

А.Х. ХАЧАТРЯН, Х.А. ХАЧАТРЯН, А.С. ПЕТРОСЯН

О КОНСТРУКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНОВСКОГО ТИПА НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

Аннотация. Работа посвящена конструктивному решению и изучению некоторых качественных свойств решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с некомпактным и монотонным оператором гаммерштейновского типа. Указанный класс уравнений имеет приложения в различных направлениях физики и эпидемиологии. В частности, при определенных представлениях соответствующего ядра и нелинейности такие уравнения возникают в теории p -адических струн, в кинетической теории газов и в математической теории распространения эпидемических заболеваний в рамках различных моделей. При определенных ограничениях на ядро и на нелинейность уравнения доказывается конструктивная теорема существования непрерывного положительного и ограниченного решения, имеющего одинаковый конечный предел на $\pm\infty$. Более того, получается оценка для разности соответствующих соседних последовательных приближений, из которой следует, что эти приближения со скоростью убывания геометрической прогрессии равномерно сходятся к непрерывному и ограниченному решению изучаемого уравнения. При дополнительном ограничении на ядро доказывается также, что разность между решением и его предельным значением на $\pm\infty$ из себя представляет суммируемую функцию на всей числовой прямой. Единственность решения в классе неотрицательных нетривиальных непрерывных и ограниченных функций получается из ранее известных результатов авторов настоящей работы. В конце работы приводятся численные расчеты для некоторых модельных примеров ядра и нелинейности.

Ключевые слова: ядро, нелинейность, вогнутость, монотонность, последовательные приближения, сходимост, ограниченное решение.

УДК: 517.968

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-3-89-106

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейновского типа на всей прямой:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)G(f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

Поступила в редакцию 08.02.2024, после доработки 21.02.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

Благодарности. Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

относительно искомой непрерывной неотрицательной и ограниченной на множестве $\mathbb{R}$ функции $f(x)$. В уравнении (1) ядро K определено на множестве $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и обладает следующими свойствами:

- 1) $K(x, t) = K(t, x) > 0$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $K \in C(\mathbb{R}^2)$, $\gamma(x) := \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dt \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$,
 $1 - \gamma \in L_1^0(\mathbb{R})$, где $L_1^0(\mathbb{R})$ — пространство суммируемых (по Лебегу) функций на множестве $\mathbb{R}$, имеющих нулевой предел на $\pm\infty$;
- 2) для любой неотрицательной функции $\rho \in L_\infty^0(\mathbb{R})$ функция

$$\chi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \rho(t) dt$$

стремится к нулю на $\pm\infty$, где $L_\infty^0(\mathbb{R})$ — пространство измеримых и существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}$, имеющих нулевой предел на $\pm\infty$.

Нелинейность G удовлетворяет следующим основным условиям:

- I. $G \in C(\mathbb{R}^+)$, $G(0) = 0$, функция $G(u)$ монотонно возрастает на множестве $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ и существует число $\eta > 0$ такое, что $G(\eta) = \eta$;
- II. функция $G(u)$ вогнута на множестве $\mathbb{R}^+$.

Уравнение (1), кроме чисто математического интереса, имеет интерес также во многих направлениях физики, биологии и эконометрики. В частности, при различных представлениях функций K и G , уравнение (1) встречается в динамической теории p -адической открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в кинетической теории газов (при решении нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках различных нелинейных моделей), в теории переноса излучения в неоднородных средах, в математической теории распространения эпидемических заболеваний в рамках обычных и модифицированных моделей Аткинсона–Ройтера и Дикмана–Капера и в теории распределения национального дохода в однопродуктовой экономике в рамках модифицированной модели Дж. Саргана (см. [1]–[12] и ссылки в них).

Интерес к исследованию уравнений типа (1) начал развиваться после работ [8]–[10], имеющих прямое приложение в математической эпидемиологии. В этих работах предполагалось, что ядро K зависит от разности своих аргументов, имеет экспоненциальное поведение, обладает свойством консервативности, при этом первый момент ядра K ненулевой, а нелинейность G , кроме условий I, II, удовлетворяет достаточно жестким ограничениям. В дальнейшем, в связи с бурным развитием p -адической математической физики, возник интерес к проведению исследований для такого частного случая уравнения (1), когда

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-t)^2}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

$$G^{-1}(u) = u^p, \quad u \in \mathbb{R}, \quad p > 2 — \text{нечетное число}, \quad (3)$$

где G^{-1} — обратная функция к функции G на $\mathbb{R}$. В частности, в работах [2]–[4] исследованы вопросы существования и асимптотического поведения на $\pm\infty$ ограниченного непрерывного знакопеременного и нечетного решения уравнения (1) с ядром (2) и нелинейностью вида (3). В случае, когда ядро K зависит от разности своих аргументов, является общей четной и суммируемой функцией, удовлетворяющей условию консервативности, а нелинейность G удовлетворяет условиям I, II и является нечетной функцией, вопросы существования и единственности непрерывного нечетного монотонно возрастающего и ограниченного решения

уравнения (1) обсуждались в работах [13]–[17]. В этих работах проведен также подробный анализ качественных свойств (асимптотическое поведение на $\pm\infty$, гладкость, вогнутость для положительных аргументов, интегральная асимптотика и т.д.) построенного решения. Полученные результаты распространены на соответствующий дискретный аналог рассматриваемого нелинейного интегрального уравнения (см. [18], [19]).

В настоящей работе будем заниматься вопросами существования, единственности и отсутствия неотрицательного нетривиального и ограниченного на $\mathbb{R}$ решения уравнения (1) в следующих двух случаях:

- А) $\gamma(x) \neq 1$;
- В) $\gamma(x) \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

Будем исследовать также асимптотическое поведение построенного решения на $\pm\infty$ при более сильном ограничении (по сравнению с условием 2)) на ядро K . При дополнительном условии на функцию G получим оценку для разности соседних элементов в последовательных приближениях

$$f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) G(f_n(t)) dt, \quad f_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

из которого будет следовать, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ со скоростью убывания геометрической прогрессии равномерно на $\mathbb{R}$ сходится к непрерывному решению уравнения (1). Далее будет доказано, что для любого неотрицательного непрерывного и ограниченного решения f имеет место включение

$$G(f) - f \in L_1(\mathbb{R}). \quad (5)$$

Важно отметить, что единственность построенного решения в классе неотрицательных нетривиальных непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций следует из теоремы единственности роллингового решения [20] и из суммируемости функции $G(f(x)) - f(x)$ (см. (5)). Для случая $\gamma(x) \equiv 1$ с использованием включения (5) и результатов работ [17], [20] устанавливается, что уравнение (1) в классе неотрицательных непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций обладает только тривиальными решениями $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv \eta$. В конце работы рассматриваются модельные примеры ядра K и нелинейности G и приводятся численные расчеты для построения приближенного решения уравнения (1). Некоторые из этих примеров имеют прикладное значение в вышеуказанных направлениях математической биологии. Для некоторых примеров проводится подробная проверка соответствующих условий доказанных результатов.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Пусть $\varphi(\sigma)$ — определенная на отрезке $[0, 1]$ функция, обладающая следующими свойствами:

- а) $\varphi \in C[0, 1]$, $\varphi(\sigma) \uparrow$ на отрезке $[0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$;
- б) функция $\varphi(\sigma)$ вогнута на отрезке $[0, 1]$.

