

И.И. САФАРОВ, Ш.И. ЖУРАЕВ, М.Х. ТЕШАЕВ, Б.Ш. УСМОНОВ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ТРЕХСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Аннотация. В работе рассматриваются собственные колебания вязкоупругого коаксиального цилиндрического тела, пространство между оболочками заполнено вязкоупругим материалом. Связь напряжений и деформаций удовлетворяет наследственному интегралу Больцмана–Вольтера. В качестве примера вязкоупругого материала применяется трехпараметрическое ядро релаксации со слабой сингулярностью Ржаницына–Колтунова. Решаются задачи малых колебаний рассматриваемой механической системы. Уравнения малых колебаний заполнителя в перемещениях получены на основе дифференциальных уравнений Ламе теории вязкоупругости с комплексными коэффициентами. Уравнения колебания наружной и внутренней оболочек, которые изготовлены из вязкоупругого материала, удовлетворяют уравнениям движения оболочки, подчиняющегося гипотезам Кирхгофа–Лява. Задача решается в преобразованиях Грина–Лэмба и методом комплексных амплитуд. Напряжения и перемещения каждой оболочки и заполнителя выражаются через специальные функции комплексного аргумента Бесселя и Неймана произвольного порядка. Получено частотное уравнение с комплексно входящим параметром, которое решается численно методом Мюллера. Для структурно-неоднородных механических систем сравнительно оценены зависимости нескольких мод комплексной собственной частоты (реальные и мнимые части) от различных параметров трехслойных тел. Также сравнительно оценено применение асимптотических и численных методов для решения частотных уравнений с комплексно выходящим параметром.

Ключевые слова: собственное колебание, оболочка, вязкоупругий материал, заполнитель, трехслойное тело.

УДК: 517.968

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-3-54-70

ВВЕДЕНИЕ

Круговые цилиндрические оболочки, как элементы конструкций, нашли широкое применение в различных областях машиностроения. Большой практический интерес представляют изучение и устранение резонансных явлений оболочечных конструкций. Исследованию собственных колебаний круговых цилиндрических оболочек посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ [1], [2].

Однако, до сих пор отсутствуют надежные решения, позволяющие определять параметры резонансов в широком диапазоне изменения физико-геометрических параметров с учетом реологических параметров системы. Имеются также работы, в которых теоретико-экспериментальным методом получены зависимости для определения резонансных частот [3] и форм колебаний оболочки цилиндрических панелей с заполнителем [4], [5].

Другой метод в основном, в гипотезах, используется для исследования динамики, что позволяет перейти от уравнений устойчивости оболочек к соответствующим уравнениям для цилиндрических оболочек с круговым поперечным сечением. Одной из важнейших задач при проектировании подобных конструкций, предназначенных для работы в режиме силовых динамических воздействий, является задача об эффективном гашении возбуждаемых колебаний. Создание новых композиционных материалов с адаптивными вязкоупругими свойствами позволяет успешно решать данную задачу [6], [7]. К числу подобных материалов относятся электро-реологические и магнито-реологические композиты [8], [9].

В частности, магнито-реологические жидкости (МРЖ) и эластомеры (МРЭ), представляющие собой композицию вязкоупругой матрицы и мелких магнитов чувствительных частиц, обладают уникальным свойством практически мгновенно реагировать на сигнал приложенного магнитного поля [10], [11]. Возможность управления вязкопластическими и вязкоупругими свойствами магнита реологических жидкостей и эластомеров в широком диапазоне позволяет использовать их в устройствах виброзащиты. Большинство исследований по гашению вибраций многослойных тонкостенных конструкций было выполнено для случая, когда прослойкой “интеллектуального” материала являлись магнито-реологические жидкости [12], [13]. Вместе с тем, эластомеры по сравнению с жидкостями имеют значительное преимущество — способность сохранять необходимую геометрическую форму при низком уровне магнитного поля.

Несмотря на достаточно большое число работ, посвященных исследованию физических свойств эластомеров, имеется всего несколько статей, в которых выполнен динамический расчет адаптивных сэндвич-балок, пластин и оболочек, содержащих в качестве вязкоупругого наполнителя эластомеры [14], [15]. Объясняется это двумя причинами. Во-первых, подобные системы с адаптивными физическими свойствами достаточно сложны для математического моделирования, развитые за последнее десятилетие высокоточные двухмерные теории, в основу которых положен расчет каждого слоя с последующим их сопряжением, носят скорее теоретический характер и не могут быть эффективно использованы для расчета слоистых адаптивных систем. Во-вторых, реакция композитной конструкции, содержащей эластомеры, существенно зависит от соотношения масштаба времени управляющего сигнала к времени реакции эластомеров и динамических характеристик контролируемой тонкостенной конструкции [16], [17].

В работе [18] предложен подход к эластомерам для исследования колебаний цилиндрической оболочки, у которой слои собраны из упругого материала. С использованием единых кинематических гипотез Тимошенко для всего пакета выведены уравнения движения цилиндрической оболочки с коэффициентами, зависящими от индукции магнитного поля. Слоистые структуры являются частным случаем неоднородных структур, свойства которых изменяются лишь вдоль одной координаты. Они весьма просты в изготовлении, при этом достаточно функциональны, в связи с чем и получили широкое применение в различных сферах техники: звуковая и вибрационная защита [19]–[21], волноводы [19], [22], фильтры продольных или поперечных волн [23], [24], эффективные демпфирующие покрытия [25], [26]. В механике деформируемого твердого тела с помощью многослойных сред моделируются поведения сосудов высокого давления [27], [28], слоистых и волокнистых композитов [29], [30], неоднородных преград, препятствующих прониканию ударников [31]. До настоящего времени исследованию собственных и вынужденных колебаний диссипативно-неоднородных трехслойных цилиндрических тел обращалось мало внимания.

1. МЕТОДЫ

1.1. Постановка задачи и методы решения. Рассматриваются собственные колебания вязкоупругого коаксиального цилиндрического тела, пространство между оболочками заполнено вязкоупругим материалом (рис. 1). Решаются задачи малых колебаний выше приведенной механической системы. Уравнения малых колебаний цилиндра в перемещениях имеют вид [11]

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \rho F_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \tilde{\mu}\nabla^2 u_\varphi + \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \rho F_\varphi &= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \\ \tilde{\mu}\nabla^2 u_x + \frac{\tilde{\mu}}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \rho F_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\end{aligned}$$

где ρF_r , ρF_φ , ρF_x — массовые силы, μ_{0j} — мгновенный модуль упругости,

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ \theta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \tilde{\mu}[f(t)] &= \mu_{0j}\left[f(t) - \int_0^t R_{\mu j}(t-\tau)f(\tau)d\tau\right],\end{aligned}$$

остальные обозначения общеприняты (рис. 1).

Цилиндры могут быть скреплены с тонкой цилиндрической оболочкой, причем он может быть изготовлен из стали. Расчетная схема трехслойного тела приведена на рис. 1. Параметры системы “цилиндр–оболочка” следующие: h_0 — толщина оболочки, $b \approx R$ — средний радиус оболочки, $K = \frac{h_0^2}{12b^2}$, q_l — поверхностные силы.

