

Краткое сообщение

А.А. ЛАПТЕВ, И.А. ЩЕРБАКОВ

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ
АНТИСИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Аннотация. Представлены основные результаты о классических неравенствах, таких как неравенства Харди, Соболева, Цвинкеля–Либа–Розенблюма и Либа–Тирринга, для антисимметрических функций.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, неравенство Либа–Тирринга, неравенство Либа–Цвинкеля–Розенблюма, неравенство Харди, неравенство Соболева, антисимметрическая функция.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-104-109

ВВЕДЕНИЕ

Антисимметрические функции возникают в поле изучения в квантовой физике как волновые функции систем фермионов (протоны, нейтроны и т.д.), о чем говорит принцип Паули. Поэтому имеется большое количество работ, в которых классические неравенства рассматриваются исключительно на антисимметрических функциях (например, [1], [2]).

В первую очередь дадим несколько определений. Пусть N и d — натуральные числа. Мы будем рассматривать в качестве аргументов функций элементы вида $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}$, где $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id}) \in \mathbb{R}^d$ для всех $1 \leq i \leq N$. Функция u , заданная на $\mathbb{R}^{dN}$, называется *антисимметрической*, если для всех $1 \leq i, j \leq N$ и $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$

$$u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = -u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N), \quad (1)$$

и *симметрической*, если

$$u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N).$$

Для обозначения некоторых подклассов антисимметрических функций мы будем использовать те же обозначения, что и в классическом случае, но с индексом A : $L_A^2(\mathbb{R}^{dN})$, $H_A^1(\mathbb{R}^{dN})$ и $H_A^2(\mathbb{R}^{dN})$ суть подклассы соответствующих пространств $L^2(\mathbb{R}^{dN})$, $H^1(\mathbb{R}^{dN})$ и $H^2(\mathbb{R}^{dN})$, состоящих из антисимметрических функций.

Поступила в редакцию 13.12.2024, после доработки 13.12.2024. Принята к публикации 18.12.2024.

Благодарности. Работа поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики (Соглашение с Министерством науки и образования Российской Федерации № 075-15-2022-283) и Институтом прикладной математики им М.В. Келдыша Российской академии наук.

Обозначим через $-\Delta_{as}$ оператор Лапласа на $L^2(\mathbb{R}^{dN})$, суженный на антисимметрические функции,

$$\mathcal{H}_{as} = -\Delta_{as} - V$$

— соответствующий оператор Шрёдингера. Здесь V — симметрическая функция, физический смысл которой есть потенциальная энергия.

В данной работе мы приведем результаты, связанные с улучшением констант в классических функциональных и спектральных неравенствах для класса антисимметрических функций.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Мы начнем с классических функциональных неравенств Харди и Соболева, уточненных на антисимметрических функциях в [3]–[5].

1.1. Определители типа Вандермонда. Рассмотрим

$$\psi_N^{(d)}(x_1, \dots, x_N) = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(d)}(x_1) & \cdots & \varphi_1^{(d)}(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N^{(d)}(x_1) & \cdots & \varphi_N^{(d)}(x_N) \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $\varphi_1^{(d)}(t), \varphi_2^{(d)}(t) = t_1, \dots$ суть приведенные одночлены d переменных, упорядоченные лексикографически.

Если $\mathcal{V}_d(N)$ есть степень $\psi_N^{(d)}$, то можно утверждать, что это минимальная степень антисимметрического многочлена. При этом функция $\psi_N^{(d)}(x_1, \dots, x_N)$ есть однородный гармонический многочлен. Подобные многочлены степени m при сужении на сферу $\mathbb{S}^{dN-1}$ являются собственными функциями оператора Лапласа–Бельтрами в $L^2(\mathbb{S}^{dN-1})$ с соответствующим собственным значением

$$\mu = m(m + dN - 2).$$

Очевидно, степень $\psi_N^{(d)}$ равна сумме степеней каждой строки определителя (2). Тогда минимальное собственное число оператора Лапласа–Бельтрами на сфере

$$\mu_d(N) = \mathcal{V}_d(N)(\mathcal{V}_d(N) + dN - 2). \quad (3)$$

Отметим, что нахождение кратности даже минимального собственного числа не является простой задачей при $d > 1$. Исследование спектра оператора Лапласа–Бельтрами на сфере с помощью определителей (2) подробно изложено в [5].

