных элемента) семейств не порождаются конечными прямыми суммами вычислимых слева позитивных нумераций.

Теорема 4. *Любое нетривиальное вычислимое слева семейство $\mathcal{B}$ обладает вычислимой слева нумерацией ν такой, что $\nu \not\leq \bigoplus_{n \leq k} \mu_n$ для любой конечной последовательности $\mu_0, \dots, \mu_k$ его позитивных вычислимых слева нумераций.*

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathcal{B}$ и $f \triangleleft g$. Определим вычислимую слева нумерацию ν семейства $\{f, g\}$, удовлетворяющую заключению теоремы. Тогда для любой вычислимой слева нумерации μ семейства $\mathcal{B}$ его нумерация $\mu \oplus \nu$ также будет удовлетворять заключению теоремы.

Зафиксируем произвольный набор $k, e_0, \dots, e_k, i$ и для всех m определим значения $\nu(x_m)$, где $x_m = c(k, c(e_0, \dots, e_k), i, m)$ (полагаем $c(e_0) = e_0$).

Шаг 0. Для всех m полагаем $\nu_0(x_m) = f$.

Шаг $s + 1$. Если существуют различные числа $n_0, n_1 \leq s$ такие, что

$$\varphi_{i,s}(x_{n_0}) = (k+1)a + r, \quad (9)$$

$$\varphi_{i,s}(x_{n_1}) = (k+1)b + r, \quad (10)$$

$$c(a, b) \in W_{e_r, s} \quad (11)$$

для некоторых $r \leq k$ и a, b , то полагаем

$$\nu_t(x_{n_1}) = g,$$

$$\nu_t(x_m) = \nu_s(x_m) = f$$

для всех $t > s$ и $m \neq n_1$ и завершаем построение. В противном случае для всех m полагаем $\nu_{s+1}(x_m) = \nu_s(x_m)$ и переходим к следующему шагу.

Из построения следует, что (с учетом $f \triangleleft g$) нумерация ν , определенная для всех x равенством $\nu(x) = \lim_t \nu_t(x) \in \{f, g\}$, вычислима слева. Выберем произвольный набор $\mu_0, \dots, \mu_k$ позитивных нумераций и покажем, что $\nu \not\leq \bigoplus_{n \leq k} \mu_n$. Для этого возьмем числа $e_0, \dots, e_k$, для которых

$$\eta_{\mu_n} = \{\langle a, b \rangle : c(a, b) \in W_{e_n}\}$$

для всех $n \leq k$. Предположим обратное, $\nu \leq \bigoplus_{n \leq k} \mu_n$ посредством φ_i . Тогда существуют числа s, n_0, n_1 ($n_0 \neq n_1$), a, b и $r \leq k$, удовлетворяющие условиям (9)–(11). Стало быть,

$$\nu(x_{n_0}) = f \neq g = \nu(x_{n_1}),$$

но

$$\mu_r(a) = \mu_r(b).$$

Таким образом, приходим к противоречию со сводимостью $\nu \leq \bigoplus_{n \leq k} \mu_n$ посредством φ_i . $\square$

4. ПРЯМЫЕ СУММЫ МИНИМАЛЬНЫХ НУМЕРАЦИЙ

В настоящем разделе доказывается, что класс вычислимых слева нумераций любого бесконечного семейства порождается бесконечными прямыми суммами равномерно вычислимых слева и равномерно минимальных последовательностей его нумераций.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{B}$ — бесконечное вычислимое слева семейство. Тогда для любой его вычислимой слева нумерации ν существует равномерно вычислимая слева и равномерно минимальная последовательность $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ его нумераций такая, что $\nu \leq \bigoplus_n \mu_n$.

Доказательство. Если $\mathcal{B}$ не содержит наибольшего относительно порядка $\leq$ элемента, то заключение теоремы следует из теоремы 2. Поэтому будем считать, что $\mathcal{B}$ содержит наибольший элемент h . Поскольку семейство

$$\left\{ \left\{ \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \sigma \triangleleft g \right\} : g \in \mathcal{B} \right\}$$

содержит наибольший по включению элемент, согласно [14] $\mathcal{B}$ обладает позитивной вычислимой слева нумерацией α , в которой каждый отличный от h элемент имеет единственный номер. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha(0) = h$.

