

Н. БХАРТИ, А. СИНГХ

ЗАМЕЧАНИЕ О НОРМАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВАХ, КАСАЮЩЕЕСЯ НЕИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Аннотация. Изучается нормальность семейства мероморфных функций, дифференциальные многочлены которых удовлетворяют определенному условию, что существенно улучшает и обобщает некоторые недавние результаты Дж.Ф. Чена (Filomat, **31** (14), 4665–4671, 2017). Более того, с помощью примеров показывается, что данный результат является точным.

Ключевые слова: нормальное семейство, дифференциальный многочлен, мероморфная функция.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-3-3-16

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Семейство $\mathcal{F}$ мероморфных функций в области $D \subseteq \mathbb{C}$ называется *нормальным* в D , если из любой последовательности функций из $\mathcal{F}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится локально равномерно в D относительно сферической метрики к предельной функции, которая либо является мероморфной в D , либо постоянной ∞ . Семейство $\mathcal{F}$ является нормальным в точке $z_0 \in D$ тогда и только тогда, когда оно нормально в некоторой окрестности z_0 ([1], [2]). Теория нормальных семейств играет важную роль в комплексном анализе и активно используется для изучения теоремы Римана об отображении, динамических систем, конформных отображений и многих других интересных тем.

Обозначим через $\mathcal{H}(D)$ (соответственно, $\mathcal{M}(D)$) класс всех голоморфных (соответственно, мероморфных) функций в области $D \subseteq \mathbb{C}$, а через $\mathbb{D}$ — открытый единичный диск в $\mathbb{C}$.

Пусть $f, g \in \mathcal{M}(D)$. Тогда функция g называется *исключительной* функцией для f в области D , если $f(z) - g(z) \neq 0$ в D . В противном случае g называется *неисключительной* функцией для f в D . В частности, если $g \equiv c$, где $c \in \mathbb{C}$, то c называется *исключительным* (соответственно, *неисключительным*) значением функции f в D . Целью данной статьи является изучение нормальности семейства ненулевых мероморфных функций в области $D \subseteq \mathbb{C}$, дифференциальные многочлены которых имеют неисключительную мероморфную функцию в D .

Определение 1 ([3]). Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $n_0, n_1, \dots, n_k$ — неотрицательные целые числа, не равные одновременно нулю. Пусть $f \in \mathcal{M}(D)$. Тогда произведение

$$M[f] := a \prod_{j=0}^k \left(f^{(j)}\right)^{n_j}$$

называется дифференциальным мономом функции f , где $a (\neq 0) \in \mathcal{M}(D)$. Если $a \equiv 1$, то $M[f]$ называется нормализованным дифференциальным мономом функции f . Величины

$$d := \sum_{j=0}^k n_j \text{ и } w := \sum_{j=0}^k (j+1)n_j$$

называются степенью и весом дифференциального монома $M[f]$ соответственно.

Пусть $1 \leq i \leq m$, $M_i[f]$ — m нормализованных дифференциальных мономов функции f со степенями d_i и весами w_i . Тогда сумма

$$P[f] := \sum_{i=1}^m a_i M_i[f]$$

называется дифференциальным многочленом функции f , а величины

$$d := \max \{d_i : 1 \leq i \leq m\}, \quad d_0 := \min \{d_i : 1 \leq i \leq m\}, \quad w := \max \{w_i : 1 \leq i \leq m\}$$

называются степенью, нижней степенью и весом дифференциального многочлена $P[f]$ соответственно. Если $d_1 = d_2 = \dots = d_m$, то $P[f]$ называется однородным дифференциальным многочленом.

В настоящей статье рассматриваем дифференциальные многочлены вида

$$Q[f] := f^{p_0} (f^{p_1})^{(q_1)} (f^{p_2})^{(q_2)} \dots (f^{p_k})^{(q_k)}, \quad (1)$$

где $p_0, p_1, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k$ — неотрицательные целые числа.

Положим $p' = \sum_{i=1}^k p_i$, $q' = \sum_{i=1}^k q_i$. Будем предполагать далее, что $p_i \geq q_i$ для $i = 1, 2, \dots, k$ и $q' > 0$. По правилу Лейбница

$$(f^{p_i})^{(q_i)} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_{p_i}=q_i} \frac{q_i!}{n_1!n_2!\dots n_{p_i}!} f^{(n_1)} f^{(n_2)} \dots f^{(n_{p_i})},$$

где n_i — неотрицательные целые числа. Таким образом, степенью $Q[f]$ является $d = p_0 + p'$, а весом $Q[f]$ является $w = p_0 + p' + q' = d + q'$.

В литературе дифференциальный многочлен $Q[f]$ был впервые рассмотрен Г. Детлоффом и др. в [4], и с тех пор он привлек внимание многих авторов [5]–[8]. Однако во всех предыдущих работах вводится дополнительное условие на $Q[f]$, а именно, что $p_0 \neq 0$. Подчеркиваем, что это условие не требуется в наших результатах.

В работе [9] Б.М. Денг и др. получили следующий критерий нормальности.

Теорема 1 ([9], теорема 5). Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ — семейство функций, не обращающихся в нуль. Пусть $h \in \mathcal{H}(D)$ и $h \neq 0$, а также пусть k — положительное целое число. Если для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ функция $f^{(k)} - h$ имеет не более k различных нулей (без учета их кратности) в D , то семейство $\mathcal{F}$ является нормальным в D .

Доказательство теоремы 1 в случае $h \equiv 1$ принадлежит Дж.М. Чангу [10]. Фактически, теорема 1 обобщает критерий нормальности, предложенный Ю.С. Гу [11], который доказал теорему 1 при условии, что $f^{(k)} - 1$ не имеет нулей в D , тем самым дав утвердительный ответ на вопрос У.К. Хеймана ([12], задача 5.11). Н.В. Тин [8] распространил теорему 1 на дифференциальные многочлены в случае $h \equiv 1$. Недавно Дж.Ф. Чен [13] рассмотрел неисключительную мероморфную функцию вместо неисключительной голоморфной функции в теореме 1 и получил следующий критерий нормальности.