Возвращаясь к минимальному собственному числу, можно утверждать согласно [4], что

$$\mathcal{V}_d(N) = \frac{d}{d+1} \sqrt[d]{d!} N^{1+\frac{1}{d}} - \frac{d}{2} N + O(N^{1-\frac{1}{d}}) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\mu_d(N) = \frac{d^2}{(d+1)^2} \sqrt[d]{d!^2} N^{2+\frac{2}{d}} + O(N^2).$$

Случай $d = 1$ представлен в [3]. Тогда нетрудно получить явные значения степени многочлена $\psi_N^{(1)}$, которая равна $\mathcal{V}_1(N) = \frac{N(N-1)}{2}$, и собственного числа

$$\mu_1(N) = \frac{N(N-1)(N^2 + N - 4)}{4},$$

чья кратность равна единице.

1.2. Неравенство Харди. Рассмотренные определители (2) согласно [4] позволяют улучшить неравенство Харди для функций из класса $H_A^1(\mathbb{R}^{dN})$.

Теорема 1. Пусть $u \in H_A^1(\mathbb{R}^{dN})$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^{dN}} |\nabla u(x)|^2 dx \geq H_A(dN) \int_{\mathbb{R}^{dN}} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx,$$

где константа $H_A(dN)$ точна и равна

$$H_A(dN) = \frac{(dN - 2)^2}{4} + \mathcal{V}_d(N)(\mathcal{V}_d(N) + dN - 2). \quad (4)$$

Здесь

$$H_A(dN) = \frac{(dN - 2)^2}{4} + \mu_d(N),$$

где $\mu_d(N)$ задана в (3) и появляется из так называемой ангулярной части оценки, $(dN - 2)^2/4$ — классическая константа Харди, которая обосновывается радиальной оценкой.

В случае, когда $d = 1$ и $N \geq 2$, формула (4) становится явной (см. [3]):

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{(N^2 - 2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx, \quad u \in H_A^1(\mathbb{R}^N).$$

Замечание. Отметим, что классическая константа в неравенстве Харди для функций из $H^1(\mathbb{R}^{dN})$ равна $(dN - 2)^2/4 \sim (dN)^2/4$ при $N \rightarrow \infty$, в то время как

$$H_A(dN) \sim \left(\frac{d \sqrt[d]{d!}}{d + 1} \right)^2 N^{2 + \frac{2}{d}}/4.$$

1.3. Носитель антисимметрической функции. Из определения (1) нетрудно заключить, что при $x_i = x_j$ любая антисимметрическая функция принимает нулевое значение. Тогда можно утверждать, что на множестве $E_N = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$ она удовлетворяет условию Дирихле. Это свойство является ключевым при доказательстве неравенства Соболева, поэтому его обобщение для $d > 1$ играет важную роль.

Рассмотрим действие симметрической группы $\mathcal{S}_N$ на $\mathbb{R}^{dN}$. Для произвольного

$$x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN} \quad (x_j \in \mathbb{R}^d) \text{ и } \sigma \in \mathcal{S}_N$$

обозначим через $\sigma x = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$ перестановку элементов x .

Теорема 2 ([4]). Пусть u — симметрическая функция $\mathbb{R}^{dN}$. Для произвольного $x \in \mathbb{R}^{dN}$ и $\sigma \in \mathcal{S}_N$, $\sigma \neq id$, не существует непрерывного пути $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{dN}$ такого, что $\Gamma(0) = x$, $\Gamma(1) = \sigma x$ и $u(\Gamma(t)) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

Отсюда вытекает

Следствие 1. Носитель произвольной функции $u \in H_A^1(\mathbb{R}^{dN})$ разбивается на $N!$ частей, каждая из которых может быть получена из любой другой действием $\mathcal{S}_N$, причем u удовлетворяет условию Дирихле на каждой из них.