Лемма 1. При условиях а), б) последовательность непрерывных функций $\{F_n(\sigma)\}_{n=1}^{\infty}$, $F_n(\sigma) := \underbrace{\varphi(\varphi(\varphi \dots \varphi(\sigma)))}_{n \text{ раз}}$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$ равномерно стремится к единице при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(1, 1)$ и $(\varepsilon, \varphi(\varepsilon))$: $y = k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon$, где $k_\varepsilon = \frac{1 - \varphi(\varepsilon)}{1 - \varepsilon}$. Из условий а), б) сразу следует, что (см. рис. 1)

- j₁) $k_\varepsilon \in (0, 1)$;
- j₂) $\varphi(\sigma) \geq k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon, \sigma \in [\varepsilon, 1]$;
- j₃) $F_n(\sigma) \leq 1, \sigma \in [0, 1], n = 1, 2, \dots$.

Так как при $\sigma \in [\varepsilon, 1]$ число $k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon \in [\varepsilon, 1] \subset [0, 1]$, то в силу а), б) из j₂) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} F_2(\sigma) = \varphi(\varphi(\sigma)) &\geq \varphi(k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon) \geq k_\varepsilon(k_\varepsilon \sigma + 1 - k_\varepsilon) + 1 - k_\varepsilon = \\ &= k_\varepsilon^2 \sigma + (1 - k_\varepsilon)(1 + k_\varepsilon), \quad \sigma \in [\varepsilon, 1]. \end{aligned}$$

Снова используя условия а), б), оценку j₂), из последнего неравенства имеем

$$\begin{aligned} F_3(\sigma) = \varphi(\varphi(\varphi(\sigma))) &\geq \varphi(k_\varepsilon^2 \sigma + (1 - k_\varepsilon)(1 + k_\varepsilon)) \geq \\ &\geq k_\varepsilon(k_\varepsilon^2 \sigma + (1 - k_\varepsilon)(1 + k_\varepsilon)) + 1 - k_\varepsilon = k_\varepsilon^3 \sigma + 1 - k_\varepsilon^3, \quad \sigma \in [\varepsilon, 1]. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, на n -м шаге получим

$$j_4) \quad F_n(\sigma) \geq k_\varepsilon^n \sigma + 1 - k_\varepsilon^n, \quad \sigma \in [\varepsilon, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание j₃), j₄), будем иметь

$$0 \leq 1 - F_n(\sigma) \leq k_\varepsilon^n(1 - \sigma), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sigma \in [\varepsilon, 1]. \quad (6)$$

Из (6) в силу j₁) приходим к завершению доказательства. $\square$

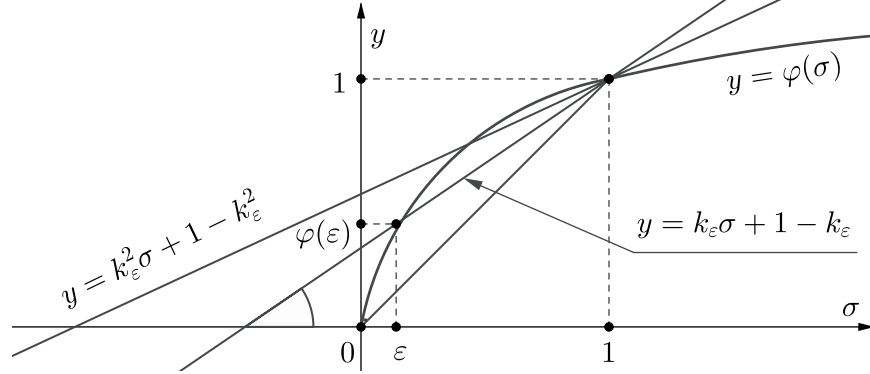


Рис. 1

Замечание 1. В ходе доказательства леммы 1 мы не только показали равномерную сходимость последовательности функций $F_n(\sigma)$, но и получили двустороннюю оценку (6).

Совершая аналогичные рассуждения как при доказательстве леммы 2 из работы [17], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. При условиях 1), I, II любое неотрицательное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$f(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ниже приведем одно условие на ядро $K(x, t)$, из которого будет следовать не только выполнение условия 2), но и важные априорные оценки для интеграла ядра K .

Лемма 3. Пусть существуют функции $\{T_j(x)\}_{j=1}^N, \{W_j(\tau)\}_{j=1}^N, \{\lambda_j(\tau)\}_{j=1}^N, \{\mu_j(\tau)\}_{j=1}^N$ со свойствами

$$p_1) \quad T_j(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad T_j \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| T_j(x) dx < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$p_2) \quad W_j(\tau) \geq 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad W_j \in L_1^0(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^{\infty} \tau W_j(\tau) d\tau < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$p_3) \quad \lambda_j(\tau) \geq 1, \quad \mu_j(\tau) \geq 1, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_j - 1 \in L_1^0(\mathbb{R}^+), \quad \mu_j - 1 \in L_1^0(\mathbb{R}^+), \quad j = 1, 2, \dots, N,$
такие, что

$$2') \quad |K(x, t)| \leq \sum_{j=1}^N (T_j(x-t) \lambda_j(|t|) + W_j(|x| + |t|) \mu_j(|t|)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда условие 2) будет выполнено. Более того, имеют место следующие соотношения:

$$C_1 := \sup_{R \in [0, +\infty)} \left(\int_0^R \int_{-\infty}^0 |K(x, t)| dt dx + \int_0^R \int_R^{\infty} |K(x, t)| dt dx \right) < +\infty,$$

$$C_2 := \sup_{R \in [0, +\infty)} \left(\int_{-R}^0 \int_0^{\infty} |K(x, t)| dt dx + \int_{-R}^0 \int_{-\infty}^{-R} |K(x, t)| dt dx \right) < +\infty. \quad (7)$$