Зафиксируем равномерно в. п. последовательности $\{U_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ и $\{Z_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ замкнутых вниз относительно порядка $\leq$ подмножеств $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ такие, что для всех x

$$\alpha(x) = \widehat{U}_x; \quad \nu(x) = \widehat{Z}_x.$$

Пусть $\{U_{x,s}\}$ и $\{Z_{x,s}\}$ — равномерно вычислимые перечисления, соответственно, всех U_y и Z_y , $y \in \mathbb{N}$, состоящие из конечных множеств, и $\{\eta_\alpha^s\}_{s \in \mathbb{N}}$ — вычислимое перечисление нумерационной эквивалентности η_α нумерации α . Эффективно по произвольно выбранному n определим вычислимую слева нумерацию μ семейства $\mathcal{B}$, а затем положим $\mu_n = \mu$. Для этого эффективно по n построим равномерно в. п. последовательность $\{V_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ замкнутых вниз относительно порядка $\leq$ подмножеств $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, удовлетворяющих (3), после чего для всех x положим $\mu(x) = \widehat{V}_x$. Также эффективно по n будем строить позитивную эквивалентность η такую, что для всех x, y выполняется

$$\langle x, y \rangle \in \eta \Rightarrow \mu(x) = \mu(y) \quad (12)$$

и для всех e если φ_e всюду определена и $\text{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \mathcal{B}$, то для любого x существует y , для которого

$$\langle x, \varphi_e(y) \rangle \in \eta. \quad (13)$$

Тогда μ будет минимальной, поскольку если $\text{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \mathcal{B}$, то для каждого x сможем эффективно найти y , удовлетворяющее (13).

Построение $\{V_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ и η .

Шаг 0. Для всех t полагаем $V_{c(0,t),0} = Z_n$ и $V_{c(1,t),0} = U_0$. Таким образом, будем иметь $\mu(c(0,0)) = \nu(n)$ и $\mu(c(1,0)) = \alpha(0)$. Для всех $x > 1$ и t определим $V_{c(x,t),0} = \emptyset$. Полагаем

$$\eta_0 = \{\langle x, x \rangle : x \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle c(i, q), c(i, t) \rangle : q, t \in \mathbb{N}, i = 0, 1\}.$$

Шаг $s + 1 = 3c(x, t, u) + 1$ (на шагах этого типа будем выполнять условие $\exists p [\mu(c(x, p)) = \alpha(x - 1)]$, если $x > 1$, $\alpha(x - 1) \neq \alpha(0)$ и $\alpha(x - 1) \neq \nu(n)$). Если $x > 1$ и $\langle c(x, t), c(i, 0) \rangle \notin \eta_s$, где $i = 0, 1$, то при условии $\langle 0, x - 1 \rangle \notin \eta_\alpha^s$ полагаем

$$V_{c(x, t), s+1} = V_{c(x, q), s} \cup U_{x-1, s} \quad (14)$$

для всех q , удовлетворяющих условию $\langle c(x, t), c(x, q) \rangle \in \eta_s$, и η_{s+1} равным отношению эквивалентности, порожденному бинарным отношением

$$\eta_s \cup \{\langle c(x, t), c(x, p) \rangle : \langle c(x, p), c(i, 0) \rangle \notin \eta_s, p \leq t, i = 0, 1\};$$

если же $\langle 0, x - 1 \rangle \in \eta_\alpha^s$, то полагаем

$$V_{c(x, q), s+1} = U_0 \quad (15)$$

для всех q , удовлетворяющих условию $\langle c(i, 0), c(x, q) \rangle \notin \eta_s$, где $i = 0, 1$, и η_{s+1} равным отношению эквивалентности, порожденному бинарным отношением

$$\eta_s \cup \{\langle c(x, q), c(1, 0) \rangle : \langle c(i, 0), c(x, q) \rangle \notin \eta_s, q \in \mathbb{N}, i = 0, 1\}.$$

Шаг $s + 1 = 3c(x, t, u) + 2$ (выполняем $\langle c(x, t), c(i, 0) \rangle \in \eta$ и $\mu(c(x, t)) = \mu(c(i, 0))$ для одного из $i = 0, 1$, если $x > 0$ и $\alpha(x - 1) = \nu(n)$). Если

$$Z_{n, s} \neq \emptyset \& V_{c(x, t), s} \neq \emptyset \& \langle c(x, t), c(i, 0) \rangle \notin \eta_s,$$