1.4. Неравенство Соболева. Подобно неравенству Харди, уточняется и неравенство Соболева (см. [4]):

Теорема 3. Для всех $u \in H_A^1(\mathbb{R}^{dN})$, $dN \geq 3$, имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^{dN}} |\nabla u|^2 dx \geq S_A(dN) \left(\int_{\mathbb{R}^{dN}} |u|^{\frac{2dN}{dN-2}} dx \right)^{\frac{dN-2}{dN}},$$

где

$$S_A(dN) = (N!)^{\frac{2}{dN}} S(dN).$$

Здесь $S(n)$ — классическая константа Соболева,

$$S(n) = \pi n(n-2) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Доказательство теоремы 3 опирается на возможность разбить носитель антисимметрической функции как в следствии 1.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Основными результатами данной работы являются спектральные неравенства для операторов Шрёдингера на антисимметрических функциях. Неравенства Либа–Тирринга (ЛТ) и Цвикеля–Либа–Розенблюма (ЦЛР) играют важную роль в математической физике, анализе и теории динамических систем. Оригинальные результаты были получены в знаменитой статье Либа и Тирринга [6] и статьях Цвикеля, Либа и Розенблюма [7]–[9]. На сегодняшний день результаты, связанные с оценкой спектра оператора Шрёдингера, можно найти в книге [10].

Пусть $\{-\lambda_k\}$ суть отрицательные собственные числа оператора $\mathcal{H}$. Если потенциал V принадлежит классу $\in L^{\gamma+n/2}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \geq 0$, то согласно ЛТ можно утверждать, что

$$\text{Tr } \mathcal{H}_-^\gamma = \text{Tr } (-\Delta - V)_-^\gamma = \sum_k \lambda_k^\gamma \leq L_{\gamma,n} \int_{\mathbb{R}^n} V^{\gamma+n/2} dx, \quad (5)$$

где $s_- = -s$, если $s < 0$, и $s_- = 0$ иначе, причем собственные числа $-\lambda_k$ повторяются с учетом кратности.

В случае $\gamma = 0$, неравенство (5) и есть неравенство ЦЛР, а для $\gamma > 0$ оно носит имена Либа и Тирринга. Известно, что константа $L_{\gamma,n}$ в (5) конечна для

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 1/2, & \text{если } n = 1, \\ \gamma &> 0, & \text{если } n = 2, \\ \gamma &\geq 0, & \text{если } n \geq 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, что неравенство (5) влечет оценку минимального отрицательного собственного числа, т. е. существует такая константа $L_{\gamma,n}^1$, что

$$(\inf \text{spec } (-\Delta - V))_-^\gamma \leq L_{\gamma,n}^1 \int_{\mathbb{R}^n} V^{\gamma+n/2} dx.$$

Отметим, что $L_{\gamma,n}^1 \leq L_{\gamma,n}$. В [6] авторы выдвигают гипотезу о том, что точное значение $L_{\gamma,n}$ совпадает с $L_{\gamma,n}^1$. Эта гипотеза по-прежнему не доказана в наиболее важных случаях, однако в тех случаях, когда значение $L_{\gamma,n}$ известно, гипотеза верна.

Теорема 4. Пусть $d = 1$ и $V \geq 0$ — симметрическая функция из $L^{\gamma+N/2}(\mathbb{R}^N)$. Тогда для любого γ , удовлетворяющего условию (6), выполнено неравенство

$$\mathrm{Tr}(-\Delta - V)_-^\gamma \leq \frac{L_{\gamma,N}}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} V^{\gamma+N/2} dx.$$

Ключевым фактом в доказательстве этой теоремы также является следствие 1. Для $\gamma = 0$ есть неравенство ЦЛР для антисимметрических функций.