Доказательство. Сначала займемся проверкой условия 2). Пусть ρ — произвольная неотрицательная функция из пространства $L_\infty^0(\mathbb{R})$. Тогда с учетом условий $p_1)$ – $p_3)$, $2')$ имеем

$$\begin{aligned} |\chi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, t)| \rho(t) dt \leq \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x-t) (\lambda_j(|t|) - 1) \rho(t) dt + \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x-t) \rho(t) dt + \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} W_j(|x| + |t|) (\mu_j(|t|) - 1) \rho(t) dt + \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} W_j(|x| + |t|) \rho(t) dt \leq \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho(t) \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x-\tau) (\lambda_j(|\tau|) - 1) d\tau + \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x-t) \rho(t) dt + \\ &+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho(t) \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} W_j(|x| + |\tau|) (\mu_j(|\tau|) - 1) d\tau + 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho(t) \sum_{j=1}^N \int_0^{\infty} W_j(|x| + y) dy = \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho(t) \left(\sum_{j=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x-\tau) (\lambda_j(|\tau|) - 1) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} W_j(|x| + |\tau|) (\mu_j(|\tau|) - 1) d\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \int_{|x|}^{\infty} W_j(z) dz \right\} \right) + \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x-t) \rho(t) dt =: J(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Как известно [21], если $\Phi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, а $\psi \in L_\infty^0(\mathbb{R})$, то

$$(\Phi * \psi)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-t)\psi(t)dt \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (8)$$

Используя предельное соотношение (8), а также условия р₁)–р₃) получим, что $J(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, $\chi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Ограниченность функции χ сразу следует из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} |\chi(x)| &\leq J(x) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho(t) \left(\sum_{j=1}^N \sup_{y \in \mathbb{R}} T_j(y) \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_j(|\tau|) - 1) d\tau + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^N \sup_{z \in [0, +\infty)} W_j(z) \int_{-\infty}^{\infty} (\mu_j(|\tau|) - 1) d\tau + 2 \sum_{j=1}^N \int_0^{\infty} W_j(z) dz + \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} T_j(y) dy \Big) = \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho(t) \left(\sum_{j=1}^N \left\{ 2 \sup_{y \in \mathbb{R}} T_j(y) \int_0^{\infty} (\lambda_j(z) - 1) dz + 2 \sup_{z \in [0, +\infty)} W_j(z) \int_0^{\infty} (\mu_j(z) - 1) dz + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \int_0^{\infty} W_j(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} T_j(y) dy \right\} \right) < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к доказательству второй части сформулированной леммы. Пусть $R \geq 0$ — произвольное число. Тогда, принимая во внимание условия р₁)–р₃), 2'), а также теорему Фубини [22], имеем

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_{-\infty}^0 |K(x, t)| dt dx &\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_0^R \int_{-\infty}^0 T_j(x-t)(\lambda_j(|t|) - 1) dt dx + \int_0^R \int_{-\infty}^0 T_j(x-t) dt dx + \right. \\ &+ \int_0^R \int_{-\infty}^0 W_j(|x| + |t|)(\mu_j(|t|) - 1) dt dx + \int_0^R \int_{-\infty}^0 W_j(|x| + |t|) dt dx \Big) = \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\int_0^R \int_0^{\infty} T_j(x+y)(\lambda_j(y) - 1) dy dx + \int_0^R \int_0^{\infty} T_j(x+y) dy dx + \right. \\ &+ \int_0^R \int_0^{\infty} W_j(|x| + y)(\mu_j(y) - 1) dy dx + \int_0^R \int_0^{\infty} W_j(|x| + y) dy dx \Big) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_0^{\infty} T_j(z) dz \int_0^{\infty} (\lambda_j(y) - 1) dy + \right. \\ &+ \int_0^{\infty} x T_j(x) dx + \int_0^{\infty} W_j(z) dz \int_0^{\infty} (\mu_j(y) - 1) dy + \int_0^{\infty} x W_j(x) dx \Big) < +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^R \int_R^\infty |K(x, t)| dt dx &\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_0^R \int_R^\infty T_j(x-t)(\lambda_j(|t|) - 1) dt dx + \int_0^R \int_R^\infty T_j(x-t) dt dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^R \int_R^\infty W_j(|x| + |t|)(\mu_j(|t|) - 1) dt dx + \int_0^R \int_R^\infty W_j(|x| + |t|) dt dx \right) = \\
&= \sum_{j=1}^N \left(\int_0^R \int_R^\infty T_j(x-t)(\lambda_j(t) - 1) dt dx + \int_0^R \int_{R-x}^\infty T_j(-y) dy dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^R \int_R^\infty W_j(x+y)(\mu_j(y) - 1) dy dx + \int_0^R \int_R^\infty W_j(x+y) dy dx \right) \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_0^\infty (\lambda_j(t) - 1) dt \int_{-\infty}^\infty T_j(x) dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^R \int_z^\infty T_j(-y) dy dz + \int_0^\infty (\mu_j(y) - 1) dy \int_0^\infty W_j(z) dz + \int_0^\infty x W_j(x) dx \right) \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_0^\infty (\lambda_j(t) - 1) dt \int_{-\infty}^\infty T_j(x) dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty y T_j(-y) dy + \int_0^\infty (\mu_j(y) - 1) dy \int_0^\infty W_j(z) dz + \int_0^\infty x W_j(x) dx \right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Складывая полученные выше неравенства, имеем

$$\begin{aligned}
C_1 &\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_0^\infty T_j(z) dz \int_0^\infty (\lambda_j(y) - 1) dy + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty x T_j(x) dx + 2 \int_0^\infty W_j(z) dz \int_0^\infty (\mu_j(y) - 1) dy + 2 \int_0^\infty x W_j(x) dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^\infty T_j(x) dx \int_0^\infty (\lambda_j(y) - 1) dy + \int_0^\infty y T_j(-y) dy \right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Аналогично можно доказать утверждение (7). $\square$

Используя леммы 2, 3 ниже докажем следующее утверждение об интегрируемости функции $G(f(x)) - f(x)$ на множестве $\mathbb{R}$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1), 2'), I, II. Тогда для любого неотрицательного и ограниченного решения f уравнения (1) имеет место включение (5).