где $i = 0, 1$, то выберем наибольшие относительно порядка $\leq$ строки $\sigma_0 \in Z_{n, s}$, $\sigma_1 \in V_{c(x, t), s}$ (на всех шагах v построения для всех z обеспечивается конечность множества $V_{z, v}$ при выполнении условия $\langle z, c(i, 0) \rangle \notin \eta_v$, где $i = 0, 1$). Если

$$d(\sigma_0, \sigma_1) < 2^{-t},$$

то полагаем

$$V_{c(x, q), s+1} = \begin{cases} U_0, & \text{если } \sigma_0 \triangleleft \sigma_1; \\ Z_n, & \text{если } \sigma_1 \leq \sigma_0, \end{cases} \quad (16)$$

для всех q , удовлетворяющих условию $\langle c(x, t), c(x, q) \rangle \in \eta_s$, и η_{s+1} равным отношению эквивалентности, порожденному бинарным отношением

$$\eta_s \cup \{\langle c(x, t), c(i, 0) \rangle\}, \quad (17)$$

где $i = 0$ при $\sigma_1 \leq \sigma_0$ и $i = 1$ при $\sigma_0 \triangleleft \sigma_1$.

Шаг $s + 1 = 3c(i, e, u) + 3$ (выполняем $\exists z [\langle c(i, 0), \varphi_e(z) \rangle \in \eta]$, если φ_e всюду определена, $\text{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \mathcal{B}$ и $i = 0, 1$). Если $i = 0, 1$ и не существует y такого, что

$$\langle c(i, 0), \varphi_{e, s}(y) \downarrow \rangle \in \eta_s, \quad (18)$$

и существуют x, t , удовлетворяющие условиям

- а) $\langle c(x, t), c(j, 0) \rangle \notin \eta_s$, где $j = 0, 1$,
- б) $x > e$ и $c(x, t) \in \text{ran} \varphi_{e, s}$,
- в) если $i = 0$, то $\sigma_1 \leq \sigma_0$, где σ_0 и σ_1 — наибольшие относительно порядка $\leq$ строки $\sigma_0 \in Z_{n, s}$, $\sigma_1 \in V_{c(x, t), s}$,

то полагаем

$$V_{c(x,q),s+1} = \begin{cases} Z_n, & \text{если } i = 0; \\ U_0, & \text{если } i = 1, \end{cases} \quad (19)$$

для всех q , удовлетворяющих условию $\langle c(x,t), c(x,q) \rangle \in \eta_s$, и η_{s+1} равным отношению эквивалентности, порожденному бинарным отношением

$$\eta_s \cup \{\langle c(i,0), c(x,t) \rangle\}.$$

В конце построения полагаем $V_x = \bigcup_s V_{x,s}$ для всех x и $\eta = \bigcup_s \eta_s$.

Непосредственно из построения следует, что для каждого x либо $V_x = Z_n$, либо $V_x = U_y$ для некоторого y . Стало быть, V_x удовлетворяет (3) для всех x . Также непосредственно из построения получаем, что эквивалентность η позитивна и для всех x, y удовлетворяет условию (12). Далее нам понадобится

Лемма 1. *Для любого $x > 1$, если $\alpha(x-1) \neq \nu(n)$, существует t , для которого $\mu(c(x,t)) = \alpha(x-1)$.*

Доказательство. Пусть $x > 1$ и $\alpha(x-1) \neq \nu(n)$. В силу проверок (18) и « $x > e$ » в b) для всех y и для всех достаточно больших q действие (19) не выполняется ни на одном шаге. Поскольку $\alpha(x-1) \neq \nu(n)$, в силу действий (14) и (15) построения для всех достаточно больших t и s имеет место неравенство $d(\sigma_0, \sigma_1) \geq 2^{-t}$, где σ_0 и σ_1 — наибольшие относительно порядка $\trianglelefteq$ элементы множеств $Z_{n,s}$ и $V_{c(x,t),s}$ соответственно. Таким образом, найдется t , для которого $\mu(c(x,t)) = \alpha(x-1)$. $\square$

Поскольку $\mu(c(0,0)) = \nu(n)$, имеем $\text{ran } \mu = \mathcal{B}$.