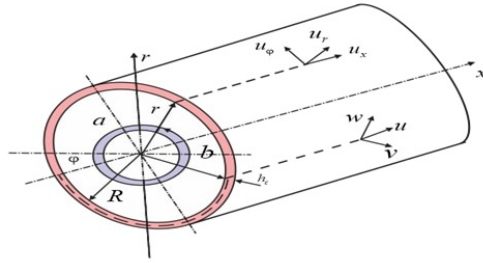


Рис. 1. Расчетная схема

Уравнения оболочки для изотропного вязкоупругого материала принимают вид

$$\begin{aligned}-q_{1j} &= \frac{\tilde{B}_j}{b_j^2}\left[b_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_{0j}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1+\nu_{0j}}{2}b_j\frac{\partial^2\nu}{\partial x\partial\varphi} + \nu_{0j}b_j\frac{\partial w}{\partial x} - \rho_{0j}h_{0j}b_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right], \\ -q_{2j} &= \frac{\tilde{B}_j}{b^2}\left[\frac{1+\nu_{0j}}{2}b_j\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\varphi} + \frac{\partial^2\nu_{0j}}{\partial\varphi^2} + \frac{1-\nu_{0j}}{2}b_j^2\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial\varphi} - \rho_{0j}h_{0j}b_j^2\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}\right],\end{aligned}$$

$$-q_{3j} = -\frac{\tilde{B}_j}{b^2} \left[\nu_{0j} b_j \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + K_j \nabla^2 \nabla^2 w + w + \rho_{0j} h_{0j} b_j^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (j = 1, 2); \quad (1)$$

здесь

$$\nabla^2 = b_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad B_j[f(t)] = \frac{E_{0j} h_{0j}}{1 - \nu_{0j}^2} \left[f(t) - \int_0^t R_{Ej}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (2)$$

E_{0j} — мгновенный модуль упругости, ν_{0j}^2 — коэффициент Пуассона металлической оболочки.

Пусть интегральные члены в (2) малые, тогда функцию $\phi(t)$ можно представить в виде

$$\phi(t) = \psi(t) e^{i w_R t},$$

где $\psi(t)$ — медленно меняющаяся функция времени, w_R — действительная константа. Тогда в соотношениях (2) эти члены могут быть заменены приближенными выражениями [28]:

$$\bar{E}_n \phi E_{0j} [1 - \Gamma_j^C(w_R) - i \Gamma_j^S(w_R)] \phi, \quad (3)$$

где

$$\Gamma_j^C(w_R) = \int_0^\infty R_n(\tau) \cos w_R \tau d\tau, \quad \Gamma_j^S(w_R) = \int_0^\infty R_n(\tau) \sin w_R \tau d\tau$$

— соответственно косинус- и синус-образы Фурье ядер релаксации материала. В качестве примера вязкоупругого материала принято трехпараметрическое ядро релаксации

$$R_n(t) = \frac{A_n e^{-\beta_n t}}{t^{1-\alpha_{jn}}}.$$

На функцию влияния $R_n(t - \tau)$ накладываются следующие требования: интегрируемость, непрерывность (кроме $t = \tau$), знакоопределенность и монотонность:

$$R > 0, \quad \frac{dR(t)}{dt} \leq 0, \quad 0 < \int_0^\infty R_n(t) dt < 1.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{B}_j}{b_j^2} \left[b_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu_{0j}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1 + \nu_{0j}}{2} b_j \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial \varphi} + \nu_{0j} b_j \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_{0j} h_{0j} b_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] &= -q_{1j}, \\ \frac{\tilde{B}_j}{b^2} \left[\frac{1 + \nu_{0j}}{2} b_j \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \nu_{0j}}{\partial \varphi^2} + \frac{1 - \nu_{0j}}{2} b_j^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \rho_{0j} h_{0j} b_j^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} \right] &= -q_{2j}, \\ \frac{\tilde{B}_j}{b^2} \left[\nu_{0j} b_j \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + K_j \nabla^2 \nabla^2 w + w + \rho_{0j} h_{0j} b_j^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] &= q_{3j} \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Решение уравнения (1) с учетом (3) может быть записано так:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial r}, \\ u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial \varphi}, \\ u_x &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{1}{\mu_2} \left(\mu_2^2 \Phi_3 + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где функции Φ_j — суть решения скалярных волновых уравнений

$$\begin{aligned}\Gamma_{aj}\nabla^2\Phi_{1j} &= \frac{1}{a_{1j}^2}\frac{\partial^2\Phi_{1j}}{\partial t^2}, \quad \Gamma_{aj} = 1 - \Gamma_{(\lambda,\mu)}^C(w_R) - i\Gamma_{(\lambda,\mu)}^S(w_R), \\ \Gamma_{bj}\nabla^2(\Phi_{2j}, \Phi_{3j}) &= \frac{1}{a_{2j}^2}\frac{\partial^2(\Phi_{2j}, \Phi_{3j})}{\partial t^2}, \quad \Gamma_{bj} = 1 - \Gamma_{\mu}^C(w_R) - i\Gamma_{\mu}^S(w_R).\end{aligned}\quad (5)$$

Решение любого из уравнений (5) может быть осуществлено следующим способом (в качестве иллюстрации рассмотрим первое уравнение (5)):

$$\frac{\partial^2\Phi_{1j}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_{1j}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_{1j}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi_{1j}}{\partial x^2} = \frac{1}{a_{1j}^2\Gamma_{aj}}\frac{\partial^2\Phi_{1j}}{\partial^2}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Решение последнего уравнения ищем в виде

$$\Phi_{1j} = \Phi_{1j}(r) \sin \alpha_{mj} \cos n\varphi e^{i\omega t}.$$

Подставляя его в (5), получим уравнение

$$\Phi_{1j}''(r) + \frac{1}{r}\Phi_{1j}'(r) - \left(\frac{n^2}{r^2} - \gamma_{1j}^2\right)\Phi_{1j}(r) = 0, \quad (6)$$

где $\gamma_{1j}^2 = \frac{w^2}{a_{1j}^2\Gamma_{aj}} - \alpha_{mj}^2 = \mu_{1j}^2 - \alpha_{mj}^2$.

Решение уравнения (6) будет иметь вид

1) $\Phi_{1mnj} = A_{1mnj}J_n(\gamma_{1mnj}r) + A_{1mnj}Y_n(\gamma_{1mnj}r)$ для $\text{Re}\gamma_{1j}^2 > 0$,

2) $\Phi_{1j} = A_{1j}lgr + A_{2j}$ для $\text{Re}\gamma_{1j}^2 = 0$,

3) $\Phi_{1mnj} = A_{1mnj}I_n(\gamma_{1mnj}r) + A_{2mnj}K_n(\gamma_{1mnj}r)$ для $\text{Re}\gamma_{1j}^2 < 0$.

Здесь $J_n(z)$, $Y_n(z)$ — функции Бесселя первого и второго родов n -го порядка, $I_n(z)$, $K_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго родов n -го порядка (комплексного аргумента z). В дальнейшем рассмотрим такой диапазон частот и волновых чисел, для которого γ_{1j} и γ_{2j} действительны и положительны. Следовательно, частные решения уравнений (5) в форме стоячих нулей в полой изотропной цилиндрической области имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi 1 &= \sum_k \sum_m \sum_n [A_{1mnj}J_n(\gamma_{1mnj}r) + A_{2mnj}J_n(\gamma_{1mnj}r)] \sin(\alpha_m x + \epsilon) \sin n\varphi e^{i\omega_{kmn}t}, \\ \Phi 2 &= \sum_k \sum_m \sum_n [A_{3mnj}J_n(\gamma_{2mnj}r) + A_{4mnj}J_n(\gamma_{2mnj}r)] \sin(\alpha_m x + \epsilon) \sin n\varphi e^{i\omega_{kmn}t}, \\ \Phi 3 &= \sum_k \sum_m \sum_n [A_{5mnj}J_n(\gamma_{2mnj}r) + A_{6mnj}J_n(\gamma_{2mnj}r)] \cos(\alpha_m x + \epsilon) \cos n\varphi e^{i\omega_{kmn}t},\end{aligned}\quad (7)$$

где A_{ikmnj} — постоянные, α_{mj} , n , γ_{1kmj} , γ_{2kmj} — волновые числа продольных, окружных и радиальных волн растяжения-сжатия и сдвига соответственно, причем

$$\gamma_{1j}^2 = \mu_{1j}^2 - \alpha^2, \quad \mu_{1j}^2 = \frac{w}{a_{1j}\Gamma_{aj}}, \quad a_{1j}^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_j},$$

$$\gamma_{2j}^2 = \mu_{2j}^2 - \alpha^2, \quad \mu_{2j}^2 = \frac{w}{a_{2j}}, \quad a_{1j}^2 = \frac{\lambda_{0j}}{\rho}, \quad \alpha_m = \alpha = m\pi/l \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Здесь и в дальнейшем для простоты индексы k, m, n и суммы опускаем.