Доказательство. Пусть r_1 и r_2 — произвольные неотрицательные числа. Тогда учитывая леммы 2, 3, в силу условий I, II, 1), 2') (см. также условия p_1 – p_3) и теоремы Фубини из (1) получим

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^{r_1} (\eta - f(x)) dx \leq \eta \int_0^\infty (1 - \gamma(x)) dx + \int_0^{r_1} \int_{-\infty}^\infty K(x, t) (\eta - G(f(t))) dt dx \leq \\
&\leq \eta \int_0^\infty (1 - \gamma(x)) dx + \eta \int_0^{r_1} \int_{-\infty}^0 K(x, t) dt dx + \eta \int_0^{r_1} \int_{r_1}^\infty K(x, t) dt dx + \\
&+ \int_0^{r_1} \int_0^{r_1} K(x, t) (\eta - G(f(t))) dt dx \leq \eta \int_0^\infty (1 - \gamma(x)) dx + \eta C_1 + \int_0^{r_1} (\eta - G(f(t))) dt, \\
0 &\leq \int_{-r_2}^0 (\eta - f(x)) dx \leq \eta \int_{-\infty}^0 (1 - \gamma(x)) dx + \int_{-r_2}^0 \int_{-\infty}^\infty K(x, t) (\eta - G(f(t))) dt dx \leq \\
&\leq \eta \int_{-\infty}^0 (1 - \gamma(x)) dx + \eta \int_{-r_2}^0 \int_{-\infty}^{-r_2} K(x, t) dt dx + \eta \int_{-r_2}^0 \int_0^\infty K(x, t) dt dx + \\
&+ \int_{-r_2}^0 \int_{-r_2}^0 K(x, t) (\eta - G(f(t))) dt dx \leq \eta \int_{-\infty}^0 (1 - \gamma(x)) dx + \eta C_2 + \int_{-r_2}^0 (\eta - G(f(t))) dt.
\end{aligned}$$

Складывая полученные неравенства, приходим к оценке

$$\int_{-r_2}^{r_1} (\eta - f(x)) dx \leq \eta \int_{-\infty}^\infty (1 - \gamma(x)) dx + \eta(C_1 + C_2) + \int_{-r_2}^{r_1} (\eta - G(f(t))) dt$$

или, что то же самое,

$$\int_{-r_2}^{r_1} (G(f(x)) - f(x)) dx \leq \eta \int_{-\infty}^\infty (1 - \gamma(x)) dx + \eta(C_1 + C_2). \quad (9)$$

Снова используя условия I, II и лемму 2, можно утверждать, что

$$G(f(x)) \geq f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Из (9), (10) приходим к следующему двустороннему неравенству:

$$0 \leq \int_{-r_2}^{r_1} (G(f(x)) - f(x)) dx \leq \eta \int_{-\infty}^\infty (1 - \gamma(x)) dx + \eta(C_1 + C_2). \quad (11)$$

В (11) устремляя $r_1 \rightarrow +\infty$, $r_2 \rightarrow +\infty$, получаем включение (5) и интегральное неравенство

$$0 \leq \int_{-\infty}^\infty (G(f(x)) - f(x)) dx \leq \eta \int_{-\infty}^\infty (1 - \gamma(x)) dx + \eta(C_1 + C_2).$$

□

Из доказанной теоремы 1, как следствие, вытекает следующая вспомогательная лемма, которую в дальнейшем будем использовать в доказательстве теоремы об асимптотическом поведении решения.

Лемма 4. При условиях теоремы 1 любое неотрицательное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение f уравнения (1), для которого существует число $r > 0$ такое, что

$$m := \inf_{x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)} f(x) > 0, \quad m < \eta,$$

обладает интегральной асимптотикой

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Так как $f \in C(\mathbb{R})$, то достаточно показать, что

$$\eta - f \in L_1((-\infty, -r) \cup (r, +\infty)). \quad (12)$$

Так как $m \in (0, \eta)$, то из свойств I, II сразу следует

$$G(m) > m. \quad (13)$$

Ниже, используя лемму 2 и условия I, II, убедимся в достоверности следующего неравенства для $x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$:

$$0 \leq \eta - f(x) \leq \frac{\eta - m}{G(m) - m} (G(f(x)) - f(x)). \quad (14)$$

Действительно, в силу I, II и (13) для всех $x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ имеет место оценка (см. рис. 2)

$$\eta - G(f(x)) \leq \frac{\eta - G(m)}{\eta - m} (\eta - f(x)). \quad (15)$$

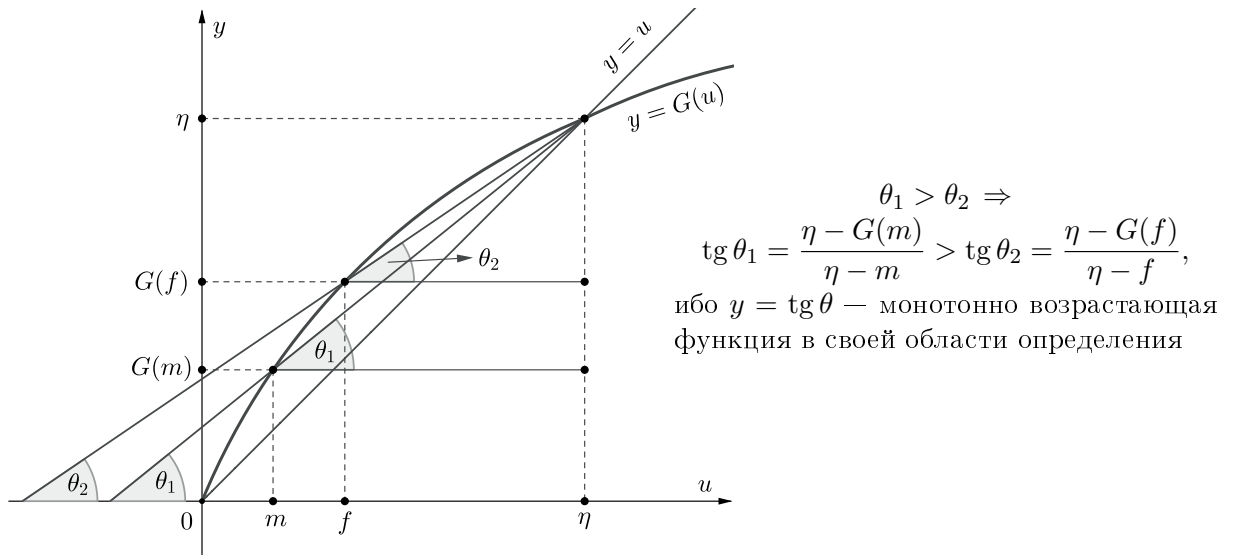


Рис. 2

Из неравенства (15) и леммы 2 сразу приходим к (14). Учитывая утверждение доказанной теоремы 1 и (14), получаем включение (12). $\square$

2. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (1)

Теорема 2. При условиях 1), 2), I, II и A), если существует функция $\varphi(\sigma)$ со свойствами а), б) такая, что

$$G(\sigma u) \geq \varphi(\sigma)G(u), \quad u \in [0, \eta], \quad \sigma \in [0, 1], \quad (16)$$

уравнение (1) имеет положительное ограниченное и непрерывное на $\mathbb{R}$ решение $f(x)$. Более того, данное решение обладает следующими свойствами:

$$i_1) \quad f(x) \leq \eta, \quad f(x) \not\equiv \eta, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \eta;$$

$$i_2) \quad \text{существуют числа } \alpha = \alpha(K, G) \in (0, 1) \text{ и } C = C(K, G) > 0 \text{ такие, что}$$

