

В.Г. ЗВЯГИН, М.В. ТУРБИН

РАЗРЕШИМОСТЬ В СЛАБОМ СМЫСЛЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СГЛАЖЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЯУМАННА

Аннотация. Устанавливается разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для модели Кельвина–Фойгта второго порядка со сглаженной производной Яуманна по времени с учетом памяти движения жидкости. Для доказательства рассматривается задача, аппроксимирующая исходную, и на основе априорных оценок решений и теории степени Лере–Шаудера устанавливается ее разрешимость. После чего осуществляется предельный переход при стремлении параметра аппроксимации к нулю и показывается, что решения аппроксимационной задачи слабо сходятся к слабому решению исходной задачи.

Ключевые слова: слабое решение, теорема существования, модель Кельвина–Фойгта, сглаженная производная Яуманна.

УДК: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-91-97

ВВЕДЕНИЕ

Движение большинства встречающихся на практике вязких несжимаемых жидкостей описывается системой уравнений Навье–Стокса. При этом имеется ряд жидкостей (суспензий, эмульсий, гелей и т.д.), которые не удовлетворяют ньютоновскому реологическому соотношению. Первые модели таких жидкостей были созданы в работах Максвелла, Олдройда, Джеффриса, Фойгта. Позднее на их основе была создана общая теория линейных вязкоупругих жидкостей конечного порядка (см., например, [1]) с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации и запаздывания. Одной из таких моделей является модель Кельвина–Фойгта второго порядка, реологическое соотношение которой имеет вид

$$\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\nu \mathcal{E}(v) + 2\kappa_1 \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial t} + 2\kappa_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}(v)}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь σ — девиатор тензора напряжений, v — скорость жидкости, $\mathcal{E}(v) = 1/2 (\nabla v + (\nabla v)^T)$ — тензор скоростей деформаций, λ — время релаксации, ν — вязкость жидкости, κ_1, κ_2 — времена запаздывания. Исходя из физического смысла, $\lambda > 0$, $\kappa_2 > 0$. После выражения σ

Поступила в редакцию 18.09.2024, после доработки 18.09.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Результаты получены в рамках выполнения Госзадания Министерства науки и высшего образования РФ (проект FZGU-2023-0007).

из (1) получается соотношение

$$\sigma = 2\mu_1\mathcal{E}(v) + 2\mu_2\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial t} + 2\mu_3\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda}\mathcal{E}(v)(s)ds + \sigma_0. \quad (2)$$

Здесь σ_0 — функция, зависящая от начальных условий на σ и $\mathcal{E}$ (для простоты обычно полагают $\sigma_0 \equiv 0$), $\mu_1 = \varkappa_1/\lambda - \varkappa_2/\lambda^2$, $\mu_2 = \varkappa_2/\lambda > 0$, $\mu_3 = \nu/\lambda - \varkappa_1/\lambda^2 + \varkappa_2/\lambda^3$.

Исследование начально-краевых задач для системы уравнений, получающейся постановкой σ из (2) в систему уравнения движения жидкости, а также моделей Кельвина–Фойгта произвольного конечного порядка, было начато еще в работах А.П. Осолкова (см. обзорную статью [2] и имеющуюся там литературу). Корректность постановок начально-краевых задач для моделей Кельвина–Фойгта конечного порядка, а также теоремы существования слабых решений соответствующих начально-краевых задач были получены в [3].

При этом частная производная в реологическом соотношении является только приближением и не соответствует реальным физическим процессам. Поэтому было рассмотрено соотношение (1), в котором частная производная по времени заменена на полную (субстанциональную) производную по времени $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. В этом случае выражение для σ принимает вид

$$\sigma = 2\mu_1\mathcal{E}(v) + 2\mu_2\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt} + 2\mu_3\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda}\mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x))ds. \quad (3)$$

Здесь z — решение следующей задачи Коши в интегральной форме:

$$z(t; 0, x) = x + \int_0^t v(s; z(s; 0, x))ds, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega; \quad (4)$$

т. е. z — это траектория частицы, которая при $t = 0$ находилась в точке x .

Разрешимость начально-краевой задачи в слабом смысле для соответствующей реологическому соотношению (3) системы уравнений была исследована в [4]–[6].

Отметим, что и соотношение (2), и соотношение (3) (также как и реологическое соотношение (2) и с частной, и с полной производными по времени) не удовлетворяют принципу объективности поведения материала. При этом именно модели, удовлетворяющие принципу объективности, более точно описывают поведение жидкости. В данной работе рассматривается реологическое соотношение для модели Кельвина–Фойгта со сглаженной производной Яуманна:

$$\sigma = 2\mu_1\mathcal{E}(v) + 2\mu_2\left(\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt} + \mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) + 2\mu_3\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda}\mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x))ds, \quad (5)$$

где $W_\rho(v)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y)W(v)(t, y)dy$ — сглаженный тензор завихренности. Здесь $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами. Как и ранее, z — решение задачи Коши (4).