Теорема 2 ([13], теорема 2). *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ — семейство функций, не обращающихся в нуль, все полюсы которых являются кратными, и пусть $h \in \mathcal{M}(D)$ такая, что $h \not\equiv 0, \infty$ и все полюсы h являются простыми. Пусть k — положительное целое число. Если для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ функция $f^{(k)} - h$ имеет не более k различных нулей (без учета их кратности) в D , то семейство $\mathcal{F}$ является нормальным в D .*

Поскольку дифференциальный многочлен является расширением производной, возникает естественный вопрос, касающийся теоремы 2.

Вопрос. Остается ли теорема 2 справедливой, если k -я производная $f^{(k)}$ заменяется на дифференциальный многочлен $Q[f]$?

Мы намерены дать утвердительный ответ на вопрос. Для этого сначала доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ — семейство функций, не обращающихся в нуль, все полюсы которых являются кратными, и пусть $h \in \mathcal{M}(D)$ такая, что $h(z) \neq 0$ в D , $h \not\equiv \infty$, а полюсы h являются простыми. Если для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ функция $Q[f] - h$ имеет не более $w-1$ нулей (без учета их кратности) в D , то семейство $\mathcal{F}$ является нормальным в D .*

Далее покажем, что различные условия в гипотезе теоремы 3 являются существенными.

Пример 1. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{F} := \left\{ f_j : f_j(z) = \frac{1}{jz}, z \in \mathbb{D}, j \geq 3, j \in \mathbb{N} \right\},$$

и пусть $Q[f_j](z) := (f_j^2)'' = 2f_j f_j'' + 2(f_j')^2$, так что $w = 4$. Тогда $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{D})$, и каждая функция f_j имеет только простые полюсы. Кроме того, $Q[f_j](z) = \frac{6}{j^2 z^4}$. Возьмем $h(z) = \frac{1}{z}$. Тогда

$$Q[f_j](z) - h(z) = \frac{6 - j^2 z^3}{j^2 z^4},$$

эта функция имеет ровно $w - 1 = 3$ различных нуля в $\mathbb{D}$. Однако семейство $\mathcal{F}$ не является нормальным в $\mathbb{D}$, так как $f_j(0) = \infty$ и $f_j(z) \rightarrow 0$ в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Это показывает, что условие кратности полюсов каждой функции $f \in \mathcal{F}$ является необходимым.

Пример 2. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{F} := \left\{ f_j : f_j(z) = \frac{1}{jz^2}, z \in \mathbb{D}, j \geq 2, j \in \mathbb{N} \right\},$$

и пусть $Q[f_j](z) := f_j f_j'$. Тогда $w = 3$ и $Q[f_j](z) = -\frac{2}{j^2 z^5}$. Возьмем $h(z) = \frac{1}{z^3}$. Тогда

$$Q[f_j](z) - h(z) = \frac{-2 - j^2 z^2}{j^2 z^5},$$

эта функция имеет ровно $w - 1 = 2$ нуля в $\mathbb{D}$ без учета кратности. Однако семейство $\mathcal{F}$ не является нормальным в $\mathbb{D}$, так как $f_j(0) = \infty$ и $f_j(z) \rightarrow 0$ в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Это показывает, что условие простоты полюсов h нельзя опустить.

Следующий пример показывает, что теорема 3 перестает быть верной, если допускается, что функции из $\mathcal{F}$ могут иметь нули.

Пример 3. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{F} := \{f_j : f_j(z) = j(\tan 2z)^2, z \in \mathbb{D}, j \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда для каждого j функция f_j имеет кратные нули и кратные полюсы в $\mathbb{D}$. Пусть $Q[f_j](z) := f_j f'_j$. Тогда $w = 3$ и

$$Q[f_j](z) = 4j^2(\tan 2z)^3(\sec 2z)^2.$$

Возьмем $h(z) = -\frac{4}{\sin 2z \cos 2z}$. Тогда

$$Q[f_j](z) - h(z) = \frac{4j^2(\sin 2z)^4 + 4(\cos 2z)^4}{\sin 2z(\cos 2z)^5},$$

эта функция имеет не более $w - 1 = 2$ различных нулей в $\mathbb{D}$. Однако семейство $\mathcal{F}$ не является нормальным в $\mathbb{D}$, так как $f_j(0) = 0$ и $f_j(z) \rightarrow \infty$ в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Следующий пример демонстрирует, что условие “ $Q[f] - h$ имеет не более $w - 1$ различных нулей в D ” в теореме 3 является наилучшим возможным.

Пример 4. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{F} := \left\{f_j : f_j(z) = \frac{1}{jz^2}, z \in \mathbb{D}, j \geq 3, j \in \mathbb{N}\right\}$$

и пусть $Q[f_j](z) := f'_j$. Тогда $w = 2$ и

$$Q[f_j](z) = -\frac{2}{jz^3}.$$

Возьмем $h(z) = \frac{1}{z}$. Тогда

$$Q[f_j](z) - h(z) = \frac{-2 - jz^2}{jz^3},$$

эта функция имеет ровно $w = 2$ различных нуля в $\mathbb{D}$. Однако семейство $\mathcal{F}$ не является нормальным в $\mathbb{D}$, так как $f_j(0) = \infty$ и $f_j(z) \rightarrow 0$ в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

В работе [14] первый автор недавно доказал следующий результат.