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq C\eta\alpha^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ определяется из рекуррентных соотношений (4);

$$i_3) \quad \text{если вместо условия 2) выполняется более сильное условие 2'), то}$$

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Сначала заметим, что индукцией по n несложно доказать справедливость следующих утверждений:

$$f_n(x) \downarrow \quad \text{по } n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$f_n \in C(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$f_n(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (19)$$

Докажем, что существуют

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (20)$$

В случае $n = 0$ предельное соотношение (20) выполняется очевидным образом. Предположим, что (20) имеет место при некотором натуральном n . Тогда учитывая неравенство $0 \leq \eta - f_n(x) < \eta$, $x \in \mathbb{R}$, вытекающее из (17), (19), а также условия 1), 2), I, II, из (4) получим

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta - f_{n+1}(x) &= \eta(1 - \gamma(x)) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(\eta - G(f_n(t)))dt \leq \\ &\leq \eta(1 - \gamma(x)) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(\eta - f_n(t))dt \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{n+1}(x) = \eta.$$

Заметим также, что для любого натурального n

$$f_n(x) \not\equiv f_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Соотношение (21) сразу следует из условий A), I, 1).

Рассмотрим функцию $H(x) := \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Из (17)–(20) следует, что существует число $r^* > 0$ такое, что при $|x| > r^*$ имеет место неравенство

$$H(x) \geq \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Так как $H(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $H \in C(\mathbb{R})$, $H(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ и $H(x) \not\equiv 1$ (см. (17)–(21)), то согласно теореме Вейерштрасса существует точка $x_0 \in [-r^*, r^*]$ такая, что

$$\min_{x \in [-r^*, r^*]} H(x) = H(x_0) \in (0, 1). \quad (23)$$

Из (21)–(23) следует

$$\sigma_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}} H(x) \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, H(x_0) \right\} > 0, \quad \sigma_0 < 1. \quad (24)$$

Таким образом,

$$\sigma_0 f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

Учитывая 1), I, (16), (25), из (4) вытекает

$$\varphi(\sigma_0) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) G(f_1(t)) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) G(f_2(t)) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) G(f_1(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

или, что то же самое,

$$\varphi(\sigma_0) f_2(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Снова принимая во внимание 1), I, (16), из (4) в силу (26) получим

$$F_2(\sigma_0) f_3(x) \leq f_4(x) \leq f_3(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Продолжая этот процесс для любого натурального $n > 1$, приходим к неравенству

$$F_{n-1}(\sigma_0) f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Из (27), (6), (17), (24) (в лемме 1 в качестве ε берем σ_0) следует

$$0 \leq f_n(x) - f_{n+1}(x) \leq \eta(1 - F_{n-1}(\sigma_0)) \leq \eta k_{\sigma_0}^{n-1} (1 - \sigma_0), \quad n = 2, 3, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

где

$$k_{\sigma_0} = \frac{1 - \varphi(\sigma_0)}{1 - \sigma_0} \in (0, 1), \quad \text{ибо} \quad 1 > \varphi(\sigma_0) > \sigma_0 > 0.$$

Оценка (28) обеспечивает равномерную сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ к непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Используя непрерывность функций K и G , утверждения (17), (19), условия 1), I и предельную теорему Б. Леви [22] заключаем, что $f(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1).

Из (28) следует

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) \leq \eta k_{\sigma_0}^n (1 - \sigma_0), \quad x \in \mathbb{R}, \\ 0 &\leq f_{n+2}(x) - f_{n+3}(x) \leq \eta k_{\sigma_0}^{n+1} (1 - \sigma_0), \quad x \in \mathbb{R}, \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &\leq f_{n+m-1}(x) - f_{n+m}(x) \leq \eta k_{\sigma_0}^{n+m-2} (1 - \sigma_0), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (29)$$

Складывая неравенства (28) и (29), получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_n(x) - f_{n+m}(x) \leq \eta(1 - \sigma_0)(k_{\sigma_0}^{n-1} + k_{\sigma_0}^n + \dots + k_{\sigma_0}^{n+m-2}) = \\ &= \eta(1 - \sigma_0) k_{\sigma_0}^{n-1} \frac{(1 - k_{\sigma_0}^m)}{k_{\sigma_0}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

В (30) зафиксировав n, x и устремляя $m \rightarrow \infty$, приходим к неравенству

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq C \eta \alpha^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где

$$C := \frac{(1 - \sigma_0)^2}{\varphi(\sigma_0) - \sigma_0}, \quad \alpha := k_{\sigma_0} = \frac{1 - \varphi(\sigma_0)}{1 - \sigma_0}.$$

Убедимся теперь, что существует $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \eta$. Во-первых, заметим, что из (28) следует равномерная сходимость ряда

$$f_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$$

на множестве $\mathbb{R}$, причем

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} (f_{m+1}(x) - f_m(x)).$$

Таким образом, в силу (20)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{m+1}(x) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m(x) \right) = \eta.$$

Принимая во внимание утверждения леммы 2 и условие А), в силу равенства $G(\eta) = \eta$ заключаем, что $f(x) \leq \eta$, $f(x) \not\equiv \eta$, $x \in \mathbb{R}$. Из i_1) следует, что существует $r > 0$ такое, что при $|x| > r$ имеет место неравенство

$$f(x) \geq \frac{\eta}{2}, \quad |x| > r. \quad (31)$$

Следовательно используя лемму 4, приходим к включению i_3). Из (31), 1), I и (1) следует также, что

$$f(x) \geq \int_{-r}^r K(x, t) G(f(t)) dt \geq G\left(\frac{\eta}{2}\right) \int_{-r}^r K(x, t) dt > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Используя теорему 1, интегральный аналог неравенства Йенсена и повторяя аналогичные рассуждения как в работах [17], [20], можно доказать справедливость следующих утверждений.

Теорема 3. При условиях 1), 2'), I, II и B) уравнение (1) в классе неотрицательных непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций имеет только тривиальные решения $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv \eta$.

Теорема 4. При условиях 1), 2'), I, II, (16), A) уравнение (1) имеет единственное решение в классе неотрицательных нетривиальных непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

Замечание 2. Небезынтересно отметить, что полученные результаты обобщают и дополняют соответствующие утверждения из работы [17].