Лемма 2. *Для всех e если φ_e всюду определена и $\text{ran } (\mu \circ \varphi_e) = \mathcal{B}$, то для любого x существует y , удовлетворяющее условию (13).*

Доказательство. Пусть φ_e всюду определена и $\text{ran } (\mu \circ \varphi_e) = \mathcal{B}$. Сначала докажем, что существует y , для которого $\langle c(1,0), \varphi_e(y) \rangle \in \eta$. Поскольку $\mathcal{B}$ бесконечно, согласно лемме 1 существуют $x > e$ и t , для которых

$$\mu(c(x,t)) = \alpha(x-1) \notin \{\nu(n), \alpha(0)\} = \{\mu(c(0,0)), \mu(c(1,0))\}$$

и $c(x,t) \in \text{ran } \varphi_e$. Таким образом, существует шаг $s+1$, на котором для некоторых x и t выполняются условия а), б) и выполняются присваивания (19). Отсюда следует, что существует y , для которого

$$\langle c(1,0), \varphi_e(y) \rangle \in \eta.$$

Если $\nu(n) = \alpha(0)$, то аналогичные рассуждения приводят к существованию y , для которого

$$\langle c(0,0), \varphi_e(y) \rangle \in \eta.$$

Пусть $\nu(n) \neq \alpha(0)$. Покажем, что существует y , для которого $\langle c(0,0), \varphi_e(y) \rangle \in \eta$. Зафиксируем $x > 1$ такое, что $\nu(n) = \alpha(x-1)$. Действия (16) обеспечивают, что для всех x, t либо

$$\mu(c(x,t)) = \nu(n)$$

(в этом случае $\langle c(0,0), c(x,t) \rangle \in \eta$), либо

$$\mu(c(x,t)) = \alpha(0)$$

(в этом случае $\langle c(1,0), c(x,t) \rangle \in \eta$). Поскольку

$$\alpha(x-1) \neq \alpha(0)$$

и каждый элемент $\mathcal{B}$, кроме $\alpha(0)$, имеет единственный номер в нумерации α , для всех $z \neq x - 1$ имеет место неравенство

$$\alpha(z) \neq \alpha(x - 1).$$

Отсюда согласно построению для всех $z \neq x - 1$ и всех t если

$$\langle c(z + 1, t), c(0, 0) \rangle \notin \eta,$$

то либо $\mu(c(z + 1, t)) = \alpha(0)$, либо $\mu(c(z + 1, t)) = \alpha(z)$. Таким образом, $\mu(c(z + 1, t)) \neq \nu(n)$. Значит, любой y , для которого $\mu(\varphi_e(y)) = \nu(n)$, удовлетворяет условию

$$\langle c(0, 0), \varphi_e(y) \rangle \in \eta.$$

Осталось проверить, что для произвольных $x > 0$ и t если $\alpha(x - 1) \notin \{\alpha(0), \nu(n)\}$ и $\langle c(x, t), c(i, 0) \rangle \notin \eta$, $i = 0, 1$, то существует y , для которого

$$\langle c(x, t), \varphi_e(y) \rangle \in \eta.$$

Действительно, согласно построению имеем, что для всех q либо $\langle c(x, q), c(i, 0) \rangle \in \eta$ для одного из $i = 0, 1$, либо $\mu(c(x, t)) = \mu(c(x, q))$ и $\langle c(x, t), c(x, q) \rangle \in \eta$. Кроме того,

$$\mu(z) \neq \mu(c(x, t))$$

для всех таких z , что $\langle z, c(x, t) \rangle \notin \eta$. Поскольку $\text{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \mathcal{B}$, существуют y и q , для которых

$$\varphi_e(y) = c(x, q), \quad \langle c(x, t), c(x, q) \rangle \in \eta.$$

Отсюда следует, что существует y такое, что $\langle c(x, t), \varphi_e(y) \rangle \in \eta$. □

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что $\nu \leq \bigoplus_n \mu_n$ посредством вычислимой функции $n \mapsto c(n, c(0, 0))$. □