Теорема 4 ([14], теорема 1). Пусть $\{f_j\} \subset \mathcal{M}(D)$, $\{h_j\} \subset \mathcal{H}(D)$ такие, что $h_j \rightarrow h$ локально равномерно в D , где $h \in \mathcal{H}(D)$ и $h \neq 0$. Пусть $Q[f_j]$ — дифференциальный многочлен от f_j , определенный в (1), степени $d > 1$ и веса w . Если для каждого j выполнено, что $f_j(z) \neq 0$ и $Q[f_j] - h_j$ имеет не более $w - 1$ нулей (без учета кратности) в D , то семейство $\{f_j\}$ является нормальным в D .

В частности, если $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ — семейство функций, не обращающихся в нуль, и если $h \in \mathcal{H}(D)$, $h \neq 0$, такова, что для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ функция $Q[f] - h$ имеет не более $w - 1$ нулей, игнорируя кратности, в D , то нормальность $\mathcal{F}$ в D немедленно следует из теоремы 4. Чтобы увидеть это, предположим, что $\mathcal{F}$ не является нормальной в точке $z_0 \in D$. Тогда по лемме Зальцмана ([1], с. 101) существуют последовательности точек $\{z_j\} \subset D$

таких, что $z_j \rightarrow z_0$, последовательность положительных вещественных чисел $\rho_j \rightarrow 0$ и последовательность функций $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$, так что последовательность функций $g_j(\zeta) := f_j(z_j + \rho_j \zeta)$ сходится сферически локально равномерно в $\mathbb{C}$ к непостоянной мероморфной функции $g(\zeta)$. С другой стороны, по предположению $Q[f_j] - h$ имеет не более $w - 1$ различных нулей в D , и, следовательно, по теореме 4 семейство $\{f_j\}$ является нормальным в D . Тогда по обратной лемме Зальцмана ([1], с. 103) последовательность $f_j(z_j + \rho_j \zeta)$ должна сходиться сферически локально равномерно в $\mathbb{C}$ к константе, что противоречит тому, что g является непостоянной.

Стоит отметить, что если функции в $\mathcal{F}$ имеют только кратные полюсы, то степень $Q[f]$ в теореме 4 может быть принята равной единице. Сочетая теоремы 3, 4 и используя тот факт, что нормальность является локальным свойством, получаем следующий результат, который дает утвердительный ответ на вопрос.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ — семейство функций, не обращающихся в нуль, все полюсы которых кратные, и пусть $h \in \mathcal{M}(D)$ — такая функция, что все полюсы h простые и $h \not\equiv 0, \infty$. Если для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ выражение $Q[f] - h$ имеет не более $w - 1$ нулей (без учета их кратности) в D , то семейство $\mathcal{F}$ является нормальным в D .

Применяя в теореме 5 $Q[f] = f^{(k)}$, получаем теоремы 1 и 2, в зависимости от того, принадлежит ли h к $\mathcal{H}(D)$ или $\mathcal{M}(D)$. Более того, из теоремы 5 вытекает

Следствие. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ — семейство функций, не обращающихся в нуль, у которых все полюсы кратные. Если для каждой функции $f \in \mathcal{F}$ дифференциальный многочлен $Q[f]$ имеет не более $w - 1$ неподвижных точек в D , то семейство $\mathcal{F}$ является нормальным в D .

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для доказательства основных результатов нам понадобятся некоторые предварительные леммы. Здесь мы предполагаем, что стандартные обозначения теории распределения значений Неванлинны, такие как $m(r, f)$, $N(r, f)$, $T(r, f)$, $S(r, f)$ (см. [15]), известны читателю. Напомним, что если $f, \phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, то говорим, что ϕ является малой функцией от f , если $T(r, \phi) = S(r, f)$ при $r \rightarrow \infty$, возможно, за исключением множества конечной меры Лебега. Кроме того, величины

$$\delta(a; f) := 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 1/(f - a))}{T(r, f)},$$

$$\Theta(a; f) := 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, 1/(f - a))}{T(r, f)},$$

где $a \in \overline{\mathbb{C}}$, называются дефицитом и усеченным дефектом функции f в точке a соответственно.

Следующее утверждение является обобщением леммы Зальцмана–Панга, полученной Х.Х. Ченом и Ю.С. Гу [16] (ср. [17], лемма 2).

Лемма 1 (лемма Зальцмана–Панга). Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ таково, что каждая функция $f \in \mathcal{F}$ имеет нули кратности не менее t и полюсы кратности не менее p . Пусть $-p < \alpha < t$. Если семейство $\mathcal{F}$ не является нормальным в точке $z_0 \in D$, то существуют последовательности $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$, $\{z_j\} \subset D$ такие, что $z_j \rightarrow z_0$, и положительные числа ρ_j со свойством $\rho_j \rightarrow 0$, для которых последовательность $\{g_j\}$, определенная как

$$g_j(\zeta) := \rho_j^{-\alpha} f_j(z_j + \rho_j \zeta),$$

сходится к функции $g(\zeta)$ локально равномерно в $\mathbb{C}$ относительно сферической метрики, где g — непостоянная мероморфная функция на $\mathbb{C}$ такая, что для каждого $\zeta \in \mathbb{C}$ выполняется $g^\#(\zeta) \leq g^\#(0) = 1$.

Если функции из $\mathcal{F}$ не имеют нулей, то $\alpha \in (-p, +\infty)$.

Лемма 2 ([18], теорема 1.1). Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ — трансцендентная функция, а $\phi (\neq 0)$ — малая функция от f такая, что f и ϕ не имеют общих полюсов. Пусть $P[f]$ — дифференциальный многочлен от f и $\delta(0; f)d_0 + \Theta(\infty; f) > 1$, где $d_0 (\geq 1)$ — наименьшая степень многочлена $P[f]$. Тогда $P[f] - \phi$ имеет бесконечно много нулей.