3. ПРИМЕРЫ

В настоящем разделе приведем конкретные примеры ядра K и нелинейности G , удовлетворяющих всем условиям доказанных результатов. Часть этих примеров имеет также прикладное значение в приведенных выше отраслях естествознания (см. введение). Начнем наше изложение с примеров ядра K :

q₁) $K(x, t) = K_0(x - t)B(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, где $B(x, t)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$ со свойствами

$$0 < \varepsilon_0 \leq B(x, t) \leq 1, \quad B(x, t) = B(t, x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (32)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - B(x, t)) \in L_1^0(\mathbb{R}), \quad (33)$$

а K_0 удовлетворяет условиям

$$0 < K_0(-\tau) = K_0(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \quad K_0 \in L_1^0(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}), \quad (34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y| K_0(y) dy < +\infty, \quad (35)$$

где $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\mathbb{R}$ функций;
q₂) $K(x, t) = B(x, t)(K_0(x - t) - \varepsilon K_0(|x| + |t|))$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, где $\varepsilon \in [0, 1)$ — числовой параметр, функция B обладает свойствами (32), (33), а K_0 , помимо условий (34), (35), удовлетворяет условию монотонности

$$K_0(t) \downarrow \quad \text{на } \mathbb{R}^+. \quad (36)$$

Подробно остановимся на примере q₂) и проверим условия 1), 2') (условие 2) сразу следует из 2') в силу леммы 3). Симметричность ядра K сразу следует из (32) и (34), а непрерывность получается в силу непрерывности функций K_0 и B . Докажем теперь, что

$$K(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (37)$$

С этой целью сначала проверим выполнение неравенства

$$K_0(|x| + |t|) \leq K_0(x - t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (38)$$

Действительно, если $x - t > 0$, то из простого неравенства $|x| + |t| \geq x - t$ и условия (36) следует, что $K_0(x - t) \geq K_0(|x| + |t|)$. Если же $x - t \leq 0$, то в силу $|x| + |t| \geq t - x > 0$, (34) и (36) получим

$$K_0(x - t) = K_0(t - x) \geq K_0(|x| + |t|).$$

Так как $\varepsilon \in [0, 1)$, то из (38), (32) немедленно следует (37). Учитывая (32)–(35), (37), имеем

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(x, t)(K_0(x - t) - \varepsilon K_0(|x| + |t|)) dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} B(x, t) K_0(x - t) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x - t) dt = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \\ 0 \leq 1 - \gamma(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x - t)(1 - B(x, t)) dt + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} B(x, t) K_0(|x| + |t|) dt \leq \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - B(x, t)) + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|x| + |t|) dt = \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - B(x, t)) + 2\varepsilon \int_0^{\infty} K_0(|x| + y) dy = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - B(x, t)) + 2\varepsilon \int_{|x|}^{\infty} K_0(z) dz \in L_1^0(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Проверим, наконец, условие 2'). Учитывая (32), (37), получим

$$0 \leq K(x, t) \leq K_0(x - t) + \varepsilon K_0(|x| + |t|) \leq \sum_{j=1}^N (T_j(x - t) \lambda_j(|t|) + W_j(|x| + |t|) \mu_j(|t|)), (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

где $T_1(x) = K_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $W_1(y) = \varepsilon K_0(y)$, $y \in \mathbb{R}^+$, $T_j(x) \equiv 0$, $W_j(y) \equiv 0$, $j = 2, 3, \dots, N$, а $\{\lambda_j(y)\}_{j=1}^N$, $\{\mu_j(y)\}_{j=1}^N$ — произвольные функции со свойствами р3).

Для полноты изложения приведем также конкретные примеры функций $\{\lambda_j(\tau)\}_{j=1}^N$, $\{\mu_j(\tau)\}_{j=1}^N$, $B(x, t)$, $K_0(x - t)$:

$$a_1) \lambda_j(\tau) = 1 + \frac{c_j e^{-\tau}}{\tau^{d_j}}, \tau > 0, c_j > 0, d_j \in (0, 1), j = 1, 2, \dots, N;$$

$$a_2) \mu_j(\tau) = 1 + c_j \frac{e^{-\tau^2}}{\tau^{d_j}}, \tau > 0, c_j > 0, d_j \in (0, 1), j = 1, 2, \dots, N;$$

$$a_3) B(x, t) = 2 - (1 - \delta)(e^{-|x|} + e^{-|t|}) - (1 - (1 - \delta)e^{-|x|})(1 - (1 - \delta)e^{-|t|}), (x, t) \in \mathbb{R}^2, \delta \in (0, 1);$$

$$a_4) K_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}, K_0(x) = \int_a^b e^{-|x|s} P(s) ds, x \in \mathbb{R}, \text{ где } P(s) > 0 \text{ на } [a, b],$$

$$0 < a < b \leq +\infty, P \in C[a, b], \text{ причем}$$

$$2 \int_a^b \frac{1}{s} P(s) ds = 1.$$

Перейдем теперь к примерам нелинейности G :

$$b_1) G(u) = u^\alpha, \alpha \in (0, 1), u \in \mathbb{R}^+;$$

$$b_2) G(u) = au^\alpha + (1 - a)u, a \in (0, 1), \alpha \in (0, 1), u \in \mathbb{R}^+;$$

$$b_3) G(u) = \gamma(1 - e^{-u^\alpha}), \alpha \in (0, 1), \gamma > 1, u \in \mathbb{R}^+.$$

Подробно остановимся на примере b_2). Для данного примера число $\eta = 1$, $G(0) = 0$, $G'(u) = a\alpha u^{\alpha-1} + 1 - a > 0$ при $u > 0$, $G''(u) = a\alpha(\alpha - 1)u^{\alpha-2} < 0$, $u > 0$. Следовательно, условия I, II выполняются.

Докажем теперь, что существует функция $\varphi(\sigma)$ со свойствами а), б) такая, что имеет место (16) для примера b_2). В качестве $\varphi(\sigma)$ взяв $\varphi(\sigma) = a\sigma^\alpha + (1 - a)\sigma$, докажем справедливость неравенства

$$a\sigma^\alpha u^\alpha + (1 - a)\sigma u \geq (au^\alpha + (1 - a)u)(a\sigma^\alpha + (1 - a)\sigma), \quad \sigma, u \in [0, 1]. \quad (39)$$

Это неравенство для значений $u = 0$, $\sigma = 0$, $u = 1$, $\sigma = 1$ выполняется очевидным образом. В случае $u \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, 1)$ оценка (39) примет вид

$$a + (1 - a)\sigma^{1-\alpha} u^{1-\alpha} \geq (a + (1 - a)u^{1-\alpha})(a + (1 - a)\sigma^{1-\alpha}).$$

