

М.Ю. КОКУРИН

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА С ИСТОЧНИКАМИ НА ОКРУЖНОСТИ

Аннотация. Рассматривается линейное интегральное уравнение, связанное с коэффициентной обратной задачей для гиперболического уравнения. В обратной задаче по данным измерений рассеянных неоднородностью скалярных волновых полей требуется восстановить скорость распространения сигнала на неоднородности. Зондирующие поля генерируются точечными источниками, сосредоточенными на окружности. Доказывается единственность решения обратной задачи с таким расположением источников при достаточно общих предположениях о выборе множества детекторов. Устанавливается связь свойства осевой симметрии данных рассеяния и симметрии искомой функции относительно той же оси.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, уравнение М.М. Лаврентьева, непероопределенная постановка, единственность, симметрия.

УДК: 517.955: 517.572

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-53-60

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим обратную задачу волнового зондирования ограниченной неоднородности набором точечных источников, расположенных вне этой неоднородности [1]. Скалярное волновое поле $u(x, t) = u(x, t; y)$, возбуждаемое источником, находящимся в точке y , определяется решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) &= \Delta u(x, t) - \delta(x - y)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $c(x) > 0$ — скорость распространения сигнала в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Считаем, что в (1) функция $c(x) \equiv c_0$ вне априори заданной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, постоянная c_0 известна, а значения $c(x)$ при $x \in D$ подлежат определению, $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ связно. Далее предполагаем, что $c \in L_\infty(D)$, непрерывная функция g удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty g(t)dt \neq 0; \quad |g(t)| \leq C_0 e^{-\beta t}, \quad \beta > 0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Для отыскания $c(x)$ при $x \in D$ волновое поле $u = u(x, t; y)$ измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in Z$, где $Z \subset \mathbb{R}^3$ — множество детекторов, $\overline{Z} \cap \overline{D} = \emptyset$. Будем считать, что в эксперименте

Поступила в редакцию 10.02.2024, после доработки 05.03.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект N24–21–00031).

зондирования используется множество источников $y \in Y$, $\bar{Y} \cap \bar{D} = \emptyset$. Множества Y и Z далее считаем областями, расположенными на гладких многообразиях в $\mathbb{R}^3$. Обозначим сформулированную обратную задачу через $\{Y, Z\}$. Далее нас будет интересовать вопрос о том, определяется ли функция $c(x)$ данными наблюдения однозначно.

В работах [2], [3] М.М. Лаврентьев предложил подход к решению нелинейных коэффициентов обратных задач для широкого класса уравнений в частных производных, позволяющий сводить такие задачи к линейным интегральным уравнениям. Опишем вкратце этот подход в применении к обратной задаче $\{Y, Z\}$. Для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geq 0$,

определим преобразование Лапласа $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$. Будем считать, что все функции

$u(z, t; y)$, $y \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно достаточно быстро убывают при $t \rightarrow +\infty$, когда $z \in Z$, так что их преобразования Лапласа существуют при $p \geq 0$. Кроме того, предполагаем, что $u(x, t; y) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in Y$ и $t > 0$. Условия на функцию $c(x)$, обеспечивающие эти требования, обсуждаются в [4], [5]. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D, \quad (3)$$

и перепишем уравнение (1) в виде

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}(x, t) = \xi(x) u_{tt}(x, t) + \delta(x - y) g(t). \quad (4)$$

Согласно (3) функция c однозначно определяется по ξ , поэтому далее будет идти речь об отыскании $\xi(x)$ при $x \in D$. Применяя к обеим частям равенства (4) преобразование Лапласа по времени, получаем

$$\Delta \tilde{u}(x, p; y) - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{u}(x, p; y) = p^2 \xi(x) \tilde{u}(x, p; y) + \tilde{g}(p) \delta(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

