

Краткое сообщение, представленное В.В. Шурыгиным

В.П. КУЗНЕЦОВА, И.С. СТРЕЛЬЦОВА

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ КАЛОДЖЕРО ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Аннотация. Построение дифференциальных инвариантов и классификации уравнений Калоджеро относительно точечных преобразований. Известно, что уравнения Калоджеро можно привести к линейным уравнениям с помощью контактных преобразований при условии, что функция f является квадратичной. Однако вопрос классификации уравнений для произвольной функции f относительно точечных преобразований оставался открытым. Данная работа посвящена ликвидации этого пробела. Находятся допустимые точечные преобразования, сохраняющие класс уравнений Калоджеро, и дифференциальные инварианты относительно таких преобразований. С помощью дифференциальных инвариантов доказывается теорема об эквивалентности уравнений Калоджеро относительно точечных преобразований.

Ключевые слова: джет, дифференциальный инвариант, точечное преобразование, эквивалентность.

УДК: 514.75: 517.95

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-98-103

ВВЕДЕНИЕ

Класс уравнений типа Калоджеро имеет вид

$$u_{tx} = uu_{xx} + f(u_x), \quad (1)$$

где f — некоторая функция. Такие уравнения часто встречаются в теории жидких кристаллов, теории относительности, механике сплошных сред. В работе [1] показано, что уравнение приводится к волновому уравнению с помощью контактного преобразования тогда и только тогда, когда две дифференциальные 2-формы Лапласа $\lambda_{\pm} = 0$ (см. [2]). Это позволило найти его точные многозначные решения.

Однако при контактных преобразованиях классические однозначные решения могут переходить в решения многозначные, что создает некоторые трудности при возвращении к решениям исходного уравнения. Такие трудности могут возникнуть, например, при решении начальных и краевых задач. Поэтому представляют интерес классификации уравнений (1) относительно точечных преобразований, при которых такого эффекта не возникает.

1. ДОПУСТИМЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КАЛОДЖЕРО

Допустимые точечные преобразования — это преобразования независимых переменных t, x и зависимой переменной u , при которых вид уравнения остается таким же, т. е. может меняться только функция f . Далее мы считаем, что функция f принадлежит классу C^∞ .

Пусть $J^2(\mathbb{R}^2)$ — пространство 2-джетов функций двух переменных с каноническими координатами $t, x, u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{20}, u_{11}, u_{02}$. В этих координатах дифференциальные формы Картана имеют вид

$$\omega_{00} = du_{00} - u_{10}dt - u_{01}dx, \quad \omega_{10} = du_{10} - u_{20}dt - u_{11}dx, \quad \omega_{01} = du_{01} - u_{11}dt - u_{02}dx.$$

Уравнение (1) порождает в этом пространстве гиперповерхность $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, где

$$F = u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}). \quad (2)$$

Мы будем искать такие векторные поля на пространстве 0-джетов, потоки которых сохраняют вид уравнения Калоджеро. Пусть $X = A \frac{\partial}{\partial t} + B \frac{\partial}{\partial x} + C \frac{\partial}{\partial u_{00}}$ — векторное поле на пространстве 0-джетов, т. е. $A, B, C \in C^\infty(J^0)$ и Φ_s — преобразование сдвига вдоль его траекторий от $s = 0$ до s . Предположим, что под действием этого преобразования поверхность $\mathcal{E}$ переходит в поверхность $\mathcal{E}_s = \{F_s = 0\} \subset J^2$.

Запишем последнюю формулу в терминах функций:

$$\left(\Phi_s^{(2)}\right)^*(F) = g_s F_s. \quad (3)$$

Здесь $\Phi_s^{(2)}$ — продолжение преобразования Φ_s пространства 2-джетов, g_s — некоторая функция на этом пространстве, зависящая от параметра s , причем $g_0 = 1$, функция

$$F_s = u_{11} - u_{00}u_{02} - f_s(u_{01})$$

соответствует поверхности $\mathcal{E}_s$, причем при $s = 0$ получаем формулу (2): $F_0 = F$. Продифференцируем обе части формулы (3) по параметру s при $s = 0$:

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left(\Phi_s^{(2)}\right)^*(F) = \left.\frac{dg_s}{ds}\right|_{s=0} F + \left.\frac{dF_s}{ds}\right|_{s=0}.$$

Замечая, что левая часть последнего равенства является производной Ли функции F вдоль векторного поля $X^{(2)}$, получаем

$$\mathcal{L}_{X^{(2)}}(F) = \left.\frac{dg_s}{ds}\right|_{s=0} F - \left.\frac{df_s(u_{01})}{ds}\right|_{s=0}.$$