Подставляя (7) в (4), находим перемещения

$$\begin{aligned}
 u_r &= \left\{ \gamma_1 [A_1 J'_n(\gamma_1 r) + A_2 J'_n(\gamma_1 r)] + \frac{n}{r} [A_3 J'_n(\gamma_2 r) + A_4 J'_n(\gamma_2 r)] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha \gamma_2}{\mu_2} [A_5 J'_n(\gamma_1 r) + A_6 J'_n(\gamma_2 r)] \right\} \sin(\alpha x + \epsilon) \cos n\varphi e^{i\omega t}, \\
 u_\varphi &= \frac{n}{r} \left\{ [A_1 J_n(\gamma_1 r) + A_2 J_n(\gamma_1 r)] + \frac{r\gamma_2}{\mu_2} [A_3 J'_n(\gamma_2 r) + A_4 J'_n(\gamma_2 r)] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha}{\mu_2} [A_5 J_n(\gamma_2 r) + A_6 J_n(\gamma_2 r)] \right\} \sin(\alpha x + \epsilon) \sin n\varphi e^{i\omega t}, \\
 u_x &= \left\{ [A_1 J_n(\gamma_1 r) + A_2 J_n(\gamma_1 r)] + \frac{\gamma_2^2}{\mu_2} [A_5 J'_n(\gamma_2 r) + A_6 J'_n(\gamma_2 r)] \right\} \cos(\alpha x + \epsilon) \sin n\varphi e^{i\omega t}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по γ_{1j} , r или γ_{1j} , r . Зная перемещения (8), видим, что по обычным формулам могут быть определены компоненты тензора напряжений [15]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rx} &= 2\mu\alpha\gamma_1 \left\{ A_1 J'_n(\gamma_1 r) + A_2 J'_n(\gamma_1 r) \right\} + \frac{n}{\gamma_1 r} [A_3 J'_n(\gamma_2 r) + A_4 J_n(\gamma_2 r)] - \\
 &\quad - \frac{\alpha\gamma_2}{\gamma_1\mu_2} \left(1 - \frac{\mu_2^2}{2\alpha^2} \right) [A_5 J'_n(\gamma_1 r) + A_6 J'_n(\gamma_2 r)] \left\{ \cos(\alpha x + \epsilon) \cos n\varphi e^{i\omega t}, \right. \\
 \sigma_{\gamma\gamma} &= -\frac{2\mu\alpha\gamma_1}{r} \left\{ A_1 x_2(\gamma_1\mu_2) + A_2 y_2(\gamma_1 r) \right\} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} [A_3 x_1(\gamma_2 r) + A_4 y_1(\gamma_2 r)] - \\
 &\quad - \frac{\alpha\gamma_2^2 r}{\gamma_1\mu_2} [A_5 J''_n(\gamma_2 r) + A_6 J''_n(\gamma_2 r)] \left\{ \sin(\alpha x + \epsilon) \sin n\varphi e^{i\omega t}, \right. \\
 \sigma_{r\varphi} &= \frac{2\mu\alpha\gamma_1}{r} \left\{ A_1 x_1(\gamma_1 r) + A_2 y_1(\gamma_1 r) \right\} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} [A_3 x_3(\gamma_2 r) + A_4 y_3(\gamma_2 r)] - \\
 &\quad - \frac{\alpha\gamma_2 r}{\gamma_1\mu_2} [A_5 x_1(\gamma_2 r) + A_6 y_1(\gamma_2 r)] \left\{ \sin(\alpha x + \epsilon) \sin n\varphi e^{i\omega t}, \right. \\
 \sigma_{x\varphi} &= \frac{2\mu\alpha n}{r} \left\{ A_1 J_n(\gamma_1 r) + A_2 Y_n(\gamma_1 r) \right\} + \frac{r\gamma_2}{2n} [A_3 J'_n(\gamma_2 r) + A_4 J_n(\gamma_2 r)] - \\
 &\quad - \frac{\alpha}{\mu_2} \left(1 - \frac{\mu_2^2}{2\alpha^2} \right) [A_5 J_n(\gamma_2 r) + A_6 Y_n(\gamma_2 r)] \left\{ \cos(\alpha x + \epsilon) \sin n\varphi e^{i\omega t}, \right. \\
 \sigma_{xx} &= 2\mu\alpha^2 \left\{ \frac{\alpha}{\mu_2} \left(1 + \frac{\lambda\mu_2^2}{2\mu\alpha^2} \right) [A_1 J_n(\gamma_1 r) + A_2 Y_n(\gamma_1 r)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma_2^2}{\alpha\mu_2} [A_5 J_n(\gamma_2 r) + A_6 J_n(\gamma_2 r)] \right\} \sin(\alpha x + \epsilon) \cos n\varphi e^{i\omega t}, \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2\mu\gamma_1}{r} \left\{ A_1 x_4(\gamma_1 r) + A_2 y_4(\gamma_1 r) \right\} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} [A_3 x_1(\gamma_2 r) + A_4 y_1(\gamma_2 r)] + \\
 &\quad + \frac{\alpha\gamma_2}{\mu_2\gamma_1} [A_5 x_5(\gamma_2 r) + A_6 y_5(\gamma_2 r)] \left\{ \sin(\alpha x + \epsilon) \cos n\varphi e^{i\omega t}, \right.
 \end{aligned}$$

где

$$x_1(z) = n \left[\frac{1}{z} J_n(z) - J'_n(z) \right], \quad x_2(z) = J'_n(z) + z J_n(z) \left[1 + \frac{(\lambda/2\mu)(\mu_1 r)^2 - n^2}{z^2} \right],$$

$$x_3(z) = J'_n(z) + zJ_n(z)(1/2 + n^2/z^2), \quad x_4(z) = J'_n(z) - zJ_n(z) \left[1 + \frac{(\lambda/2\mu)(\mu_1 r)^2 + n^2}{z^2} \right],$$

$$x_5(z) = \frac{n^2}{z} J_n(z) - J'_n(z);$$

здесь через $y_i(z)$ обозначены функции, подобные $x_i(z)$, но содержащие вместо $J_n(z)$ функции $Y_n(z)$. Вектор смещения $\vec{u}$ и тензор напряжений σ_{ik} в деформируемом твердом теле на ограничивающих их поверхностях должны удовлетворять определенным граничным и начальным условиям.