В силу сделанных предположений $\tilde{u}(x, p; y) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$ при $y \in Y$, $p \geq 0$. Нам потребуется фундаментальное решение

$$G(x, x_0; p) = -\frac{e^{-\frac{p}{c_0}|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|} \quad (6)$$

уравнения

$$\Delta u(x) - \frac{p^2}{c_0^2} u(x) = \delta(x - x_0), \quad p \geq 0$$

с условием на бесконечности $u(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$. Обозначим $H(x, y; p) = \tilde{g}(p) G(x, y; p)$. Из (5) с учетом (6) следует, что при $x \in \mathbb{R}^3$ справедливо равенство

$$\tilde{u}(x, p; y) = H(x, y; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; y) \xi(x') dx'. \quad (7)$$

Дифференцируя дважды равенство (7) по p и полагая в полученном выражении $p = 0$, получаем (см. подробности в [6]), что искомая функция $\xi(x)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x - y||x - z|} = F(y, z), \quad (y, z) \in Y \times Z, \quad (8)$$

называемому уравнением М.М.Лаврентьева. Правая часть в (8) имеет вид

$$F(y, z) = \frac{8\pi^2}{\tilde{g}(0)} \left(\int_0^\infty t^2 u(z, t; y) dt - H_{pp}(z, y; 0) \right), \quad (9)$$

где

$$H_{pp}(z, y; 0) = -\frac{\tilde{g}(0)|y - z|}{4\pi c_0^2} + \frac{\tilde{g}'(0)}{2\pi c_0} - \frac{\tilde{g}''(0)}{4\pi|y - z|}. \quad (10)$$

Заметим, что $\tilde{g}(0) \neq 0$ в силу условия (2).

Таким образом, входными данными для определения ξ служит величина волнового поля $u(z, t; y)$, усредненная по времени с весом t^2 , для различных пар $(y, z) \in Y \times Z$. Интегральное уравнение (8) является типичным примером линейной некорректной задачи. Для устойчивой аппроксимации его решения в условиях неизбежных погрешностей правой части применим широкий спектр современных эффективных численных методов (см., например, [7]). Результаты некоторых численных экспериментов с этим уравнением приведены в [8]–[10].

К уравнению (8) сводятся также обратные задачи зондирования неоднородности точечными гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [11], с. 223; [12]). В том случае, когда оператор уравнения (8) инъективен, имеет место единственность решения исходной нелинейной обратной задачи. Указанное свойство выполняется, например, если Y, Z — области на плоскости, не пересекающей D , либо ограниченные поверхности, содержащие множество D внутри [11], [12]. Однако в этих случаях размерность пространственного носителя данных $Y \times Z$ в (8) равна четырем, в то время как искомая функция ξ зависит от трех переменных. Тем самым постановка соответствующих обратных задач в указанных работах оказывается переопределенной в пространственном смысле. Нас интересует единственность решения уравнения (8) в пространственно неперепреопределенной постановке, когда $\dim(Y) + \dim(Z) = 3$.

Обоснование единственности решения уравнения (8) сводится к доказательству того, что соответствующее однородное уравнение

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x - y||x - z|} = 0, \quad (y, z) \in Y \times Z, \quad (11)$$

имеет в классе $L_\infty(D)$ лишь тривиальное решение. В этом случае наряду с уравнением (8) исходная обратная задача $\{Y, Z\}$ имеет единственное решение. Поскольку переменные y, z входят в уравнение (11) симметрично, то же самое верно и для обратной задачи $\{Z, Y\}$.

Будем говорить, что $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ есть множество единственности (для гармонических функций в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$), если для любой гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ функции $u \in C^2$ такой, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0,$$

равенство $u|_{\mathcal{M}} = 0$ влечет $u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. В качестве примера укажем замкнутую поверхность, не пересекающую $\overline{D}$, либо область на плоскости, не пересекающей $\overline{D}$. Множеством единственности является также любая область на аналитической поверхности, например, сфере, не пересекающей $\overline{D}$. Пусть $\mathcal{H}(D)$ есть класс всех функций из $C^2(D)$, гармонических в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$.