Стоит отметить, что после изучения доказательства леммы 2 приходим к выводу, что условие “ f и ϕ не имеют общих полюсов” не является обязательным.

Лемма 3. Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ — трансцендентная функция, не обращающаяся в нуль, все полюсы которой являются кратными, и пусть $\phi (\neq 0)$ — малая функция от f . Тогда $Q[f] - \phi$ имеет бесконечно много нулей в $\mathbb{C}$.

Доказательство. В связи с леммой 2 достаточно показать, что $\delta(0; f)d + \Theta(\infty; f) > 1$, где d — степень многочлена $Q[f]$. Поскольку f не обращается в нуль, из определения $\delta(0; f)$ следует, что $\delta(0; f) = 1$. Далее, поскольку все полюсы функции f являются кратными, легко заметить, что $\Theta(\infty; f) \geq 1/2$, и, следовательно, $\delta(0; f)d + \Theta(\infty; f) \geq 3/2 > 1$. $\square$

Используя метод Дж.М. Чанга [10] с существенными модификациями, получаем следующую лемму, которая обобщает лемму 2.4 из [10] и лемму 11 из [9].

Лемма 4. Пусть

$$R(z) = \frac{A \prod_{i=1}^s (z + \alpha_i)^{n_i}}{\prod_{i=1}^t (z + \beta_i)^{m_i}} \quad (2)$$

— рациональная функция, и $\sum_{i=1}^s n_i = N$, $\sum_{i=1}^t m_i = M$, причем $M - N \geq t$. Пусть $h (\neq 0)$ — многочлен. Пусть $Q[R]$ — дифференциальный многочлен функции R , как определено в (1), имеющий степень d и вес w . Тогда $Q[R] - h$ имеет хотя бы w различных нулей в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть

$$h(z) = B \prod_{i=1}^v (z + \gamma_i)^{v_i}, \quad (3)$$

где B — ненулевая постоянная и γ_i ($1 \leq i \leq v$) — различные комплексные числа.

Из (2) можно получить

$$Q[R](z) = \frac{A \prod_{i=1}^s (z + \alpha_i)^{(n_i+1)d-w}}{\prod_{i=1}^t (z + \beta_i)^{(m_i-1)d+w}} G_R(z), \quad (4)$$

где G_R — многочлен степени не выше $(s+t-1)(w-d)$.

Также легко заметить, что $Q[R] - h$ имеет хотя бы один нуль в $\mathbb{C}$. Таким образом, можем задать

$$Q[R](z) = h(z) + \frac{C \prod_{i=1}^q (z + \delta_i)^{q_i}}{\prod_{i=1}^t (z + \beta_i)^{(m_i-1)d+w}}, \quad (5)$$

где $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, q_i — положительные целые числа и δ_i ($1 \leq i \leq q$) — различные комплексные числа.

Теперь из (3)–(5) получаем

$$B \prod_{i=1}^v (z + \gamma_i)^{v_i} \prod_{i=1}^t (z + \beta_i)^{(m_i-1)d+w} - A \prod_{i=1}^s (z + \alpha_i)^{(n_i+1)d-w} G_R(z) = -C \prod_{i=1}^q (z + \delta_i)^{q_i}. \quad (6)$$

Пусть V — степень многочлена h . Тогда поскольку $\sum_{i=1}^t m_i \geq \sum_{i=1}^s n_i$, то

$$\begin{aligned} V &> (s-1)(w-d) - s(w-d) = (s+t-1)(w-d) - t(w-d) - s(w-d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow V + t(w-d) > (s+t-1)(w-d) - s(w-d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow V + t(w-d) + \sum_{i=1}^t m_i > \sum_{i=1}^s n_i + (s+t-1)(w-d) - s(w-d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^v v_i + \sum_{i=1}^t [(m_i-1)d+w] > \sum_{i=1}^s [(n_i+1)d-w] + (s+t-1)(w-d). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6), (7) получаем

$$\sum_{i=1}^q q_i = \sum_{i=1}^t (m_i-1)d + tw + V \text{ and } B = -C.$$

Также из (6) имеем

$$\prod_{i=1}^v (z + \gamma_i)^{v_i} \prod_{i=1}^t (z + \beta_i)^{(m_i-1)d+w} - \prod_{i=1}^q (z + \delta_i)^{q_i} = \frac{A}{B} \prod_{i=1}^s (z + \alpha_i)^{(n_i+1)d-w} G_R(z). \quad (8)$$

Полагая $r = 1/z$ в (8), получаем

$$\prod_{i=1}^v (1 + \gamma_i r)^{v_i} \prod_{i=1}^t (1 + \beta_i r)^{(m_i-1)d+w} - \prod_{i=1}^q (1 + \delta_i r)^{q_i} = \frac{A}{B} z^T \prod_{i=1}^s (1 + \alpha_i r)^{(n_i+1)d-w} G_R(r), \quad (9)$$

где $T = \sum_{i=1}^s ((n_i+1)d-w) + \deg(G_R) - \left[\sum_{i=1}^t ((m_i-1)d+w) + V \right]$.