1.2. Собственные колебания вязкоупругого цилиндрического тела. Пусть ортотропная оболочка скреплена с полым цилиндром. В качестве системы уравнений, описывающей движение оболочки, возьмем выражения (7). Для простоты будем считать, что края цилиндра и оболочки могут поворачиваться без деформирования в продольном направлении. Это равносильно тому, что торцы цилиндра скреплены с гибкой мембраной, абсолютно жесткой в своей плоскости. Тогда граничные условия на торцах будут удовлетворены, если для напряжений и смещений будут приняты выражения (7). Заметим, что эти решения позволяют удовлетворить следующим граничным условиям [13]:

$$\begin{aligned} \nu = w = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad u_r = u_\varphi = \sigma_x = \sigma_r = 0 \quad (x = 0, l), \\ \sigma_{rr} = -q_1, \quad \sigma_{r\varphi} = -q_2, \quad u_x = u, \quad u_\varphi = \nu, \quad u_r = w \quad (r = b), \\ \sigma_{rx} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rr} = 0 \quad (r = a). \end{aligned}$$

Не удовлетворяется только условие отсутствия касательных напряжений в концевых сечениях цилиндра, что приводит к некоторому завышению частот свободных колебаний. Удовлетворяя граничным условиям (7), получим девять алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^9 A_j a_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, 9}), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha H J'_n(\gamma_1 b), \quad a_{12} = \alpha H Y'_n(\gamma_1 b), \quad a_{13} = \frac{\alpha n H}{2\gamma_1 b} J_n(\gamma_2 b), \\ a_{14} &= \frac{\alpha n H}{2\gamma_1 b} Y_n(\gamma_2 b), \quad a_{15} = \frac{\alpha^2 n H}{\mu_2 \gamma_1} J'_n(\gamma_2 b), \\ a_{16} &= \frac{\alpha^2 n H}{\mu_2 \gamma_1} Y'_n(\gamma_2 b), \\ a_{17} &= \lambda_m^2 + \frac{B_{1212}}{B_{1111}} n^2 - \zeta \omega^2, \quad a_{18} = -\frac{B_{1122} + B_{1212}}{B_{1111}} n \lambda_m, \quad a_{19} = -\frac{B_{1122}}{B_{1111}} \lambda_m, \\ a_{21} &= \frac{H}{b} x_1(\gamma_1 b), \quad a_{22} = \frac{H}{b} y_1(\gamma_1 b), \quad a_{23} = \frac{H \gamma_2}{b \gamma_1} x_3(\gamma_1 b), \\ a_{24} &= \frac{H \gamma_2}{b \gamma_1} y_3(\gamma_1 b), \\ a_{25} &= \frac{\alpha H \gamma_2}{b \mu_2 \gamma_1} x_1(\gamma_2 b), \quad a_{26} = \frac{\alpha H \gamma_2}{b \mu_2 \gamma_1} y_1(\gamma_2 b), \\ a_{27} &= -\frac{B_{1122} + B_{1212}}{B_{1111}} n \lambda_m, \quad a_{28} = \frac{B_{1212}}{B_{1111}} n^2 + \frac{B_{1122} + B_{1212}}{B_{1111}} \lambda_m - \zeta \omega^2, \quad a_{29} = \frac{B_{2222}}{B_{1111}} n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \frac{H}{b} x_2(\gamma_1 b), \quad a_{32} = \frac{H}{b} y_2(\gamma_1 b), \quad a_{33} = \frac{H\gamma_2}{b\gamma_1} x_1(\gamma_2 b), \\
a_{34} &= \frac{H\gamma_2}{b\gamma_1} y_1(\gamma_2 b), \quad a_{35} = \frac{\alpha H\gamma_2^2}{\mu_2\gamma_1} J_n''(\gamma_2 b), \quad a_{36} = \frac{\alpha H\gamma_2^2}{\mu_2\gamma_1} Y_n''(\gamma_2 b), \\
a_{37} &= \frac{B_{1122} + B_{1212}}{B_{1111}} \lambda_m, \quad a_{38} = \frac{B_{2222}}{B_{1111}} n, \\
a_{29} &= K^2 \left(\frac{B_{2222}}{B_{1111}} n^4 + 2 \frac{B_{1122} + 2B_{1212}}{B_{1111}} n^2 \lambda_m^2 + \lambda_m^4 \right) - \frac{B_{2222}}{B_{1111}} + \zeta \omega^4, \\
a_{41} &= \alpha J_n(\gamma_1 b), \quad a_{42} = \alpha Y_n(\gamma_1 b), \quad a_{43} = a_{44} = 0, \\
a_{45} &= \frac{\gamma_2^2}{\mu_2 \Gamma_{k\mu}} J_n(\gamma_1 b), \quad a_{46} = \frac{\gamma_2^2}{\mu_2 \Gamma_{k\mu}} Y_n(\gamma_1 b), \\
a_{47} &= a_{48} = a_{49} = 0, \\
a_{51} &= -\frac{n}{b} J_n(\gamma_1 b), \quad a_{52} = -\frac{n}{b} Y_n(\gamma_1 b), \quad a_{53} = -\gamma_2 J_n'(\gamma_2 b), \\
a_{54} &= -\gamma_2 Y_n'(\gamma_2 b), \quad a_{55} = \frac{\alpha n}{b\mu_2} J_n(\gamma_2 b), \quad a_{56} = \frac{\alpha n}{b\mu_2} Y_n(\gamma_2 b), \\
a_{57} &= a_{58} = -1, \quad a_{59} = 0, \\
a_{61} &= \gamma_1 J_n'(\gamma_1 b), \quad a_{62} = \gamma_1 Y_n'(\gamma_1 b), \quad a_{63} = \frac{n}{b} J_n(\gamma_2 b), \\
a_{64} &= \frac{n}{b} Y_n(\gamma_2 b), \quad a_{65} = \frac{\alpha\gamma_2}{\mu_2} J_n'(\gamma_2 b), \quad a_{66} = \frac{\alpha\gamma_2}{\mu_2} Y_n'(\gamma_2 b), \\
a_{67} &= a_{68} = a_{69} = 0, \\
a_{71} &= J_n'(\gamma_1 Mb), \quad a_{72} = Y_n'(\gamma_1 Mb), \\
a_{73} &= \frac{n}{2Mb\gamma_1} J_n(\gamma_2 Mb), \quad a_{74} = \frac{n}{2Mb\gamma_1} Y_n(\gamma_2 Mb), \\
a_{75} &= -\frac{\alpha\gamma_2}{\mu_2\gamma_1} \left(1 - \frac{\mu_2^2}{2\alpha^2} \right) J_n'(\gamma_2 Mb), \quad a_{76} = -\frac{\alpha\gamma_2}{\mu_2\gamma_1} \left(1 - \frac{\mu_2^2}{2\alpha^2} \right) Y_n'(\gamma_2 Mb), \\
a_{77} &= a_{78} = a_{79} = 0, \\
a_{91} &= x_2(\gamma_1 Mb), \quad a_{92} = y_2(\gamma_1 Mb), \quad a_{93} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} x_1(\gamma_2 Mb), \\
a_{94} &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_1(\gamma_2 Mb), \quad a_{95} = -\frac{\alpha\gamma_2 Mb}{\mu_2\gamma_1} J_n''(\gamma_2 Mb), \quad a_{96} = -\frac{\alpha\gamma_2 Mb}{\mu_2\gamma_1} Y_n''(\gamma_2 Mb), \\
a_{97} &= a_{98} = a_{99} = 0, \\
a_{81} &= x_1(\gamma_1 Mb), \quad a_{82} = y_1(\gamma_1 Mb), \quad a_{83} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} x_3(\gamma_2 Mb), \\
a_{84} &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y_3(\gamma_2 Mb), \quad a_{85} = -\frac{\alpha\gamma_2}{\mu_2\gamma_1} x_1(\gamma_2 Mb), \quad a_{86} = -\frac{\alpha\gamma_2}{\mu_2\gamma_1} y_1(\gamma_2 Mb), \\
a_{87} &= a_{88} = a_{89} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь дополнительно введены следующие обозначения:

$$\lambda_m = b\alpha_m, \quad 0 \leq \left(M = \frac{a}{b} \right) \leq 1, \quad H = 2\mu\gamma_1 \frac{b^2}{B_{1111}h_0}, \quad \zeta = \frac{\rho_0 b^2}{B_{1111}}.$$