Теорема 1 ([13]). *Пусть $\mathcal{M}$ есть множество единственности. Тогда множество всех конечных линейных комбинаций функций семейства $\{|x - w|^{-1} : w \in \mathcal{M}\}$ плотно в $\mathcal{H}(D)$ в смысле метрики $L_2(D)$.*

Из теоремы 1 следует, что если Z есть множество единственности в указанном выше смысле, то равенство (11) влечет

$$\int_D \frac{\xi(x)u(x)dx}{|x-y|} = 0, \quad y \in Y, \quad u \in \mathcal{H}(D). \quad (12)$$

Отправной точкой для дальнейших построений является

Теорема 2 ([6]). *Пусть Z есть множество единственности, L — прямая в $\mathbb{R}^3$, Y — открытое множество, принадлежащее неограниченной компоненте $L \setminus \overline{D}$. Тогда уравнение (12) имеет лишь тривиальное решение и для любой правой части F уравнение (8) имеет не более одного решения.*

В условиях теоремы 2 размерность пространственного носителя данных $Y \times Z$ в задачах $\{Y, Z\}$ и $\{Z, Y\}$ оказывается равной трем, как и размерность носителя D искомой функции. В этом смысле рассматриваемые обратные задачи оказываются пространственно неперепределенными. Теорема 2 доставляет частичный ответ на поставленный в ([12], с. 176) вопрос о том, может ли единственность решения (8) иметь место когда Z есть множество единственности, а Y — открытая часть аналитической кривой в $\mathbb{R}^3$. Примеры неаналитических кривых Y с таким свойством построены в [14]. В теореме 2 в качестве аналитической кривой, несущей множество источников Y , выступает прямая. Ввиду широкого распространения томографических схем с различной геометрией многообразий источников и детекторов теоретический и практический интерес представляет вопрос о том, для каких отличных от прямой и достаточно "простых" аналитических кривых Y имеет место единственность в обратной задаче $\{Y, Z\}$. В следующем разделе покажем, что другой подходящей аналитической кривой является окружность. В разделе 3 полученный результат используется для обоснования связи осевой симметрии данных зондирования и симметрии искомой функции $s(x)$ относительно той же оси.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ М.М.ЛАВРЕНТЬЕВА

Для единичного шара $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$ обозначим $S = \partial B$. Нам потребуется преобразование инверсии относительно сферы S , определяемое формулой $J(x) = |x|^{-2}x$ для $x \neq 0$. Точке $x = 0$ отображение J по определению ставит в соответствие бесконечно удаленную точку. Как известно, отображение $J : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ действует взаимно однозначно и преобразует сферы в сферы, где допускаются и сферы бесконечного радиуса, т. е. плоскости. Кроме того, J — открытое отображение и $J \circ J$ есть тождественное отображение. При этом образом шара B является его внешность $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}$. Образом сферы $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ является плоскость в том и только том случае, когда $0 \in \Sigma$. Аналогично J действует на любой плоскости Π , содержащей начало координат. Именно, J взаимно однозначно отображает $B \cap \Pi$ на $(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}) \cap \Pi$, при этом образом окружности $\sigma \subset B \cap \Pi$, проходящей через начало координат, является прямая в $(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}) \cap \Pi$.