Положим $b(r) := (A/B)r^{(s+t-1)(w-d)}G_R(z)$. Тогда из (9) вытекает

$$\frac{\prod_{i=1}^v (1 + \gamma_i r)^{v_i} \prod_{i=1}^t (1 + \beta_i r)^{(m_i-1)d+w}}{\prod_{i=1}^q (1 + \delta_i r)^{q_i}} = r^{(M-N)d+(w-d)+V} \frac{b(r) \prod_{i=1}^s (1 + \alpha_i r)^{(n_i+1)d-w}}{\prod_{i=1}^q (1 + \delta_i r)^{q_i}} + 1,$$

где $M = \sum_{i=1}^t m_i$ и $N = \sum_{i=1}^s n_i$. Таким образом,

$$\frac{\prod_{i=1}^v (1 + \gamma_i r)^{v_i} \prod_{i=1}^t (1 + \beta_i r)^{(m_i-1)d+w}}{\prod_{i=1}^q (1 + \delta_i r)^{q_i}} = 1 + O\left(r^{(M-N)d+(w-d)+V}\right) \text{ при } r \rightarrow 0. \quad (10)$$

Применяя логарифмические производные к обеим частям (10), имеем

$$\sum_{i=1}^v \frac{v_i \gamma_i}{1 + \gamma_i r} + \sum_{i=1}^t [(m_i - 1)d + w] \frac{\beta_i}{1 + \beta_i r} - \sum_{i=1}^q \frac{q_i \delta_i}{1 + \delta_i r} = O\left(r^{(M-N-1)d+w+V-1}\right) \text{ при } r \rightarrow 0. \quad (11)$$

Пусть $E_1 = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v\} \cap \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$ и $E_2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v\} \cap \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q\}$. Тогда возникают следующие четыре случая.

Случай 1. $E_1 = E_2 = \emptyset$.

Пусть $\beta_{t+i} = \gamma_i$ при $1 \leq i \leq v$ и

$$T_i = \begin{cases} (m_i - 1)d + w, & \text{если } 1 \leq i \leq t; \\ v_{i-t}, & \text{если } t+1 \leq i \leq t+v. \end{cases}$$

Тогда (11) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{t+v} \frac{T_i \beta_i}{1 + \beta_i r} - \sum_{i=1}^q \frac{q_i \delta_i}{1 + \delta_i r} = O\left(r^{(M-N-1)d+w+V-1}\right) \text{ при } r \rightarrow 0. \quad (12)$$

Сравнивая коэффициенты при r^j , $j = 0, 1, \dots, (M - N - 1)d + w + V - 2$, в (12), находим

$$\sum_{i=1}^{t+v} T_i \beta_i^j - \sum_{i=1}^q q_i \delta_i^j = 0 \text{ для каждого } j = 1, 2, \dots, (M - N - 1)d + w + V - 1. \quad (13)$$

Теперь пусть $\beta_{t+v+i} = \delta_i$ при $1 \leq i \leq q$. Тогда из (13) можно вывести, что система уравнений

$$\sum_{i=1}^{t+v+q} \beta_i^j x_i = 0, \quad j = 0, 1, \dots, (M - N - 1)d + w + V - 1, \quad (14)$$

имеет ненулевое решение

$$(x_1, \dots, x_{t+v}, x_{t+v+1}, \dots, x_{t+v+q}) = (T_1, \dots, T_{t+v}, -q_1, \dots, -q_q).$$

Это происходит только в том случае, если ранг матрицы коэффициентов системы (14) строго меньше, чем $t + v + q$. Отсюда $(M - N - 1)d + w + V < t + v + q$. Поскольку $V = \sum_{i=1}^v v_i \geq v$

и $M - N \geq t$, то $q \geq w$.

Случай 2. $E_1 \neq \emptyset$ и $E_2 = \emptyset$.

Без потери общности можем предположить, что $E_1 = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s_1}\}$. Тогда $\gamma_i = \beta_i$ при $1 \leq i \leq s_1$. Возьмем $s_3 = v - s_1$.

Подслучай 2.1. $s_3 \geq 1$.

Пусть $\beta_{t+i} = \gamma_{s_1+i}$ для $1 \leq i \leq s_3$. Если $s_1 < t$, то

$$T_i = \begin{cases} (m_i - 1)d + w + v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_1; \\ (m_i - 1)d + w, & \text{если } s_1 + 1 \leq i \leq t; \\ v_{s_1-t+i}, & \text{если } t + 1 \leq i \leq t + s_3. \end{cases}$$

Если $s_1 = t$, то возьмем

$$T_i = \begin{cases} (m_i - 1)d + w + v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_1; \\ v_{s_1-t+i}, & \text{если } t + 1 \leq i \leq t + s_3. \end{cases}$$

Подслучай 2.2. $s_3 = 0$.

Если $s_1 < t$, то

$$T_i = \begin{cases} (m_i - 1)d + w + v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_1; \\ (m_i - 1)d + w, & \text{если } s_1 + 1 \leq i \leq t, \end{cases}$$

а если $s_1 = t$, возьмем $T_i = (m_i - 1)d + w + v_i$ для $1 \leq i \leq s_1 = t$.

Таким образом (11) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{t+s_3} \frac{T_i \beta_i}{1 + \beta_i r} - \sum_{i=1}^q \frac{m_i \delta_i}{1 + \delta_i r} = O\left(r^{(M-N-1)d+w+V-1}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

где $0 \leq s_3 \leq v - 1$. Продолжая аналогично случаю 1, получим $q \geq w$.

Случай 3. $E_1 = \emptyset$ и $E_2 \neq \emptyset$.

Без потери общности можем предположить, что $E_2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s_2}\}$. Тогда $\gamma_i = \delta_i$ для $1 \leq i \leq s_2$. Возьмем $s_4 = v - s_2$.

Подслучай 3.1. $s_4 \geq 1$.

Пусть $\delta_{q+i} = \gamma_{s_2+i}$ для $1 \leq i \leq s_4$. Если $s_2 < q$, то

$$Q_i = \begin{cases} q_i - v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_2; \\ q_i, & \text{если } s_2 + 1 \leq i \leq q; \\ -v_{s_2-q+i}, & \text{если } q + 1 \leq i \leq q + s_4. \end{cases}$$

Если $s_2 = q$, возьмем

$$Q_i = \begin{cases} q_i - v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_2; \\ -v_{s_2-q+i}, & \text{если } q + 1 \leq i \leq q + s_4. \end{cases}$$

Подслучай 3.2. $s_4 = 0$.