Частоты свободных изгибных колебаний определяются при заданных параметрах волнообразования n , λ_m из условия равенства нулю определителя

$$a_{ij} = 0.$$

Если цилиндр скреплен с металлической оболочкой, то согласно выражениям (7) в формулах (10), нужно положить

$$\begin{aligned}\frac{B_{1212}}{B_{1111}} &= \frac{1 - \nu_0}{2}, \quad \frac{B_{1122} + B_{1212}}{B_{1111}} = \frac{1 + \nu_0}{2}, \quad \frac{B_{1122}}{B_{1111}} = \nu_0, \quad \frac{B_{2222}}{B_{1111}} = 1, \\ \frac{2B_{1122} + 4B_{1212}}{B_{1111}} &= 2, \quad \frac{B_{1111}}{b^2} = \frac{B_0}{b^2}, \\ \frac{\rho_0 b^2}{B_{1111}} &= \frac{\rho_0 h_0 b^2}{B_0}, \quad H = 2\gamma_1 \frac{b^2}{B_0}, \quad \zeta = \rho_0 h_0 \frac{b^2}{B_0}.\end{aligned}$$

Для бесканального цилиндра, скрепленного тонкой оболочкой, будут справедливы все выведенные формулы, члены которых, содержащие функции Бесселя второго рода, необходимо приравнять нулю. Для цилиндра с поверхностями свободы от напряжений, система уравнений (9) сводится к шести уравнениям. Если цилиндр скреплен с металлической оболочкой, то при $B_{1111} = \infty$ или $E_0 = \infty$ нужно положить $\zeta = 0$, $H = 0$. Тогда система (9) сведется также к шести уравнениям. При малой толщине оболочки, для определения частот собственных колебаний можно получить более простые зависимости, рассматривая, например, систему “цилиндр – оболочка” как многослойную цилиндрическую оболочку.

1.3. Определение частот и форм крутильных колебаний вязкоупругого цилиндрического тела. Полагая в общих уравнениях движения радиальные и продольные смещения равными нулю, а тангенциальные — не зависящими от угла, уравнения крутильных колебаний могут быть записаны в виде

$$\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Для оболочки уравнение крутильных колебаний следующее:

$$-q_2 = \frac{1 - \nu_0}{2} B_0 \Gamma_{kE} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \left(\frac{1 - \nu_0}{2} B_0 \Gamma_{kB} = B_{2222} \Gamma_{kE22} h_0 \right).$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$u_\varphi(r, x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_k(r) X_m(x) \left(B_{km} \cos \omega_{km} + C_{km} \sin \omega_{km} \right),$$

где константы B_{km} , C_{km} находим из начальных условий, а функции $V_k(r)$, $C_k(x)$ — из следующих уравнений, в которых для удобства записи индексы опускаем:

$$\begin{aligned}V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) + V(r) \left(\gamma_2^2 - \frac{1}{r^2} \right) &= 0, \\ X''(x) + \alpha_m^2 X(x) &= 0;\end{aligned} \quad (12)$$

здесь

$$\gamma_2^2 = \mu_2^2 - \alpha_m^2, \quad \mu_2 = \omega_{km} / \alpha_2, \quad \alpha_2^2 = \mu_0 \Gamma_k / \rho.$$

Решение уравнений (12) имеет вид

$$V(r) = A_1 J_1(\gamma_2 r) + A_2 Y_1(\gamma_2 r), \quad X(x) = D_1 \cos \alpha_m + D_2 \sin \alpha_m,$$

где A_1 , A_2 , D_1 , D_2 — произвольные постоянные, которые находим из граничных условий.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При исследовании собственных колебаний задача сводится к определению комплексной собственной частоты и соответствующих форм колебаний. Для определения корней частотных трансцендентных уравнений, в общем случае, применяются численные методы (комплекс программного обеспечения MATLAB и MULLER) и вычисление определителей при заданных частотах или волновых числах.

Задача ставится следующим образом: определить комплексные собственные частоты и соответствующие формы колебаний при заданных физико-механических, вязкоупругих и геометрических параметрах механической системы (конструкция конечной длины, состоящая из двух оболочек с наполнителем). Комплексные частоты затухающих изгибных колебаний определяются при заданных геометрических, физико-механических параметрах и параметрах волнообразования n , λ_m , параметрах реологических свойств A_{E_0} , A_{E_z} , α_0 , α_z , β_0 , β_z . При затухающих свободных колебаниях комплексных собственных частот они определяются из условия равенства нулю определителя девятого порядка.

Составлена программа на языке Фортран на основе методов Мюллера (численное решение трансцендентного уравнения), Гаусса, Лапласа, а также программа для вычисления специальных функций комплексного аргумента Бесселя и Ханкеля. В качестве примера рассмотрены плоские (плоские деформированные состояния) и осесимметричные ($n = 0$) или не осесимметричные колебания. Тогда определитель будет, соответственно, шестого и четвертого порядков.

Рассмотрим пример, изображенный на рис 1. Предполагается, что оболочка и наполнитель изготовлены из изотропных материалов. Тогда для радиальных, продольных и крутильных колебаний рассматриваемой механической системы характеристическое уравнение вырождается в более простое алгебраическое уравнение. Сложность решаемой задачи заключается в нахождении комплексных собственных значений вязкоупругой системы “оболочка – цилиндр” с массами на концах. Параметрами, которые используются в алгоритме и программе, являются радиус канала, толщина оболочки h_0 , модуль мгновенной упругости цилиндра E_0 . Разработанная программа позволяет вычислять значения комплексной частоты при различных значениях n , а также различных значениях геометрических и физико-механических параметров системы. При работе программы используются стандартные процедуры вычисления функций Бесселя и процедура решения трансцендентных уравнений. Исходные данные составляют целые числа, действительные числа и массивы. Расчеты проведены при следующих данных [15]:

$$b = 5.75 \text{ см}, \mu = 20 \text{ МПа}, \rho = 0.12 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3,$$

$$\rho_0 = 7.8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3, a_1 = 700 \text{ м/с}, a_2 = 310 \text{ м/с}.$$

Параметры, которые вводятся, задаются в программе в виде массива. А постоянные величины вводятся в виде действительных или комплексных чисел. На печать выдаются результаты вычисления: набор значений геометрических и физико-механических параметров h_0 , A_{E_0} , A_{E_z} , α_0 , α_z , β_0 , β_z , десять корней характеристического уравнения, которые соответствуют ω_{lk} ($k = 1, 10$) в виде массива $XX(1 \times 10)$, десять соответствующих частот f_p в виде массива $EP(1 \times 10)$. Для вычисления частот свободных продольных колебаний с массами закрепленных участков на концах перепишем определитель в виде

$$\alpha_m^2 = \frac{1}{B} \left(\mu(\omega_R) \frac{A_2}{A_1} \omega_{2km} - A \omega_{2km}^2 \right),$$