С отображением инверсии J тесно связано преобразование Кельвина, которое действует на функции u , определенные в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Это преобразование определяется формулой

$$K[u](x) = \frac{1}{|x|} u(J(x)), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Нам потребуется

Теорема 3 ([15], с. 63). *Пусть Ω есть ограниченная область с замыканием в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Функция $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда ее преобразование Кельвина $K[u] \in \mathcal{H}(J(\Omega))$, где $J(\Omega)$ — образ области Ω при отображении J .*

Обратимся теперь к однородному уравнению (12). Пусть Y есть открытая часть окружности σ , не пересекающей $\bar{D}$. Без ограничения общности можем считать, что $\bar{D} \subset B$ и $0 \in \sigma$. При необходимости эти условия обеспечиваются линейной заменой переменных. Поскольку σ есть аналитическая кривая, а функция, стоящая в левой части равенства (12), гармонична и тем самым аналитична по $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, это равенство по аналитичности продолжается на все точки $y \in \sigma$. Для $y \in \sigma \setminus \{0\}$ мы имеем $y = J(y')$, где точки y' пробегают прямую L' , лежащую вне $\bar{B}$. В интеграле (12) сделаем замену переменной $x = J(x')$, тогда x' пробегает область $D' = J(D)$, лежащую вместе с замыканием в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$. Прямое вычисление показывает, что якобиан отображения J имеет вид

$$\det(J'(x)) = -\frac{1}{|x|^6}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (14)$$

Отметим также тождество

$$|J(x) - J(y)| = \frac{|x - y|}{|x||y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \quad (15)$$

Для доказательства (15) достаточно записать

$$|J(x) - J(y)|^2 = \left| \frac{x}{|x|^2} - \frac{y}{|y|^2} \right|^2 = \frac{||y|^2 x - |x|^2 y|^2}{|x|^4 |y|^4} = \frac{|y|^4 |x|^2 - 2|x|^2 |y|^2(x, y) + |x|^4 |y|^2}{|x|^4 |y|^4} = \frac{|x - y|^2}{|x|^2 |y|^2}.$$

С учетом (13)–(15), равенство (12) после замены принимает вид

$$\int_{D'} \frac{\xi(J(x')) u(J(x')) |\det(J'(x'))| dx'}{|J(x') - J(y')|} = |y'| \int_{D'} \frac{\xi(J(x')) K[u](x') dx'}{|x'|^4 |x' - y'|} = 0, \quad y' \in L'. \quad (16)$$

Обозначим $\eta(x') = |x'|^{-4} \xi(J(x'))$, $x' \in D'$. Тогда из (16) в силу теоремы 3 для всех функций $v \in \mathcal{H}(D')$ выполняется

$$\int_{D'} \frac{\eta(x') v(x') dx'}{|x' - y'|} = 0, \quad y' \in L'. \quad (17)$$

По построению, прямая L' не имеет общих точек с D' . Применяя к уравнению (17) теорему 2, заключаем, что $\eta(x') = 0$ для почти всех (п. в.) $x' \in D'$, поэтому $\xi(J(x')) = 0$ для указанных x' . Отсюда $\xi(x) = 0$ для п.в. $x \in D$. Тем самым доказана

Теорема 4. Пусть Z есть множество единственности, σ — окружность в $\mathbb{R}^3$, $\sigma \cap \bar{D} = \emptyset$, Y — открытое множество из σ . Тогда для любой правой части F уравнение (8) имеет не более одного решения. Обратные задачи $\{Y, Z\}$ и $\{Z, Y\}$ также имеют единственное решение.

Выбирая в качестве Z двумерное множество единственности (см. примеры выше), получаем пространственно непереопределенные обратные задачи $\{Y, Z\}$, $\{Z, Y\}$, в которых множество источников или детекторов Y лежит на окружности σ .

Актуальность результата в сравнении с теоремой 2 объясняется широким практическим использованием схем томографического исследования с расположением источников зондирующих волн на окружностях, охватывающих изучаемую неоднородность.

3. ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Теоремы единственности типа теорем 2, 4 при наличии общей группы симметрии у рассеивателя D и носителя данных $Y \times Z$ позволяют дать характеристику свойств симметрии

искомой функции на D в терминах той же симметрии данных рассеяния на $Y \times Z$. В качестве характерного примера укажем теорему С. Карпа ([16], сс. 112, 197) и ее обобщение [17], где речь идет о сферической симметрии амплитуды рассеяния $A(\eta, \eta')$ как функции двух векторов η, η' единичной сферы S в связи с такой же симметрией функции, описывающей зондируемую неоднородность. В [6] аналогичная теорема установлена для случая осевой симметрии неоднородности и данных рассеяния на $Y \times Z$, где Y — отрезок оси x_3 , Z — круг с центром на этой оси, перпендикулярный ей. Теорема 4, обеспечивающая единственность в случае, когда Y — окружность, позволяет пополнить указанные результаты новым подобным утверждением, включающим другую конфигурацию множеств источников и детекторов. Пусть область D симметрична относительно оси x_3 ,

$$Z = \{(x_1, x_2, \kappa) : x_1^2 + x_2^2 < r^2\}, \quad \kappa \neq 0, \quad Y = \sigma = \{(x_1, x_2, 0) : x_1^2 + x_2^2 = \rho^2\} \quad (18)$$

и $(Z \cup \sigma) \cap \overline{D} = \emptyset$.

Обозначим через R_φ матрицу поворота $\mathbb{R}^3$ на угол $\varphi \in [-\pi, \pi)$ вокруг оси x_3 . Предположим, что

$$u(R_\varphi z, t; R_\varphi y) = u(z, t; y), \quad (y, z) \in Y \times Z, \quad t > 0, \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \quad (19)$$

Поскольку $|R_\varphi y - R_\varphi z| = |y - z|$ для всех $(y, z) \in Y \times Z$, из (9), (10) следует, что при выполнении (19) справедливо

$$F(R_\varphi y, R_\varphi z) = F(y, z), \quad (y, z) \in Y \times Z, \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \quad (20)$$

Так как $R_{-\varphi}(D) = D$ и $\det R_\varphi = 1$, то замена переменной $x = R_\varphi x'$ в левой части уравнения (8) с учетом (20) дает

$$\int_D \frac{\xi(R_\varphi x') dx'}{|R_\varphi x' - y| |R_\varphi x' - z|} = \int_D \frac{\xi(R_\varphi x') dx'}{|x' - R_{-\varphi} y| |x' - R_{-\varphi} z|} = F(y, z) = F(R_{-\varphi} y, R_{-\varphi} z) \quad (21)$$

для всех $(y, z) \in Y \times Z$.

Поскольку при фиксированном φ точки $\tilde{y} = R_{-\varphi} y$ и $\tilde{z} = R_{-\varphi} z$ пробегают все множество Y и Z соответственно, когда y и z меняется в пределах Y и Z , из (21) получаем

$$\int_D \frac{\xi(R_\varphi x') dx'}{|x' - \tilde{y}| |x' - \tilde{z}|} = F(\tilde{y}, \tilde{z}), \quad (\tilde{y}, \tilde{z}) \in Y \times Z. \quad (22)$$

Сопоставляя (22) и (8), видим, что уравнение (8) наряду с $\xi = \xi(x)$ имеет решение $\xi = \xi(R_\varphi x)$. Из (3) следует, что решением задачи $\{Y, Z\}$ наряду с функцией $c = c(x)$ является также $c(R_\varphi x)$. Используя теорему 4, с учетом произвольности угла $\varphi \in [-\pi, \pi)$ получаем следующий результат.

Теорема 5. Пусть в задаче $\{Y, Z\}$ или $\{Z, Y\}$ множества Y, Z выбраны согласно (18), область D симметрична относительно оси x_3 и выполняется условие (19). Тогда единственное решение $c(x)$ рассматриваемой задачи обладает свойством осевой симметрии:

$$c(R_\varphi x) = c(x), \quad x \in D, \quad \varphi \in [-\pi, \pi). \quad (23)$$

Таким образом, $c(x) = c(x_1^2 + x_2^2, x_3)$, $x \in D$.