Так как $u, \sigma \in (0, 1)$ и $\alpha \in (0, 1)$, очевидно, что

$$\begin{aligned} \sigma^{1-\alpha} + u^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha} u^{1-\alpha} &= 1 - (1 - u^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha} + \sigma^{1-\alpha} u^{1-\alpha}) = \\ &= 1 - (1 - u^{1-\alpha})(1 - \sigma^{1-\alpha}) \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &a + (1 - a)\sigma^{1-\alpha} u^{1-\alpha} - (a + (1 - a)u^{1-\alpha})(a + (1 - a)\sigma^{1-\alpha}) = \\ &= a(1 - a) + (1 - a)(\sigma^{1-\alpha} u^{1-\alpha} - a\sigma^{1-\alpha} - au^{1-\alpha} - (1 - a)\sigma^{1-\alpha} u^{1-\alpha}) = \\ &= a(1 - a) + (1 - a)a(\sigma^{1-\alpha} u^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha} - u^{1-\alpha}) \geq 0, \quad u, \sigma \in (0, 1). \end{aligned}$$

В конце приведем также примеры функции $\varphi(\sigma)$:

$$c_1) \varphi(\sigma) = b\sigma^\alpha + (1-b)\sigma, \quad \sigma \in [0, 1], \quad \alpha \in (0, 1), \quad b \in (0, 1];$$

$$c_2) \varphi(\sigma) = \frac{2\sigma}{1+\sigma}, \quad \sigma \in [0, 1].$$

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1) В НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Как уже было отмечено, доказанная теорема 2 существования носит конструктивный характер. В этом разделе приведем численное решение уравнения (1) в случае, когда ядро K допускает представление q_1), причем

$$K_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

$$B(x, t) = 1 - \frac{1}{4} e^{-(|x|+|t|)}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (41)$$

(см. раздел 3, примеры q_1), a_4) и a_3) с $\delta = \frac{1}{2}$). Соответствующие численные расчеты приведем для нелинейностей b_1) и b_3) при различных значениях показателя $\alpha \in (0, 1)$. Сначала рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} \left(1 - \frac{1}{4} e^{-(|x|+|y|)} \right) f^\alpha(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Соответствующие итерации для (42) будут иметь следующий вид:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} \left(1 - \frac{1}{4} e^{-(|x|+|y|)} \right) f_n^\alpha(y) dy, \quad (43)$$

$$f_0(x) \equiv 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда в силу (28) имеем

$$0 \leq f_n(x) - f_{n+1}(x) \leq k_{\sigma_0}^{n-1} (1 - \sigma_0), \quad n = 2, 3, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

где $k_{\sigma_0} = \frac{1 - \sigma_0^\alpha}{1 - \sigma_0}$, $\varphi(\sigma) = \sigma^\alpha$, $\sigma_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

Вычислим значения σ_0 и k_{σ_0} , например, для $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.75$.

При $\alpha = 0.25$, $\sigma_0 \approx 0.959$, $k_{\sigma_0} \approx 0.253$, при $\alpha = 0.5$, $\sigma_0 \approx 0.919$, $k_{\sigma_0} \approx 0.51$, а в случае $\alpha = 0.75$, $\sigma_0 \approx 0.882$, $k_{\sigma_0} \approx 0.761$. Близость итераций (43) контролируется неравенством (44). На рис. 3–5 изображены последовательные приближения (43) для $n = 0, 1, 2, \dots, 10$. Из численных расчетов видно, что, например, для $\alpha = 0.25$ после десятой итерации разность соседних итерационных элементов не превосходит $5 \cdot 10^{-7}$. Проводя аналогичные расчеты для примера b_3) (в случае $\gamma = \frac{e}{e-1}$), получаем, что при $\alpha = 0.25$, $\sigma_0 \approx 0.975$, $k_{\sigma_0} \approx 0.252$, при $\alpha = 0.5$, $\sigma_0 \approx 0.951$, $k_{\sigma_0} \approx 0.506$, а при $\alpha = 0.75$, $\sigma_0 \approx 0.927$, $k_{\sigma_0} \approx 0.757$.

На рис. 6–8 отображены соответствующие итерации для уравнения (1) с ядром q_1), (40), (41) и нелинейностью $G(u) = \frac{e}{e-1} (1 - e^{-u^\alpha})$, $u \in \mathbb{R}^+$, для различных значений параметра $\alpha \in (0, 1)$. Здесь при $\alpha = 0.75$

$$0 \leq f_9(x) - f_{10}(x) \leq 10^{-4}.$$

Численные расчеты выполнены с помощью языка программирования Python.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