Если $s_2 < q$, то

$$Q_i = \begin{cases} q_i - v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_2; \\ q_i, & \text{если } s_2 + 1 \leq i \leq q, \end{cases}$$

а если $s_2 = q$, возьмем $Q_i = q_i - v_i$ для $1 \leq i \leq s_2 = q$.

Таким образом, (11) может быть записано как

$$\sum_{i=1}^t \frac{[(m_i - 1)d + w] \beta_i}{1 + \beta_i r} - \sum_{i=1}^{q+s_4} \frac{Q_i \delta_i}{1 + \delta_i r} = O\left(r^{(M-N-1)d+w+V-1}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

где $0 \leq s_4 \leq v - 1$. Продолжая аналогично случаю 1, получим $q \geq w$.

Случай 4. $E_1 \neq \emptyset$ и $E_2 \neq \emptyset$.

Без потери общности можно предположить, что $E_1 = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s_1}\}$, $E_2 = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{s_2}\}$. Тогда $\gamma_i = \beta_i$ для $1 \leq i \leq s_1$ и $\delta_i = \gamma_{s_1+i}$ для $1 \leq i \leq s_2$. Возьмем $s_5 = v - s_2 - s_1$.

Подслучай 4.1. $s_5 \geq 1$.

Пусть $\beta_{t+i} = \gamma_{s_1+s_2+i}$ для $1 \leq i \leq s_5$. Если $s_1 < t$, то

$$T_i = \begin{cases} (m_i - 1)d + w + v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_1; \\ (m_i - 1)d + w, & \text{если } s_1 + 1 \leq i \leq t; \\ v_{s_1+s_2-t+i}, & \text{если } t + 1 \leq i \leq t + s_5. \end{cases}$$

Если $s_1 = t$, то

$$T_i = \begin{cases} (m_i - 1)d + w + v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_1; \\ v_{s_1+s_2-t+i}, & \text{если } t + 1 \leq i \leq t + s_5. \end{cases}$$

Если $s_2 < q$, возьмем

$$Q_i = \begin{cases} q_i - v_{s_1+i}, & \text{если } 1 \leq i \leq s_2; \\ q_i, & \text{если } s_2 + 1 \leq i \leq q, \end{cases}$$

а если $s_2 = q$, положим $Q_i = q_i - v_{s_1+i}$ для $1 \leq i \leq s_2$.

Подслучай 4.2. $s_5 = 0$.

Если $s_1 < t$, то

$$T_i = \begin{cases} (m_i - 1)d + w + v_i, & \text{если } 1 \leq i \leq s_1; \\ (m_i - 1)d + w, & \text{если } s_1 + 1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Если $s_1 = t$, то возьмем $T_i = (m_i - 1)d + w + v_i$ для $1 \leq i \leq s_1$.

Также, если $s_2 < q$, то

$$Q_i = \begin{cases} q_i - v_{s_1+i}, & \text{если } 1 \leq i \leq s_2; \\ q_i, & \text{если } s_2 + 1 \leq i \leq q, \end{cases}$$

а если $s_2 = q$, то возьмем $Q_i = q_i - v_{s_1+i}$ для $1 \leq i \leq s_2$.

Таким образом, в обоих подслучаях (11) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{t+s_5} \frac{T_i \beta_i}{1 + \beta_i r} - \sum_{i=1}^q \frac{Q_i \delta_i}{1 + \delta_i r} = O\left(r^{(M-N-1)d+w+V-1}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 0,$$

где $0 \leq s_5 \leq v - 2$. Продолжая аналогично случаю 1, получим $q \geq w$. $\square$

Лемма 5. Пусть f — непостоянная рациональная функция, не обращающаяся в нуль, все полюсы которой кратные. Пусть $Q[f]$ — дифференциальный многочлен от f , как определено в (1), с весом w . Тогда для любого $a \in \mathbb{C}$ выражение $Q[f](z) - 1/(z + a)$ имеет как минимум w различных нулей в $\mathbb{C}$.

Доказательство можно получить из доказательства леммы 4 с незначительными модификациями, поэтому оно здесь опущено.

Лемма 6. Пусть $\{f_j\} \subset \mathcal{M}(D)$ — последовательность функций, не обращающихся в нуль, у которых все полюсы кратные, и пусть $\{h_j\} \subset \mathcal{H}(D)$ такая, что $h_j \rightarrow h$ локально равномерно в D , где $h \in \mathcal{H}(D)$ и $h(z) \neq 0$ в D . Если для каждого j функция $Q[f_j] - h_j$ имеет не более $w - 1$ нулей (без учета их кратности) в D , то семейство $\{f_j\}$ является нормальным в D .

Доказательство. Предположим, что $\{f_j\}$ не является нормальным в $z_0 \in D$. Тогда согласно лемме 1 существует последовательность точек $\{z_j\} \subset D$ такая, что $z_j \rightarrow z_0$, последовательность положительных действительных чисел $\rho_j \rightarrow 0$, а также подпоследовательность последовательности $\{f_j\}$, которую мы снова обозначим $\{f_j\}$, такая, что последовательность

$$F_j(\zeta) := \frac{f_j(z_j + \rho_j \zeta)}{\rho_j^{(w-d)/d}} \rightarrow F(\zeta)$$

сходится сферически локально равномерно в $\mathbb{C}$, где F — непостоянная и не обращающаяся в нуль мероморфная функция, все полюсы которой кратные. Очевидно, $Q[F_j] \rightarrow Q[F]$ сферически локально равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}$, не содержащем полюсов функции F . Также легко увидеть, что

$$Q[F_j](\zeta) = Q[f_j](z_j + \rho_j \zeta).$$

Таким образом,

$$Q[f_j](z_j + \rho_j \zeta) - h_j(z_j + \rho_j \zeta) = Q[F_j](\zeta) - h_j(z_j + \rho_j \zeta) \rightarrow Q[F](\zeta) - h(z_0)$$

сходится сферически локально равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}$, не содержащем полюсов функции F . Поскольку F не является постоянной, то ввиду результата Дж. Грааля ([3], теорема 7) можно заключить, что $Q[F]$ не является постоянной. Далее утверждаем, что $Q[F] - h(z_0)$ имеет не более $w - 1$ различных нулей в $\mathbb{C}$.