Обозначим через $\mathfrak{H}_{as}$ оператор Лапласа $-\Delta_{as}$ с добавленным слагаемым типа Харди:

$$\mathfrak{H}_{as} = -\Delta_{as} - H_A(dN) \frac{1}{|x|^2}.$$

Тогда имеет место

Теорема 5. Пусть $V \geq 0$ — симметрический потенциал такой, что $V \in L^{\gamma+\frac{n+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^n)$, где $n = dN$, $n \geq 3$, $\gamma > 0$, $\alpha \geq 0$. Тогда существует константа $C_{\gamma,n,\alpha}$, независимая от V , для которой

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{H}_{as} - V)_-^\gamma \leq C_{\gamma,n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{\gamma+\frac{n+\alpha}{2}} |x|^\alpha dx.$$

В случае $\alpha = 0$ мы имеем

Следствие 2. Пусть $n \geq 3$, где $n = dN$, и $\gamma > 0$. Тогда

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{H}_{as} - V)_-^\gamma \leq C_{\gamma,n,0} \int_{\mathbb{R}^n} V(x)^{\gamma+\frac{n}{2}} dx.$$

Отметим, что точное значение константы $C_{\gamma,n,\alpha}$ неизвестно даже в общем случае, однако помимо улучшения константы в правой части множитель перед слагаемым типа Харди также значительно больше для антисимметрических функций. Другими словами, неравенство Харди–Либа–Тирринга претерпевает уточнение сразу в обеих его частях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Stremnitzer H. *Local properties of Coulombic wavefunctions*, Commun. Math. Phys. **163** (1), 185–215 (1994).
- [2] Frank R.L., Laptev A., Read L. *Weighted CLR type bounds in two dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **377** (5), 3357–3371 (2024).
- [3] Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A. *Hardy Inequality for Antisymmetric Functions*, Functional Anal. Its Appl. **55** (2), 122–129 (2021).
- [4] Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A., Shcherbakov I. *Hardy and Sobolev inequalities on antisymmetric functions*, Bull. Math. Sci. **14** (1), 2350010 (2024), DOI: 10.1142/S1664360723500108.
- [5] Shcherbakov I.A. *Spectrum of the Laplace–Beltrami Operator on Antisymmetric Functions*, Springer, J. Math. Sci. **279** (4), 563–572 (2024).
- [6] Lieb E.H., Thirring W.E. *Inequalities for the Moments of the Eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and Their Relation to Sobolev Inequalities*, in: *Studies in Mathematical Physics*, 269–303 (1976) [in Russian].
- [7] Cwikel M. *Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators*, Ann. of Math. **106** (1), 93–100 (1997).
- [8] Lieb E.H. *Bounds on the eigenvalues of the Laplace and Schroedinger operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (3), 751–753 (1976).
- [9] Розенблюм Г.В. *Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов*, ДАН СССР **202** (5), 1012–1015 (1972).
- [10] Frank R.L., Laptev A., Weidl T. *Schrödinger Operators: Eigenvalues and Lieb–Thirring inequalities* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2022).

Арий Ариевич Лаптев

*Имперский колледж Лондон,
180 Queen's Gate, Лондон SW7 2AZ, Великобритания;
Математический центр Сириус, АНОО «Университет «Сириус»,
Олимпийский просп., д. 1, г. Сочи, 354340, Россия,
e-mail: a.laptev@imperial.ac.uk*

Илья Александрович Щербаков

*Математический центр Сириус, АНОО «Университет «Сириус»,
Олимпийский просп., д. 1, г. Сочи, 354340, Россия,
e-mail: stscherbakov99@yandex.ru*

A.A. Laptev and I.A. Shcherbakov

Spectral and functional inequalities for antisymmetric functions

Abstract. A number of spectral and functional inequalities related to Schrödinger operators defined on antisymmetric functions is presented. Among them are Hardy and Sobolev inequalities, Lieb–Thirring and CLR inequalities.

Keywords: Schrödinger operator, Lieb–Thirring inequality, CLR inequality, Sobolev inequality, Hardy inequality, antisymmetric function.

Ari Arieovich Laptev

*Imperial College London,
180 Queen's Gate, London SW7 2AZ, United Kingdom;
Sirius Mathematics Center, Sirius University of Science and Technology,
1 Olympic Ave., Sochi, 354340 Russia,
e-mail: a.laptev@imperial.ac.uk*

Ilya Aleksandrovich Shcherbakov

*Sirius Mathematics Center, Sirius University of Science and Technology,
1 Olympic Ave., Sochi, 354340 Russia,
e-mail: stscherbakov99@yandex.ru*