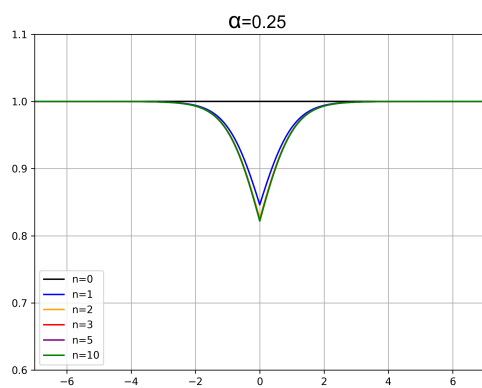


Рис. 3

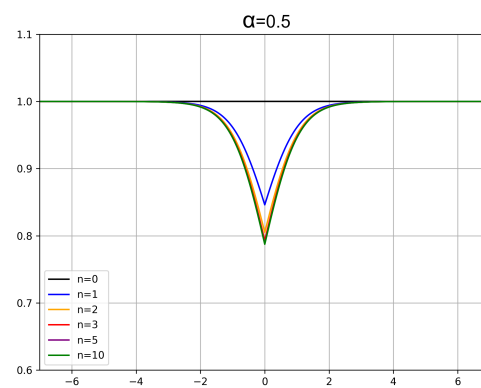


Рис. 4

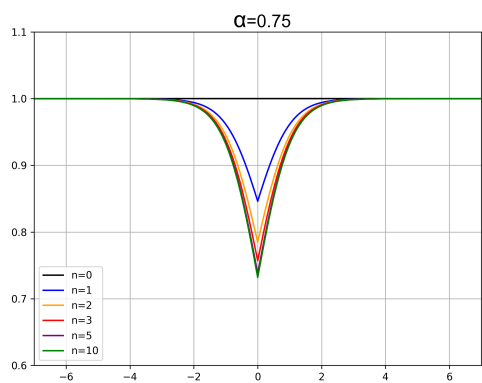


Рис. 5

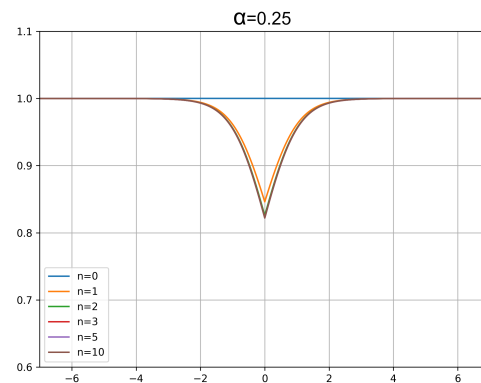


Рис. 6

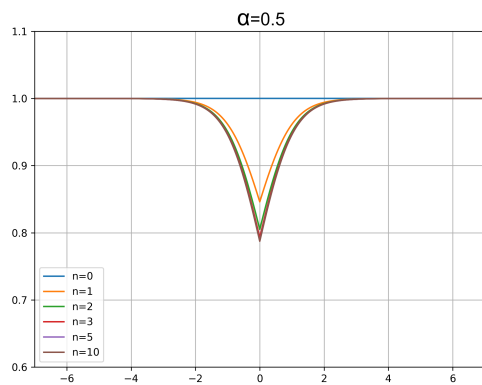


Рис. 7

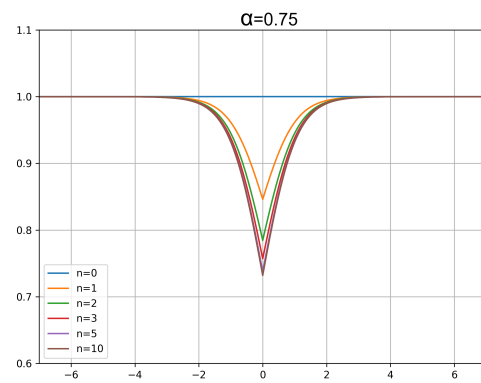


Рис. 8

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aref'eva I.Ya., Dragovic B.G., Volovich I.V. *Open and closed p -adic strings and quadratic extensions of number fields*, Phys. Lett. B **212** (3), 283–291 (1988).
- [2] Владимирова В.С., Волович Я.И. *О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны*, ТМФ **138** (3), 355–368 (2004).
- [3] Владимирова В.С. *О нелинейных уравнениях p -адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн*, ТМФ **149** (3), 354–367 (2006).
- [4] Жуковская Л.В. *Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн*, Теорет. матем. физ. **146** (3), 402–409 (2006).
- [5] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений* (Наука, М., 1966).
- [6] Cercignani C. *The Boltzmann Equation and its Application* (Springer, New York, 1988).
- [7] Енгибарян Н.Б. *Об одной задаче нелинейного переноса излучения*, АН Армянск. ССР. Астрофизика **2** (1), 31–36 (1966).
- [8] Atkinson C., Reuter G.E.H. *Deterministic epidemic waves*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80** (2), 315–330 (1976).
- [9] Diekmann O. *Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection*, J. Math. Biol. **6**, 109–130 (1978).
- [10] Diekmann O., Kaper H.G. *On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **2** (6), 721–737 (1978).
- [11] Sargan J.D. *The distribution of wealth*, Econometrica **25**, 568–590 (1957).
- [12] Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А., Петросян А.С. *Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода*, Тр. ИММ УрО РАН **27** (1), 188–206 (2021).
- [13] Хачатрян Х.А. *О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны*, Изв. РАН. Сер. матем. **82** (2), 172–193 (2018).
- [14] Хачатрян Х.А. *О разрешимости одной граничной задачи в p -адической теории струн*, Тр. ММО **79** (1), 117–132 (2018).
- [15] Хачатрян Х.А. *Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью*, Изв. РАН. Сер. матем. **84** (4), 198–207 (2020).
- [16] Хачатрян Х.А. *О разрешимости некоторых нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки*, Тр. ММО **81** (1), 3–40 (2020).
- [17] Петросян А.С., Хачатрян Х.А. *О единственности решения одного класса интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром и с выпуклой нелинейностью на положительной полупрямой*, Матем. заметки **113** (4), 529–543 (2023).
- [18] Avetisyan M.H. *On solvability of a nonlinear discrete system in the spread theory of infection*, Proc. YSU. Phys. Math. Sci. **54** (2 (252)), 87–95 (2020).
- [19] Khachatryan Kh.A., Avetisyan M.H. *On solvability of an infinite nonlinear system of algebraic equations with Teoplitz–Hankel matrices*, Proc. YSU. Phys. Math. Sci. **51** (2 (243)), 158–167 (2017).
- [20] Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А., Петросян А.С. *О нелинейных интегральных уравнениях типа свертки в теории p -адических струн*, ТМФ **216** (1), 184–200 (2023).
- [21] Yengibaryan N.B. *Renewal equation on the whole line*, Stochastic Proc. Appl. **85**, 237–247 (2000).
- [22] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1976).

Агавард Хачатурович Хачатрян

Национальный аграрный университет Армении,
ул. Теряна, д. 74, г. Ереван, 0009, Армения,
e-mail: Aghavard59@mail.ru

Хачатур Агавардович Хачатрян

Ереванский государственный университет,
ул. Алека Манукяна, д. 1, г. Ереван, 0025, Армения,
e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Айкануш Самвеловна Петросян

*Национальный аграрный университет Армении,
ул. Теряна, д. 74, г. Ереван, 0009, Армения,*

e-mail: Haykuhi25@mail.ru

A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan, and H.S. Petrosyan

On the constructive solvability of one class nonlinear integral equations of the Hammerstein type on the whole line

Abstract. The work is devoted to numerical solution and to the study of some qualitative properties of the solution of one class of nonlinear integral equations on the whole line with non-compact and monotone operator of Hammerstein type. This class of equations has applications in various areas of physics and epidemiology. In particular, under certain representations of the corresponding kernel and nonlinearity, such equations arise in the theory of p -adic strings, in the kinetic theory of gases, and in the mathematical theory of propagation epidemic diseases within different models. With certain restrictions on kernel and on the nonlinearity of the equation, a constructive theorem on the existence of a continuous positive and bounded solution having the same finite limit on $\pm\infty$. In addition, we obtain an estimate for the difference of the corresponding neighboring successive approximations, from which it follows that these approximations in terms of the speed of a geometric progression uniformly converge to a continuous and bounded solution of the equation under study. With additional restriction on the kernel, it is also proved that the difference between the solution and its limit value on $\pm\infty$ is an integrable function on the entire number line. Uniqueness of the solution in the class of non-negative non-trivial continuous and bounded functions is obtained from previously known results of the authors of this paper. At the end of the work, numerical calculations are given for some model examples of the kernel and nonlinearity.

Keywords: kernel, non-linearity, concavity, monotonicity, successive approximations, convergence, bounded solution.

Aghavard Khachaturovich Khachatryan

*Armenian National Agrarian University,
74 Teryan str., Yerevan, 0009 Republic of Armenia,*

e-mail: Aghavard59@mail.ru

Khachatur Aghavardovich Khachatryan

*Yerevan State University,
1 Alex Manoogian str., Yerevan, 0025 Republic of Armenia,*

e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Haykanush Samvelovna Petrosyan

*Armenian National Agrarian University,
74 Teryan str., Yerevan, 0009 Republic of Armenia,*

e-mail: Haykuhi25@mail.ru