Ограничим теперь последнее равенство на поверхность $\mathcal{E}$: $X^{(2)}(F)|_{\mathcal{E}} = h(u_{01})$, где

$$h(u_{01}) = - \left.\frac{df_s(u_{01})}{ds}\right|_{s=0}.$$

Данное уравнение представляет собой систему линейных уравнений в частных производных относительно функций A, B, C , решая которую, находим

$$A = a_1 t + a_0, \quad B = (b_{11} t + b_{10})x + z(t), \quad C = (b_{11} t + b_{10} - a_1)u_{00} - b_{11}x - z'(t).$$

Здесь a_0, a_1, b_{11}, b_{10} — произвольные константы, а $z(t)$ — произвольная гладкая функция. Таким образом, допустимые преобразования уравнений (1) образуют алгебру Ли, порожденную пятью векторными полями:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = t \frac{\partial}{\partial t} - u_{00} \frac{\partial}{\partial u_{00}}, \quad Y_3 = tx \frac{\partial}{\partial x} + (tu_{00} - x) \frac{\partial}{\partial u_{00}},$$

$$Y_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + u_{00} \frac{\partial}{\partial u_{00}}, \quad Y_5 = z(t) \frac{\partial}{\partial x} - z'(t) \frac{\partial}{\partial u_{00}}.$$

Заметим, что Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 образуют конечномерную часть этой алгебры Ли, а векторное поле Y_5 зависит от функции.

Преобразования сдвига вдоль этих векторных полей имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{1,s} &= (t, x, u_{00}) \mapsto (t + s, x, u_{00}), & \Phi_{2,s} &= (t, x, u_{00}) \mapsto (e^s t, x, e^{-s} u_{00}), \\ \Phi_{3,s} &= (t, x, u_{00}) \mapsto (t, e^{ts} x, (u_{00} - sx)e^{ts}), & \Phi_{4,s} &= (t, x, u_{00}) \mapsto (t, e^s x, e^s u_{00}), \\ \Phi_{5,s} &= (t, x, u_{00}) \mapsto (t, x + z(t)s, u_{00} - z'(t)s) \end{aligned}$$

соответственно. Продолжения этих преобразований в пространство 2-джетов действуют на функцию F следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{1,s}^{(2)}\right)^*(F) &= u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}), & \left(\Phi_{2,s}^{(2)}\right)^*(F) &= u_{11} - u_{00}u_{02} - f(e^{-s}u_{01})e^{2s}, \\ \left(\Phi_{3,s}^{(2)}\right)^*(F) &= u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01} - s), & \left(\Phi_{4,s}^{(2)}\right)^*(F) &= u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}), \\ \left(\Phi_{5,s}^{(2)}\right)^*(F) &= u_{11} - u_{00}u_{02} - f(u_{01}). \end{aligned}$$

Потоки, отвечающие векторным полям Y_1, Y_4, Y_5 , не меняют функцию f . Преобразование, отвечающее векторному полю Y_2 , аргумент функции f умножает на e^{-s} , а саму функцию — на e^{2s} . Преобразование, отвечающее векторному полю Y_3 , вычитает из аргумента функции f параметр s .

Таким образом, на функцию f нетривиально действуют преобразования, отвечающие только векторным полям Y_2 и Y_3 .

2. ОРБИТЫ ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Пусть $J^k(\mathbb{R})$ — пространство k -джетов функций одной переменной с каноническими координатами $y, f_0, f_1, \dots, f_k$. Векторные поля Y_2 и Y_3 порождают на пространстве $J^0(\mathbb{R})$ векторные поля

$$Z_1 = -y \frac{\partial}{\partial y} + 2f_0 \frac{\partial}{\partial f_0}, \quad Z_2 = -\frac{\partial}{\partial y},$$

которые определяют алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Группа Ли $\mathcal{G}$, отвечающая этой алгебре Ли, действует на пространстве $J^0(\mathbb{R})$.

Так как векторные поля Z_1, Z_2 линейно зависимы в точках, где $f_0 = 0$, то они определяют особую орбиту коразмерности единица $\Sigma_0 = \{f_0 = 0\} \subset J^0(\mathbb{R})$. Таким образом, эта орбита делит все пространство $J^0(\mathbb{R})$ на две компоненты связности: $f_0 < 0$ и $f_0 > 0$. На каждой компоненте группа Ли $\mathcal{G}$ действует транзитивно.