Отметим, что рассматриваемый вариант сглаженной объективной производной Яуманна впервые был предложен в работе [7], где было доказано существование слабого решения начально-краевой задачи для модели Джеффриса со сглаженной производной Яуманна.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область с гладкой границей, $T > 0$. Подставляя σ из соотношения (5) в систему уравнений движения жидкости, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1 \Delta v - \mu_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \mu_3 \operatorname{Div} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x)) ds - \\ - 2\mu_2 \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} + \mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v) \right) + \nabla p = f; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega; \quad (7)$$

$$z(t; 0, x) = x + \int_0^t v(s; z(s; 0, x)) ds, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Исходя из физического смысла, $\mu_2 > 0$, $\lambda > 0$.

Для системы уравнений (6)–(8) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0. \quad (9)$$

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $C_0^\infty(\Omega)^n$ — пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем в Ω . Пространство $\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\}$, V^0 и V^1 — это пополнения $\mathcal{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно, $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Рассмотрим в $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi \Delta$, где $\pi : L_2(\Omega)^n \rightarrow V^0$ — проектор Лере. Известно (см., например, [8]), что собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0 . Пусть $0 < \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \dots \leq \xi_k \leq \dots$ — собственные значения оператора A , E_∞ — множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j . Пространство V^α , $\alpha \in \mathbb{R}$,

определяется как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^\infty \xi_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{1/2}$. В [9] показано, что эта норма в пространствах V^α , $\alpha \in \mathbb{N}$, эквивалентна норме $\|v\|_{V^\alpha} = \|A^{\alpha/2} v\|_{V^0}$.

Для определения слабого решения введем пространства $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$ и $E_2 = \{v : v \in C([0, T], V^5), v' \in L_2(0, T; V^5)\}$ с соответствующими нормами $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0, T; V^1)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^{-1})}$ и $\|v\|_{E_2} = \|v\|_{C([0, T], V^5)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^5)}$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^1$.

Определение 1. Слабым решением начально-краевой задачи (6)–(9) называется функция $v \in E_1$, которая удовлетворяет для любой пробной функции $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0, T)$ равенству

$$\begin{aligned} \langle (v' + \mu_2 A v'), \varphi \rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_1 \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \mu_3 \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x)) : \mathcal{E}(\varphi) dx ds - \mu_2 \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \end{aligned}$$

$$-\mu_2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + 2\mu_2 \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Здесь z — регулярный Лагранжев поток, соответствующий функции v . Подробнее о регулярных Лагранжевых потоках см., например, [10]–[12]. Задание начального условия для функции из пространства E_1 корректно, так как любая функция из $L_{\infty}(0, T; V^1) \cap C([0, T], V^{-1})$ принадлежит $C_w([0, T], V^1)$ ([13], гл. III, лемма 1.4).

Основным результатом работы является

Теорема. *Начально–краевая задача (6)–(9) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in E_1$.*

4. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Для доказательства рассматривается задача с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \Delta^4 v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1 \Delta v - \mu_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \mu_3 \text{Div} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x)) ds - \\ - 2\mu_2 \text{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} + \mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v) \right) + \nabla p = f; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{div } v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega; \quad v(0, x) = b(x), \quad x \in \Omega; \quad (11)$$

$$z(t; 0, x) = x + \int_0^t v(s; z(s; 0, x)) ds, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega; \quad (12)$$

$$v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = \Delta v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = \Delta^2 v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = \Delta^3 v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0. \quad (13)$$

Будем предполагать, что $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $b \in V^5$.

Определение 2. Слабым решением начально–краевой задачи (10)–(13) называется функция $v \in E_2$, удовлетворяющая для любой пробной функции $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0, T)$ равенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v' \varphi dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_1 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \mu_2 \int_{\Omega} \nabla v' : \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \Delta^2 v' : \nabla \Delta \varphi dx + \\ + \mu_3 \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x)) : \mathcal{E}(\varphi) dx ds - \mu_2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \\ - \mu_2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + 2\mu_2 \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

и начальному условию $v(0) = b$.

Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$A^4 : V^5 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle A^4 v, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\Delta^2 v) : \nabla(\Delta \varphi) dx;$$

$$B_1 : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx;$$

$$B_2 : V^1 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx;$$

$$B_3 : V^1 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx;$$

$$D : V^1 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle D(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} (\mathcal{E}(v)W_{\rho}(v) - W_{\rho}(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla \varphi dx;$$

$$J : V^3 \rightarrow V^{-3}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx; \quad A : V^1 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx;$$

$$H : C([0, T], V^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}), \quad \langle Hv(t), \varphi \rangle = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \int_{\Omega} \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x)) : \mathcal{E}(\varphi) dx ds.$$

Также введем операторы

$$\begin{aligned} L : E_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-3}) \times V^5, \quad L(v) = ((J + \mu_2 A + \varepsilon A^4)v', v|_{t=0}); \\ K : E_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-3}) \times V^5, \\ K(v) &= (\mu_1 Av + \mu_3 Hv - B_1(v) - \mu_2 B_2(v) - \mu_2 B_3(v) + 2\mu_2 D(v), 0). \end{aligned}$$