Предположим, что $Q[F] - h(z_0)$ имеет w различных нулей, скажем, ζ_i , $i = 1, 2, \dots, w$. Тогда по теореме Гурвица существуют последовательности $\zeta_{j,i}$, $i = 1, 2, \dots, w$, такие, что $\zeta_{j,i} \rightarrow \zeta_i$ и для достаточно больших j выполняется равенство

$$Q[f_j](z_j + \rho_j \zeta_{j,i}) = h_j(z_j + \rho_j \zeta_{j,i})$$

для $i = 1, 2, \dots, w$. Однако это невозможно, поскольку $Q[f_j] - h_j$ имеет не более $w - 1$ различных нулей в D . Таким образом, наше утверждение верно. Теперь из леммы 3 следует, что F является рациональной функцией, а это противоречит лемме 4. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Ввиду леммы 6 достаточно доказать, что $\mathcal{F}$ является нормальным в точках, в которых h имеет полюсы. Поскольку нормальность является локальным свойством, можно считать, что D — это $\mathbb{D}$. После стандартной нормализации можно предположить, что

$$h(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots = \frac{b(z)}{z},$$

где $b(0) = 1$ и $b(z) \neq 0$, ∞ в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Далее нужно показать, что $\mathcal{F}$ является нормальным в точке $z = 0$. Предположим обратное, что $\mathcal{F}$ не является нормальным в $z = 0$. Тогда по лемме 1 существует подпоследовательность $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$, последовательность точек $\{z_j\} \subset \mathbb{D}$ таких, что $z_j \rightarrow 0$, и последовательность положительных действительных чисел ρ_j , удовлетворяющая свойству $\rho_j \rightarrow 0$, такие, что последовательность

$$g_j(\zeta) := \frac{f_j(z_j + \rho_j \zeta)}{\rho_j^{(w-d-1)/d}} \rightarrow g(\zeta)$$

сферически локально равномерно в $\mathbb{C}$, где $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ — непостоянная функция, все полюсы которой являются кратными. Поскольку каждая функция f_j не обращается в нуль, то и g не обращается в нуль. Теперь различим два случая.

Случай 1. Предположим, что существует подпоследовательность последовательности z_j/ρ_j , которую снова обозначим z_j/ρ_j , такая, что $z_j/\rho_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Определим

$$F_j(\zeta) := z_j^{-(w-d-1)/d} f_j(z_j + z_j \zeta).$$

Тогда непосредственным вычислением можно показать, что

$$Q[F_j](\zeta) = z_j Q[f_j](z_j + z_j \zeta).$$

Кроме того, F_j не обращается в нуль, все полюсы F_j являются кратными и

$$\frac{b(z_j + z_j\zeta)}{1 + \zeta} \rightarrow \frac{1}{1 + \zeta} \neq 0$$

в $\mathbb{D}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Q[F_j](\zeta) - \frac{b(z_j + z_j\zeta)}{1 + \zeta} &= z_j Q[f_j](z_j + z_j\zeta) - \frac{b(z_j + z_j\zeta)}{1 + \zeta} = \\ &= z_j \left[Q[f_j](z_j(1 + \zeta)) - \frac{b(z_j(1 + \zeta))}{z_j(1 + \zeta)} \right] = z_j (Q[f_j](z_j(1 + \zeta)) - h(z_j(1 + \zeta))). \end{aligned}$$

Так как $Q[f_j] - h$ имеет не более $w - 1$ нулей в $\mathbb{D}$, по лемме 6 следует, что последовательность $\{F_j\}$ является нормальной в $\mathbb{D}$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{F_j\}$, снова обозначенная как $\{F_j\}$, такая, что $F_j \rightarrow F$ сферически локально равномерно в $\mathbb{D}$, где $F \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ или $F \equiv \infty$. Если $F(0) = \infty$, то

$$g_j(\zeta) = \frac{f_j(z_j + \rho_j\zeta)}{\rho_j^{(w-d-1)/d}} = \left(\frac{z_j}{\rho_j}\right)^{(w-d-1)/d} z_j^{-(w-d-1)/d} f_j(z_j + \rho_j\zeta) = \left(\frac{z_j}{\rho_j}\right)^{(w-d-1)/d} F_j\left(\frac{\rho_j}{z_j}\zeta\right)$$

сходится сферически локально равномерно к ∞ в $\mathbb{C}$, откуда $F \equiv \infty$, что является противоречием с тем, что F непостоянна.

Если $F(0) \neq \infty$, выберем $m \in \mathbb{N}$ так, что $m > (w-d-1)/d$, и пусть $m_0 = m - (w-d-1)/d$. Тогда $m_0 > 0$. Таким образом, для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ имеем

$$g_j^{(m)}(\zeta) = \rho_j^{m_0} f_j^{(m)}(z_j + \rho_j\zeta) = \left(\frac{\rho_j}{z_j}\right)^{m_0} F_j^{(m)}\left(\frac{\rho_j}{z_j}\zeta\right) \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty,$$

откуда видно, что g — многочлен степени не выше $m - 1$, что является противоречием с тем, что g является непостоянной и не обращающейся в нуль мероморфной функцией.