Продолжения векторных полей Z_1 и Z_2 в пространство 1-джетов имеют вид

$$Z_1^{(1)} = -y \frac{\partial}{\partial y} + 2f_0 \frac{\partial}{\partial f_0} + 3f_1 \frac{\partial}{\partial f_1}, \quad Z_2^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial y}$$

соответственно. Поэтому продолженная группа Ли $\mathcal{G}^{(1)}$ имеет особую орбиту $\Sigma_1 = \{f_0 = f_1 = 0\} \subset J^1(\mathbb{R})$ коразмерности 2. Рассуждая аналогично, получаем, что продолженная группа Ли $\mathcal{G}^{(k)}$ имеет особую орбиту $\Sigma_k = \{f_0 = f_1 = 0 = \dots = f_k = 0\} \subset J^k(\mathbb{R})$ коразмерности $k + 1$ и, стало быть, ее размерность равна единице для любого k .

Точки из множества $J^k(\mathbb{R}) \setminus \Sigma_k$ назовем *регулярными*, а орбиты, состоящие только из регулярных точек, — *регулярными орбитами*.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Функция I , определенная в открытой области пространства $J^k(\mathbb{R})$ называется *дифференциальным инвариантом* порядка $\leq k$ группы Ли $\mathcal{G}$, если она сохраняется под действием k -го продолжения этой группы, т. е. если $(\varphi^{(k)})^*(I) = I$ для любого элемента φ группы Ли $\mathcal{G}$. Функция I является дифференциальным инвариантом группы Ли $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $X^{(k)}(I) = 0$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{g}$. Видим, что дифференциальных инвариантов нулевого порядка не существует. Найдем дифференциальный инвариант первого порядка. Решая систему $Z_1^{(1)}(I) = Z_2^{(1)}(I) = 0$, находим его:

$$I_1 = f_1^2 f_0^{-3}, \quad (4)$$

Перейдем к вычислению дифференциальных инвариантов более высоких порядков. Оператор ∇ на $J^\infty(\mathbb{R})$ называется *инвариантным дифференцированием* группы Ли $\mathcal{G}$, если он коммутирует с любым векторным полем $X^\infty \in \mathfrak{g}^\infty$, т. е. $\nabla \circ X^\infty = X^\infty \circ \nabla$. В нашем случае

$$\nabla = \frac{1}{\sqrt{|f_0|}} \frac{d}{dy}. \quad (5)$$

Используя инвариантное дифференцирование, можно построить инварианты более высоких порядков: $I_2 = \nabla(I_1), \dots, I_k = \nabla(I_{k-1}), \dots$. Действительно, пусть I — дифференциальный инвариант, ∇ — инвариантное дифференцирование, $X^{(k)} \in \mathcal{G}^{(k)}$. Тогда $X^{(k+1)}(\nabla(I)) = \nabla(X^{(k)}(I)) = 0$. Таким образом, функция $\nabla(I)$ тоже является дифференциальным инвариантом.

Дифференциальные инварианты второго и третьего порядков имеют вид

$$I_2 = \frac{2f_2 f_0 - 3f_1^2}{2f_0^3}, \quad I_3 = \frac{2f_3 f_0^2 - 10f_1 f_2 f_0 + 9f_1^3}{2f_0^{9/2}}.$$

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов допустимых преобразований уравнения Калоджеро (1) порождена базисным инвариантом (4) и инвариантным дифференцированием (5).*

Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leq k$ совпадает с коразмерностью орбиты общего положения $\mathcal{O}$ в пространстве k -джетов:

$$\dim J^k(\mathbb{R}) = k + 2, \quad \dim \mathcal{O} = 2 \implies \text{codim} \mathcal{O} = k + 2 - 2 = k.$$

Теорема 2. *Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leq k$ равна k .*

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ТИПА КАЛОДЖЕРО

Рассмотрим проблему эквивалентности уравнений типа Калоджеро относительно допустимых преобразований.

Укажем другой, более простой дифференциальный инвариант второго порядка, вместо инварианта I_2 :

$$\widehat{I}_2 = I_2 + \frac{3}{2} I_1 = \frac{f_2}{f_0^2}.$$

Ограничим эти инварианты на функцию $f(y)$:

$$I_1|_{f(y)} = \frac{(f'(y))^2}{(f(y))^3}, \quad \widehat{I}_2|_{f(y)} = \frac{f''(y)}{(f(y))^2}.$$

Будем считать, что дифференциал $d(I_1|_{f(y)}) \neq 0$. Поскольку данные функции определены на прямой, они являются функционально зависимыми, т.е. существует функция Q такая, что

$$Q\left(\frac{(f')^2}{f^3}, \frac{f''}{f^2}\right) = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение представляет собой гиперповерхность E_Q в пространстве 2-джетов. Векторные поля

$$Z_1^{(2)} = -y \frac{\partial}{\partial y} + 2f_0 \frac{\partial}{\partial f_0} + 3f_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + 4f_2 \frac{\partial}{\partial f_2}, \quad Z_2^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial y}$$

касаются этой поверхности и являются ее симметриями.