Замечание. Аналогично получаем, что если (19) имеет место для дискретного набора углов поворота $\varphi = \varphi_k = \pi k/N$, $-N \leq k \leq N-1$, $N \geq 1$, то имеет место аналогичное (23) равенство $c(R_{\varphi_k} x) = c(x)$, $x \in D$, $-N \leq k \leq N-1$. При $N=1$ это означает осевую симметрию функции $c(x)$ в смысле равенства $c(-x_1, -x_2, x_3) = c(x_1, x_2, x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю. *Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **43** (8), 1201–1209 (2003).
- [2] Лаврентьев М.М. *Об одной обратной задаче для волнового уравнения*, ДАН СССР **157** (3), 520–521 (1964).
- [3] Лаврентьев М.М. *Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений*, ДАН СССР **160** (1), 32–35 (1965).
- [4] Вайнберг Б.Р. *Асимптотические методы в уравнениях математической физики* (МГУ, М., 1982).
- [5] Романов В.Г. *О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка*, Сиб. матем. журн. **50** (4), 883–889 (2009).
- [6] Кокурин М.Ю. *Полнота асимметричных произведений гармонических функций и единственность решения уравнения М.М.Лаврентьева в обратных задачах волнового зондирования*, Изв. РАН. Сер. Матем. **86** (6), 101–122 (2022).
- [7] Леонов А.С. *Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ* (Книжный дом "ЛИБРОКОМ", М., 2009).
- [8] Козлов А.И., Кокурин М.Ю. *Об интегральных уравнениях типа М.М.Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **61** (9), 1492–1507 (2021).
- [9] Кокурин М.Ю., Ключев В.В. *Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева*, Сиб. журн. вычисл. матем. **25** (4), 441–458 (2022).
- [10] Кокурин М.М., Ключев В.В., Гаврилова А.В. *О единственности решения интегрального уравнения Лаврентьева в n -мерном пространстве*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **64** (3), 443–461 (2024).
- [11] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа* (Наука, М., 1980).
- [12] Рамм А.Г. *Многомерные обратные задачи рассеяния* (Мир, М., 1994).
- [13] Kokurin M.Yu. *On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds*, J. Inverse and Ill-Posed Probl. **21** (1), 125–140 (2013).
- [14] Кокурин М.Ю. *О множествах единственности для гармонических и аналитических функций и обратных задачах для волновых уравнений*, Матем. заметки **97** (3), 397–406 (2015).
- [15] Axler S., Bourdon P., Ramey W. *Harmonic function theory* (Springer, New York, 2001).
- [16] Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* (Springer, Berlin, 1998).
- [17] Ramm A.G. *Symmetry properties of scattering amplitudes and applications to inverse problems*, J. Math. Anal. Appl. **156** (2), 333–340 (1991).

Михаил Юрьевич Кокурин

Марийский государственный университет,
пл. Ленина, д. 1, г. Йошкар-Ола, 424001, Россия,

e-mail: kokurinm@yandex.ru

M.Yu. Kokurin

Uniqueness of the solution to M.M.Lavrentiev's equation with sources on a circle

Abstract. A linear integral equation related to the coefficient inverse problem for a hyperbolic equation is considered. In the inverse problem, based on measurements of scalar wave fields scattered by an inhomogeneity, it is necessary to reconstruct the propagation velocity of the signal on the inhomogeneity. Probing fields are generated by point sources centered on a circle. We prove the unique solvability of the inverse problem with such an arrangement of sources under quite general assumptions on the choice of a variety of detectors. The relationship between the axial symmetry of the scattering data and the symmetry of the desired function relative to the same axis is established.

Keywords: hyperbolic equation, coefficient inverse problem, M.M. Lavrentiev's equation, non-overdetermined setting, uniqueness, symmetry.

Mikhail Yurjevich Kokurin

Mari State University,

1 Lenin sqr., Yoshkar-Ola, 424001 Russia,

e-mail: kokurinm@yandex.ru