где

$$\begin{aligned} B &= h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} E_0 - B_{1111} \right), \quad A = \frac{\rho_0}{\rho} h_0 \mu_0 \Gamma, \\ A_2(\omega) &= Y_1(\omega_{2km} b) J_1(\omega_{2km} M b) - J_1(\omega_{2km} b) Y_0(\omega_{2km} M b), \\ A_1(\omega) &= Y_1(\omega_{2km} M b) J_0(\omega_{2km} b) - J_1(\omega_{2km} M b) Y_0(\omega_{2km} b). \end{aligned}$$

Остановимся на решении уравнения

$$\begin{aligned} f &= \tan \alpha_m(\omega) l [B_2^2 \alpha_m^2(\omega) - M_1 M_2 (\mu_0 \Gamma / \rho)^2 (\omega_{2km}^2 + 2(1 + \nu) \alpha_m^2(\omega))^2], \\ B_2 \alpha_m \mu_0 / \rho \left(\omega_{2km}^2 + 2(1 + \nu) \alpha_m^2(\omega) \right) (M_1 + M_2) &= 0. \end{aligned}$$

Зная набор ω_{2km} , $k = \overline{1, 10}$, вычисляем значения α_m ($m = \overline{1, 10}$) и по приведенным формулам — функции частоты свободных колебаний ω_{2km} . Заметим, что при решении уравнения относительно γ_{2km} необходимо учесть, что в уравнении имеются особые точки, т. е. при некоторых значениях γ_{2km} $\tan \alpha_m l$ стремится к бесконечности. Необходимо обойти эти точки при переборе табличных значений γ_{2km} (когда для каждого корня выделяется интервал, на котором находится единственное решение). Для этого вычисляем сначала ω_{2km} , а затем α_m с помощью соотношений

$$\tan \alpha_m(\omega) l \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \alpha_m l = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \alpha_m(\omega) = \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + n \right).$$

Пусть выбран интервал, на котором функция f один раз знакопеременная. Проверяем, попадает ли какая-либо особая точка в этот интервал. Пусть значения концов этого интервала γ_{2km} и $\gamma_{2km}(k+1)$. Решаем уравнение $\alpha_m(\omega) = \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + n \right)$, выразив α_m через γ_{2km} , если уравнение имеет решение в этом интервале, то переходим к определению следующего интервала. Если нет решения в этом интервале, то выходим на метку, после которой идет часть программы для вычисления корня. Также составлена программа на основе метода Гаусса и для исследования амплитудно-частотных характеристик в различных точках конструктивных элементов системы “оболочка–цилиндр” при воздействии гармонических нагрузок. Численное изучение спектра частот приводит к следующим результатам.

В диапазоне реальных значений фазового сдвига, которые имеют современные полимеры, резонансные частоты системы “оболочка–цилиндр” практически не зависят от величины декремента колебаний и могут быть определены с погрешностью не более 0.5, ..., 1% из упругой задачи с учетом динамического модуля упругости или скоростей звуковых волн. Характер спектра собственных колебаний системы “оболочка–цилиндр” тесно связан с возникновением двух типов стоячих волн: сдвиговых и волн растяжения-сжатия в цилиндре. Первая парциальная частота, в основном, зависит от отношения $M = a/b$. Расчеты показывают, что при одном и том же отношении M и по мере увеличения наружного диаметра цилиндра основная частота значительно уменьшается, так как она обратно пропорциональна наружному радиусу конструкции. Кроме того, частота радиальных колебаний существенно зависит от модуля упругости цилиндра. При малых значениях модуля упругости цилиндра ($E \sim 5$) основная частота радиальных колебаний возрастает по мере уменьшения толщины цилиндра.

Пусть

$$1 - h_0/b = 0.005, \quad 2 - h_0/b = 0.01, \quad 3 - h_0/b = 0.05.$$

Для динамических модулей цилиндра, расположенных в интервале $[50, \dots, 500]$ и выше, основная резонансная частота радиальных колебаний может уменьшаться. Данная зависимость становится менее заметной с увеличением толщины оболочки, когда все частотные

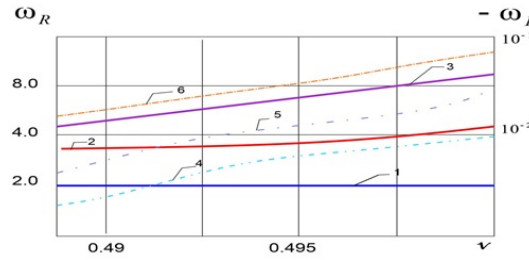


Рис. 2. Зависимость основной частоты радиальных колебаний от коэффициента Пуассона для $M = 0.4$, $E/E_0 = 4 \cdot 10^{-4}$

характеристики для выбранных значений модуля упругости цилиндра возрастают с уменьшением свода. Поэтому вследствие зависимости модуля упругости цилиндра от температуры, частоты системы, в принципе, могут возрастать или уменьшаться с уменьшением свода цилиндра. Расчеты показывают, что при большом своде цилиндра влиянием инерционности оболочки можно пренебречь. При этом частоты колебаний будут возрастать всего лишь на несколько процентов. Коэффициент Пуассона ν при малых значениях h_0/b практически не влияет на величину резонансных частот. При $h_0/b \geq 0.01$ с увеличением ν от 0.49 до 0.499 резонансные частоты возрастают (рис. 2). При увеличении толщины оболочки комплексные частоты (реальные и мнимые части) колебаний увеличиваются незначительно. Характер изменения реальных и мнимых частей оболочки почти одинаков. Это можно объяснить тем, что при увеличении толщины внешнего и внутреннего слоев оболочки перемещения внутренних слоев (заполнителя) цилиндра по сравнению с перемещением внешнего и внутреннего слоев, скрепленных с оболочкой, возрастают. Следовательно, возрастают инерционные силы цилиндра (заполнителя), препятствующие увеличению частоты. Характерно, что при прочих равных условиях частоты системы незначительно зависят от материала, из которого изготовлена оболочка, рассчитанная на одно и то же давление. На рис. 3 приведена зависимость основной частоты радиальных колебаний цилиндра от изменения радиуса канала (a/b). Первая (реальные части собственной частоты) и четвертая (мнимые части собственной частоты) кривые соответствуют 1; 4 – h_0 цилиндру, вторая (реальные части собственной частоты) и пятая (мнимые части собственной частоты) кривые соответствуют 2; 5 – $2 \cdot 10^5$, третья (реальные части собственной частоты) и шестая (мнимые части собственной частоты) кривые соответствуют 3; 6 – $E_0 = 10^9 \rightarrow \infty$ цилиндру, скрепленному с абсолютно жесткой оболочкой, вторая – со стальной оболочкой, толщиной $h_0 = 0.04$ см и третья кривая характеризует частотную характеристику свободного цилиндра.

Из рисунков видно, что характер изменения реальной и мнимой частей собственной частоты, в зависимости от параметров, изменяется по немонотонным функциям. Частота ра-

диальных колебаний $\omega_{R01} = \omega_{R1}/\Omega$. Здесь $\Omega = \sqrt{\frac{E_0}{\rho b^2(1-\nu_0^2)}}$ – квадрат собственной ча-

стоты радиальных колебаний оболочки. При расчетах были приняты следующие данные: $\nu = 0.45$, $\nu_0 = 0.3$, $h_0/b = 0.01$, $M = a/b = 0.1$. На рис. 4 приведена зависимость основной частоты радиальных колебаний от относительной плотности при различных значениях модулей упругости заполнителя и оболочки ($1 - E/E_0 = 10^{-3}$, $2 - E/E_0 = 10^{-4}$). Видно, что с увеличением отношения плотностей собственные частоты цилиндра с жесткой оболочкой монотонно снижаются и приближаются к асимптотике. Если для свободного цилиндра эта характеристика является монотонно падающей, то для скрепленного с оболочкой она

возрастает. Расхождения между кривыми 1, 2, 3 особенно велики при малых толщинах цилиндра, т.е. при $M \rightarrow 1$. С уменьшением отношений E/E_0 , b/h_0 кривая 2 все более приближается к кривой 1.