Функция $f = h(y)$ является решением дифференциального уравнения (6) тогда и только тогда, когда 2-график функции $h(y)$

$$\Gamma_h^2 = \{f_0 = h(y), f_1 = h'(y), f_2 = h''(y)\}$$

лежит на поверхности E_Q . Таким образом, эквивалентность регулярных уравнений Калоджеро означает эквивалентность отвечающих им кривым на поверхности E_Q относительно группы Ли $\mathcal{G}$.

Особые орбиты делят пространство $J^2(\mathbb{R})$ на восемь компонент связности в зависимости от знаков f_0, f_1, f_2 . На каждой из них группа Ли $\mathcal{G}$ действует транзитивно. Обозначим для краткости $L = \Gamma_h^2$.

Теорема 3. Пусть для двух регулярных кривых L_1 и L_2 выполнены следующие условия:

- 1) функции Q_1 и Q_2 не обращаются в нуль;
- 2) кривые L_1 и L_2 принадлежат одной компоненте связности.

Кривые L_1 и L_2 локально $\mathcal{G}$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда $Q_1 \equiv Q_2$.

Схема доказательства. Возьмем две произвольные точки a_1 и a_2 , лежащие на кривых L_1 и L_2 соответственно. В силу транзитивности группы Ли $\mathcal{G}$ существует преобразование, переводящее точку a_1 в точку a_2 . Соответственно кривая L_1 перейдет в кривую $\widetilde{L}_1$, проходящую через точку a_2 . Так как $\widetilde{L}_1$ и L_2 — решения уравнения (6), то согласно теореме единственности в окрестности некоторой точки a_2 эти решения должны совпадать. Это означает, что функция h_1 переходит в функцию h_2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в данной работе классификационные результаты основаны на геометрическом подходе к нелинейным дифференциальным уравнениям, в частности на их представлении в виде подмногообразий в пространствах джетов [3]. Однако такой подход не ограничивается только вопросами классификации. Его универсальность демонстрируется, например, в работе [4], где предложен метод построения точных решений, альтернативный методу симметрий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mukhina S.S. *An Exact Solution of the Hunter–Saxton–Calogero Equation by Contact Linearization Method*, Adv. Syst. Sci. Appl. **23** (4), 1–7 (2023).
- [2] Kushner A.G. *A Contact Linearization Problem for Monge–Ampère Equations and Laplace Invariants*, Acta Appl. Math. **101**, 177–189 (2008).
- [3] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1986).

- [4] Kushner A.G. *Dynamics of Evolutionary Differential Equations with Several Spatial Variables*, Math., MDPI **11** (2), 335–346 (2023).

Валерия Павловна Кузнецова

*Астраханский государственный университет им. В.Н. Татищева,
ул. Татищева, д. 20а, г. Астрахань, 414056, Россия,*

e-mail: valeriawh3@mail.ru

Ирина Станиславовна Стрельцова

*Астраханский государственный университет им. В.Н. Татищева,
ул. Татищева, д. 20а, г. Астрахань, 414056, Россия,*

e-mail: strelzova_is@mail.ru

V.P. Kuznetsova and I.S. Streltsova

Classification of the Calogero equations with respect to point transformations

Abstract. The article is devoted to the problem of classification of Calogero-type equations with respect to point transformations. It is known that Calogero equations can be reduced to linear equations using contact transformations, provided that the function f is quadratic. However, for an arbitrary function f the equivalence problem is open. Admissible point transformations that preserve the class of Calogero equations are considered. We construct differential invariants with respect to such transformations and apply them to solve the equivalence problem.

Keywords: jet, differential invariant, point transformation, equivalence.

Valeria Pavlovna Kuznetsova

*V.N. Tatishchev Astrakhan State University,
20a Tatishchev str., Astrakhan, 414056 Russia,*

e-mail: valeriawh3@mail.ru

Irina Stanislavovna Streltsova

*V.N. Tatishchev Astrakhan State University,
20a Tatishchev str., Astrakhan, 414056 Russia,*

e-mail: strelzova_is@mail.ru