Случай 2. Предположим, что существует подпоследовательность последовательности z_j/ρ_j , снова обозначенная через z_j/ρ_j , такая, что $z_j/\rho_j \rightarrow \alpha$ при $j \rightarrow \infty$, где $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда

$$Q[g_j](\zeta) - \rho_j \frac{b(z_j + \rho_j\zeta)}{z_j + \rho_j\zeta} = \rho_j \left(Q[f_j](z_j + \rho_j\zeta) - \frac{b(z_j + \rho_j\zeta)}{z_j + \rho_j\zeta} \right) \rightarrow Q[g](\zeta) - \frac{1}{\zeta + \alpha}$$

сферически равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus \{-\alpha\}$, не содержащих полюсы g . Поскольку g не является постоянной функцией, легко увидеть, что $Q[g]$ также не является постоянной. Далее утверждаем, что $Q[g](\zeta) - 1/(\zeta + \alpha)$ имеет не более $w - 1$ различных нулей.

Предположим противное, а именно, что $Q[g](\zeta) - \frac{1}{\zeta + \alpha}$ имеет w различных нулей, скажем, ζ_i , $i = 1, 2, \dots, w$. Поскольку $Q[g](\zeta) - \frac{1}{\zeta + \alpha} \not\equiv 0$, то по теореме Гурвица существуют последовательности $\zeta_{j,i}$, $i = 1, 2, \dots, w$, такие, что $\zeta_{j,i} \rightarrow \zeta_i$ и для достаточно больших j выполняется

$$Q[f_j](z_j + \rho_j\zeta_{j,i}) - \frac{b(z_j + \rho_j\zeta_{j,i})}{z_j + \rho_j\zeta_{j,i}} = Q[f_j](z_j + \rho_j\zeta_{j,i}) - h(z_j + \rho_j\zeta_{j,i}) = 0$$

для $i = 1, 2, \dots, w$. Это невозможно, так как $Q[f_j] - h$ имеет не более $w - 1$ различных нулей в $\mathbb{D}$. Наше утверждение доказано. Теперь из леммы 3 следует, что g является рациональной функцией, что противоречит лемме 5.

Авторы выражают свою благодарность анонимному рецензенту за ценные комментарии и предложения, которые способствовали улучшению качества и представления статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schiff J.L. *Normal Families* (Springer, Berlin, 1993).
- [2] Zalcman L. *Normal families: new perspectives*, Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 215–230 (1998).
- [3] Grahl J. *Hayman's alternative and normal families of non-vanishing meromorphic functions*, Comput. Methods Funct. Theory **2** (2), 481–508 (2004).
- [4] Dethloff G., Tan T.V., Thin N.V. *Normal criteria for families of meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **411** (2), 675–683 (2014).
- [5] Charak K.S., Sharma S. *Some normality criteria and a counterexample to the converse of Bloch's principle*, Bull. Aust. Math. Soc. **95** (2), 238–249 (2017).
- [6] Thin N.V. *Normal family of meromorphic functions sharing holomorphic functions and the converse of the Bloch principle*, Acta Math. Sci. **37** (3), 623–656 (2017).
- [7] Thin N.V. *Normal criteria for family meromorphic functions sharing holomorphic function*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **40**, 1413–1442 (2017).
- [8] Thin N.V., Oanh B.T.K. *Normality criteria for families of zero-free meromorphic functions*, Analysis **36** (3), 211–222 (2016).
- [9] Deng B.M., Fang M.L., Liu D. *Normal families of zero-free meromorphic functions*, J. Aust. Math. Soc. **91** (3), 313–322 (2011).
- [10] Chang J.M. *Normality and quasnormality of zero-free meromorphic functions*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. **28** (4), 707–716 (2012).
- [11] Gu Y.X. *A normal criterion of meromorphic families*, Scientia Sinica **1**, 267–274 (1979).
- [12] Hayman W.K. *Research Problems in Function Theory* (Athlone Press, London, 1967).
- [13] Chen J.F. *Nonexceptional functions and normal families of zero-free meromorphic functions*, Filomat **31** (14), 4665–4671 (2017).
- [14] Bharti N. *A normal criterion concerning sequence of functions and their differential polynomials*, Probl. Anal. Issues Anal. **13** (31) (2), 3–24 (2024).
- [15] Hayman W.K. *Meromorphic Functions* (Clarendon Press, Oxford, 1964).
- [16] Chen H.H., Gu Y.X. *Improvement of Marty's criterion and its application*, Sci. China Ser. A **36** (6), 674–681 (1993).
- [17] Pang X.C., Zalcman L. *Normal families and shared values*, Bull. Lond. Math. Soc. **32** (3), 325–331 (2000).
- [18] Lahiri I., Charak K.S., Singh A. *An extension of Hayman's alternative to a class of differential polynomials*, Boll. Unione. Mat. Ital. **16**, 747–761 (2023), URL : <https://doi.org/10.1007/s40574-023-00365-9>.

Нихил Бхартти

Университет Джамму,

Джамму, 180006, Индия,

e-mail: nikhilbharti94@gmail.com

Анил Сингх

Колледж имени Маулана Азад,

Джамму, 180006, Индия,

e-mail: anilmanhasfeb90@gmail.com

N. Bharti and A. Singh

A note on normal families, concerning non-exceptional functions and differential polynomials

Abstract. The normality of a family of meromorphic functions whose differential polynomials satisfy a certain condition is studied. This significantly improves and generalizes some recent results of Chen (Filomat, **31** (14), 4665–4671, 2017). Moreover, the result is sharp, which is demonstrated with the help of examples.

Keywords: normal family, differential polynomial, meromorphic function.

Nikhil Bharti

*University of Jammu,
Jammu, 180006 India,*

e-mail: `nikhilbharti94@gmail.com`

Anil Singh

*Maulana Azad Memorial College,
Jammu, 180006 India,*

e-mail: `anilmanhasfeb90@gmail.com`