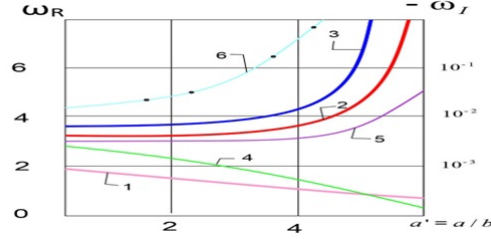


Рис. 3. Зависимость основной частоты радиальных колебаний от изменения радиуса канала (1, 4 – h_0 , 2, 5 – $2 \cdot 10^5$, 3, 6 – $E_0 = 10^9 \rightarrow \infty$ МПа)

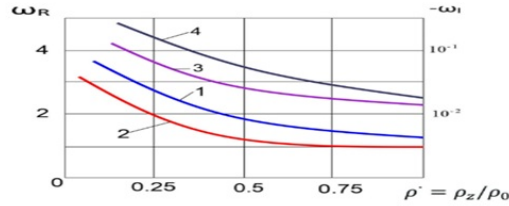


Рис. 4. Зависимость основной частоты радиальных колебаний от относительной плотности (1 – $E/E_0 = 10^{-3}$, 2 – $E/E_0 = 10^{-4}$)

На рис. 5 приведена зависимость мнимой части основной частоты радиальных колебаний от отношений скоростей при различных значениях

$$\nu = 0.45, \nu_0 = 0.3, h_0/b = 0.01, 1.M = a/b = 0.1, 2.M = a/b = 0, 3.M = a/b = 0.2$$

толщины заполнителя.

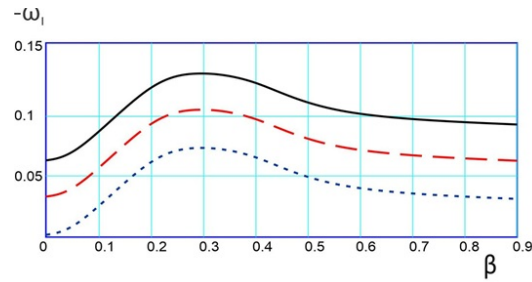


Рис. 5. Зависимость мнимой части основной частоты радиальных колебаний от отношений скоростей при различных значениях $\nu = 0.45$; $\nu_0 = 0.3$; $h_0/b = 0.01$; 1. $M = a/b = 0.1$; 2. $M = a/b = 0$; 3. $M = a/b = 0.2$

Видно, что коэффициент демпфирования изменяется при маленьких значениях отношения скоростей, а в дальнейшем приближается к асимптотике. При небольших толщинах свода уменьшение диаметра канала приводит к резкому изменению частот колебаний, стремящихся в пределе к бесконечности. Формы собственных колебаний показаны на рис. 6,

из которого видно, что максимальное значение тангенциальных деформаций при плоских колебаниях основного тона будет на канале цилиндра. В расчетах были приняты следующие основные характеристики:

$$b = 100 \text{ см}, a = 20, h_0 = 0.1 \text{ см}, \nu_0 = 0.3, \\ E_0 = 10^5 \text{ МПа}, \rho_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}, \rho = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}.$$

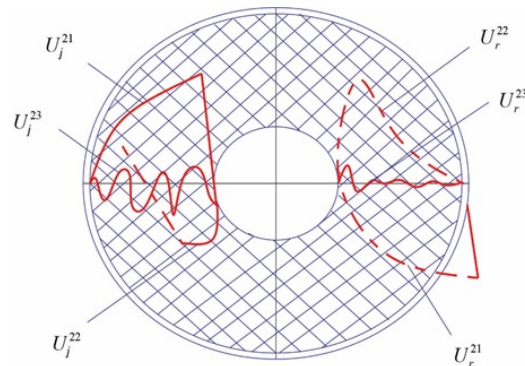


Рис. 6. Изменение радиальной и тангенциальной составляющих смещения по радиусу : b -цилиндр скреплен с жестким корпусом

При этом парциальные частоты осесимметричной формы собственных колебаний превышают частоты и продольных, и радиальных колебаний. С уменьшением длины системы собственная частота осесимметричных колебаний стремится к частоте радиальных колебаний, так как радиальная компонента движения возрастает. Частоты осесимметричных колебаний довольно чувствительны к изменению ρ/ρ_0 и поэтому пренебрежение инерционностью цилиндра ведет к значительному завышению частот. Применительно к деформациям сдвига при крутильных и продольных колебаниях для существующих отношений жесткостей системы “оболочка – цилиндр” можно предполагать, что жесткость цилиндра мала по сравнению с жесткостью оболочки. Поэтому оболочку можно считать абсолютно твердым телом при исследовании амплитудно-частотных характеристик свободной системы “цилиндр – оболочка”. Характерно, что масса присоединенных элементов (скрепленных с оболочкой или цилиндром — раскрепленные участки) в значительной степени снижает частоты крутильных и продольных колебаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработаны математическая постановка, методика решения и алгоритм для исследования задач собственных колебаний в пространственных трехслойных цилиндрических телах с учетом вязкоупругих свойств материалов.