Тогда задача о нахождении слабого решения начально-краевой задачи (10)–(13) эквивалентна задаче существования решения $v \in E_2$ операторного уравнения

$$L(v) + K(v) = (f, b). \quad (14)$$

Оператор L непрерывно обратим (это следует из [4], лемма 6), оператор K компактен (это следует из результатов работ [3], [14], [15]). Все решения операторного уравнения (14) удовлетворяют оценкам

$$\varepsilon \|v\|_{E_2} \leq C(\|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \|b\|_{V^0}^2 + \mu_2 \|b\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|b\|_{V^4}^2) + \varepsilon \|b\|_{V^5}^2, \quad (15)$$

$$\|v\|_{E_1} \leq C(\|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \|b\|_{V^0}^2 + \mu_2 \|b\|_{V^1}^2 + \varepsilon \|b\|_{V^4}^2). \quad (16)$$

Здесь C — константа, не зависящая от v и ε . Отметим, что подобные оценки без оператора D получены в работе [4], оценка оператора D может быть найдена в работе [14].

Затем на основе теории степени Лере–Шаудера вполне-непрерывных векторных полей показывается, что уравнение (14) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in E_2$. После чего на основе неравенств (15) и (16) показывается, что из последовательности слабых решений начально-краевой задачи (10)–(13) можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к слабому решению начально-краевой задачи (6)–(9) при стремлении параметра аппроксимации ε к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Виноградов Г.В., Малкин А.Я. *Реология полимеров* (Химия, Москва, 1977).
- [2] Осколков А.П. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта*, Тр. МИАН СССР **179**, 126–164 (1988).
- [3] Звягин В.Г., Турбин М.В. *Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта*, Соврем. матем. фундамент. напр. **31**, 3–144 (2009).
- [4] Turbin M., Ustiuzhaninova A. *Existence of weak solution to initial-boundary value problem for finite order Kelvin–Voigt fluid motion model*, Boletín de la Sociedad Matem. Mexicana **29**, article 54 (2023), DOI: 10.1007/s40590-023-00526-y.
- [5] Турбин М.В., Устюжанинова А.С. *Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров*, Изв. вузов. Матем. (8), 62–78 (2019), DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-62-78.
- [6] Турбин М.В., Устюжанинова А.С. *Разрешимость начально-краевой задачи для модифицированной модели Кельвина–Фойгта с памятью вдоль траекторий движения жидкости*, Дифференц. уравнения **60** (2), 187–210 (2024), DOI: 10.31857/S0374064124020046.
- [7] Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. *Approximating-topological methods in some problems of hydrodynamics*, J. Fixed Point Theory Appl. **3** (1), 23–49 (2008), DOI: 10.1007/s11784-008-0056-7.
- [8] Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости* (Наука, Москва, 1970).
- [9] Звягин В.Г., Турбин М.В. *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред* (КРАСАНД, Москва, 2012).
- [10] DiPerna R.J., Lions P.-L. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (3), 511–547 (1989), DOI: 10.1007/BF01393835.
- [11] Zvyagin V.G., Orlov V.P. *Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory*, Nonlinear Anal. **172**, 73–98 (2018), DOI: 10.1016/j.na.2018.02.012.
- [12] Звягин В.Г., Орлов В.П., Турбин М.В. *Разрешимость начально-краевой задачи для модели Олдройда высокого порядка*, Изв. вузов. Матем. (7), 79–85 (2022), DOI: 10.26907/0021-3446-2022-7-79-85.
- [13] Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ* (Мир, Москва, 1981).
- [14] Zvyagin A.V. *Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative*, Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl. **90**, 70–85 (2013), DOI: 10.1016/j.na.2013.05.022.
- [15] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости*, Дифференц. уравнения **38** (12), 1633–1645 (2002).

Виктор Григорьевич Звягин

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: zvg_vsu@mail.ru

Михаил Вячеславович Турбин

Воронежский государственный университет,
пл. Университетская, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: mrmike@mail.ru

V.G. Zvyagin and M.V. Turbin

Weak solvability of the initial-boundary value problem for the second-order Kelvin–Voigt model with smoothed Jaumann derivative

Abstract. The paper establishes the solvability in the weak sense of the initial-boundary value problem for the second-order Kelvin–Voigt model with smoothed Jaumann time derivative taking into account the memory of fluid motion. For the proof, a problem approximating the original one is considered, and its solvability is established based on a priori estimates of solutions and the Leray–Schauder degree theory. After that, the limit transition is carried out as the approximation parameter tends to zero, and it is shown that the solutions of the approximation problem weakly converge to the solution of the original problem.

Keywords: weak solution, existence theorem, Kelvin–Voigt model, smoothed Jaumann derivative.

Victor Grigorievich Zvyagin

Voronezh State University,

1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia,

e-mail: zvg_vsu@mail.ru

Mikhail Vyacheslavovich Turbin

Voronezh State University,

1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia,

e-mail: mrmike@mail.ru