Заметим, что построенная в доказательстве последней теоремы равномерно вычислимая слева и равномерно минимальная последовательность может не быть равномерно позитивной. Остается нерешенным вопрос существует ли нетривиальное вычислимое слева семейство $\mathcal{B}$, у которого класс вычислимых слева нумераций порождается конечными прямыми суммами его минимальных вычислимых слева нумераций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Friedberg R. *Three theorems on recursive enumeration*, J. Symb. Log. **23** (3), 309–316 (1958).
- [2] Schinzel B. *On decomposition of Gödelnumberings into Friedbergnumberings*, J. Symb. Log. **47** (2), 267–274 (1982).
- [3] Ершов Ю.Л. *Нумерации семейств общерекурсивных функций*, Сиб. матем. журн. **8** (5), 1015–1025 (1967).
- [4] Марченков С.С. *О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций*, Алгебра и логика **11** (5), 588–607 (1972).
- [5] Downey R.G., Hirschfeldt D.R. *Algorithmic Randomness and Complexity*, Theory Appl. Comput. (Springer, New York, 2010).
- [6] Kjos-Hanssen B., Stephan F., Teutsch J. *Arithmetic complexity via effective names for random sequences*, ACM Trans. Comput. Log. **13** (3), 1–18 (2012).
- [7] Stephan F., Teutsch J. *Things that can be made into themselves*, Information and Computation **237**, 174–186 (2014).
- [8] Soare R.I. *Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets* (Perspect. Math. Log., Omega Series), Springer-Verlag, Berlin etc., 1987.
- [9] Ершов Ю.Л. *Теория нумераций* (Наука, М., 1977).
- [10] Ershov Yu.L. *Theory of numberings*, in: Handbook of Computability Theory, **140**, Stud. Logic Found. Math., ed. by Griffor E.R. (Elsevier, Amsterdam, 1999).

- [11] Brodhead P., Kjos-Hanssen B., Numberings and randomness, in: Mathematical Theory and Computational practice. CiE 2009, V. 5635, Lecture Notes in Computer Science ed. by K. Ambos-Spies, B. Löwe, W. Merkle (Springer, Berlin, Heidelberg, 2009).
- [12] Faizrahmanov M., Kalimullin I. *Limitwise monotonic sets of reals*, Math. Log. Quart. **61** (3), 224–229 (2015).
- [13] Herbert I., Jain S., Mustafa M., Lempp S., Stephan F. *Reductions between types of numbering*, Ann. Pure. App. Log. **170** (12), 102716 (2019).
- [14] Бадаев С.А. *О позитивных нумерациях*, Сиб. матем. журн. **18** (3), 483–496 (1977).
- [15] Faizrahmanov M., Shchedrikova Z. *Effectively infinite classes of numberings and computable families of reals*, Comput. **12** (4), 339–350 (2023).

Шохрух Дилмуродович Нодиров

Каршинский государственный университет,

ул. Кучабог, д. 17, г. Карши, 180100, Республика Узбекистан,

e-mail: shoh0809@mail.ru

Марат Хайдарович Файзрахманов

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Злата Константиновна Щедрикова

Университет Иннополис,

ул. Университетская, д. 1, г. Иннополис, 420500, Россия,

e-mail: zлата.shchedrikova@yandex.ru

Sh.D. Nodirov, M.Kh. Faizrahmanov, and Z.K. Shchedrikova

On infinite direct sums of minimal numberings of functional families

Abstract. The paper discusses two approaches to defining the computability of numberings of families of total functions. We consider both the classical definition of computable numbering of a family of computable functions, according to which the number of a function in this numbering effectively provides its Gödel number, and, expanding the previous one, a definition based on the uniform application of the concept of the left-c.e. element of Baire space. The main question studied in the paper is the possibility of generating all computable numberings of a family by the closure with respect to the reducibility of infinite direct sums of uniform sequences of its single-valued, positive, and minimal numberings.

Keywords: computable numbering, single-valued numbering, positive numbering, minimal numbering.

Shohruh Dilmurodovich Nodirov

Karshi State University,

17 Kuchabog str., Karshi, 180100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: shoh0809@mail.ru

Marat Khaidarovich Faizrahmanov

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

Zlata Konstantinovna Shchedrikova

Innopolis University,

1 Universitetskaya str., Innopolis, 420500, Russia,

e-mail: zlata.shchedrikova@yandex.ru