При увеличении толщины оболочки частоты колебаний увеличиваются незначительно. Это можно объяснить тем, что при увеличении толщины оболочки перемещения внутренних слоев цилиндра по сравнению с перемещением внешнего слоя, скрепленного с оболочкой, возрастают. Следовательно, возрастают инерционные силы цилиндра, препятствующие увеличению частоты. Характерно, что при прочих равных условиях частоты разработаны математическая постановка, методика решения и алгоритм для исследования задач о колебательных процессах в пространственных трехслойных цилиндрических телах с учетом вязкоупругих свойств материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. *Методы прикладной вязкоупругости* (Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2003).
- [2] Safarov I.I., Teshaeв M.Kh., Boltayev Z.I., Ruziev T.R. *Wave Propagation in a Well Located in an Isotropic Viscoelastic Medium*, Internat. J. Engineer. Trends Techn. **70** (6), 252–256 (2022).
- [3] Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах* (Наука, М., 1973).
- [4] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах* (Наук. думка, Киев, 1981).
- [5] Сафаров И.И., Тешаев М.Х. *Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. Механ. (83), 166–179 (2023).
- [6] Кулеш М.А., Шардаков И.Н. *Волновая динамика упругих сред* (Пермь, Пермск. ун-т., 2007).
- [7] Тешаев М.Х., Каримов И.М., Умаров А.О., Жураев Ш.И. *Дифракция гармонических сдвиговых волн на эллиптической полости, находящейся в упругой среде*, Изв. вузов. Матем. (8), 64–70 (2023).
- [8] Сафаров И.И. *Колебания и волны в диссипативно-неоднородных средах и конструкциях* (Фан, Ташкент, 1992).
- [9] Уайт Б. *Поверхностные упругие волны*, Вестн. ин-та инженеров по электротехн. и радиоэлектрон. **58** (8), 68–110 (1970).
- [10] Старовойтова И.А., Хозин В.Г., Сулейманов А.М. и др. *Одноосноориентированные армированные пластики: анализ состояния, проблемы и перспективы развития*, Изв. Казанск. гос. арх.-строит. ун-та **4** (22), 332–339 (2012).
- [11] Atarsia A., Boukhili R. *Effect of pulling speed on the sizes of the liquid, gel and solid zone, during thermoset pultrusion*, J. Reinf. Plast. Comp. (19 (18)), 1493–1503 (2000).
- [12] Коган Е.А., Юрченко А.А. *Построение амплитудно-частотных характеристик трехслойных пластин конечного прогиба*, Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Международн. симпозиум им. А.Г. Горшкова, Ярополец, М., 16–20 февраля 2009 г. Тез. докл. М., МАИ, 89–90, 2009).
- [13] Hu Hao, Fu Yi-ming *Нелинейные динамические реакции вязкоупругих ортотропных симметричных слоистых пластин*, J. Hunan Univ. Natur. Sci. **30** (5), 79–83 (2003).
- [14] Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. *Нелинейные колебания многослойных трансверсально изотропных пластин*, Вестн. Тамбовск. гос. тех. ун-та **6** (2), 258–264 (2000).
- [15] Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. *Вынужденные нелинейные колебания многослойных пластин*, Вестн. Тамбовск. гос. тех. ун-та **8** (3), 483–490 (2002).
- [16] Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. *Нелинейные колебания многослойных пластин*, Вестн. ТГУ. Сер. естеств. техн. наук **9** (2), 264–267 (2004).
- [17] Chen Chun-Sheng, Cheng Wei-Seng, Chien Rean-Der, Doong Ji-Liang *Large amplitude vibration of an initially stressed cross ply laminated plates*, Appl. Acoust. **63** (9), 939–956 (2002).
- [18] Maloy K., Singha, Ganapathi M. *Large amplitude free flexural vibration of laminated composite skew plates*, Internat. J. Non-Linear Mech. **39** (10), 1709–1720 (2004).
- [19] Wang X., Zhong Z. *Three-dimensional solution of smart laminated anisotropic circular cylindrical shells with imperfect bonding*, Internat. J. Solids Struct. **40** (22), 5901–5921 (2003).
- [20] Wu C.-P., Lo J.-Y. *Three-Dimensional Elasticity Solutions of Laminated Annular Spherical Shells*, J. Engin. Mech. **126** (8), 882–885 (2000).
- [21] Teshaeв M.Kh., Safarov I.I., Kuldashov N.U., Ishmatov M.R., Ruziev T.R. *On the Distribution of Free Waves on the Surface of a Viscoelastic Cylindrical Cavity*, J. Vibrat. Engin. Techn. **8** (4), 579–585 (2020), DOI: 10.1007/s42417-019-00160-x.
- [22] Комиссарова Г.Л. *Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах*, Прикл. механ. **38** (1), 124–134 (2002).
- [23] Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. *Свойства поверхностных волн в упругом полой цилиндре*, Акуст. журн. **7** (3), 39–48 (2004).
- [24] Safarov I.I., Nuriddinov B.Z., Teshaeв M.Kh., Marasulov A.M. *Propagation of own non-axisymmetric waves in viscoelastic three-layered cylindrical shells*, Engin. J. **25** (7), 97–107 (2021).
- [25] Safarov I.I., Teshaeв M.Kh., Boltayev Z.I., Ishmatov M.R., Ruziyev T.R. *Propagation of Proper Waves in a Viscoelastic Timoshenko Plate of Variable Thickness*, Intern. J. Engin. Trends Techn. **71** (1), 25–30 (2023).
- [26] Тютеекин В.В. *Спирально-винтовые волны в упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью*, Акуст. журн. **54** (4), 517–521 (2008).

- [27] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. *Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости*, Инженерн. журн.: наука и инновации **7** (19) (2013).
- [28] Safarov I.I., Teshaeв M.H., Boltaev Z.I., Akhmedov M.Sh. *Mathematical modeling of dynamic processes in a toroidal and cylindrical shell interacting with a liquid*, Raleigh, North Carolina, USA: Open Sci. Publ., 223 (2018).
- [29] Safarov I.I., Teshaeв M.Kh., Boltaev Z.I., Ishmamatov M.R., Ruziyev T.R. *Propagation of Proper Waves in a Viscoelastic Timoshenko Plate of Variable Thickness*, Intern. J. Engin. Trends Techn. **71** (1), 25–30 (2023).
- [30] Bao X.L., Raju P.K., Uberall H. *Circumferential waves on an immersed, fluid-filled elastic cylindrical shell*, J. Acoust. Soc. Am. **105** (5), 2704–2709 (1999).
- [31] Safarov I., Teshaeв M. *Control of resonant oscillations of viscoelastic systems*, Theor. Appl. Mech. **51** (1), 1–12 (2024), DOI: <https://doi.org/10.2298/TAM220510007S>.

Исмонил Иброхимович Сафаров

Ташкентский химико-технологический институт,
ул. Навои, д. 32, г. Ташкент, 100011, Республика Узбекистан,
e-mail: safarov54@mail.ru

Шухрат Исраилович Жураев

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200117, Республика Узбекистан,
e-mail: sh.i.juraev@buxdu.uz

Мухсин Худойбердиевич Тешаев

Бухарское отделение Института математики им. В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200117, Республика Узбекистан,
e-mail: muhsin_5@mail.ru

Ботир Шукуруллоевич Усмонов

Ташкентский химико-технологический институт,
ул. Навои, д. 32, г. Ташкент, 100011, Республика Узбекистан

I.I. Safarov, Sh.I. Juraev, M.Kh. Teshaev, and B.Sh. Usmonov

Natural vibrations of a viscoelastic three-layer cylindrical body

Abstract. The natural vibrations of a viscoelastic coaxial cylindrical body are considered; the space between the shells is filled with a viscoelastic material. The relationship between stress and strain satisfies the Boltzmann–Voltaire hereditary integral. As an example of a viscoelastic material, a three-parametric relaxation kernel with a weak Rzhnitsyn–Koltunov singularity is used. The problems of small vibrations of the mechanical system under consideration are solved. Equations of small vibrations of the aggregate in displacements are obtained on the basis of Lamé’s differential equations of the theory of viscoelasticity with complex coefficients. The equations of vibration of the outer and inner shells, which are made of viscoelastic material, satisfy the equations of motion of the shell, subject to the Kirchhoff–Love hypotheses. The problem is solved using the Green–Lamb transformation and the complex amplitude method. The stresses and displacements of each shell and filler are expressed through special functions of the Bessel and Neumann complex argument of an arbitrary order. A frequency equation with a complex parameter is obtained, which is solved numerically using the Muller method. For structurally inhomogeneous mechanical systems, the dependences of several modes of the complex natural frequency (real and imaginary parts) on various parameters of three-layer bodies are comparatively assessed. The application of asymptotic and numerical methods for solving frequency equations with a complex-output parameter is also comparatively assessed.

Keywords: natural vibration, shell, viscoelastic material, filler, three-layer body.

Ismail Ibrahimovich Safarov

*Tashkent Institute of Chemical Technology,
32 Navoi str., Tashkent, 100011 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: safarov54@mail.ru

Shukhrat Israilovich Juraev

*Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200117 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: sh.i.juraev@buxdu.uz

Mukhsin Khudoyberdievich Teshaev

*Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after Romanovsky at the
Academy of Science of the Republic of Uzbekistan,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200117 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: muhsin_5@mail.ru

Botir Shukurulloyevich Usmonov

*Tashkent Institute of Chemical Technology,
32 Navoi str., Tashkent, 100011 Republic of Uzbekistan*