

Н.А. ДЖУСОВЕВА, З.С. ВАЛГАСОВ

ОБ ОСКОЛОЧНО КОМПАКТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Аннотация. Установлено, что множество всех осколочно компактных ортогонально аддитивных операторов, действующих из векторной решетки E в AM -пространство F является векторной решеткой, причем решеточные операции вычисляются по формулам Рисса–Канторовича. Кроме того, показано, что положительное, порядково компактное ортогонально аддитивное отображение, заданное на латеральном идеале векторной решетки E и принимающее значение в AM -пространстве F , допускает продолжение на все E .

Ключевые слова: ортогонально аддитивный оператор, осколочно компактный оператор, порядково компактное ортогонально аддитивное отображение, банахова решетка, AM -пространство, латеральный идеал.

УДК: 517.98:519.46

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-29-38

Ортогонально аддитивные (нелинейные) операторы (ОАО) в векторных решетках впервые были введены в работе [1]. Интерес к этим операторам связан с задачами теории нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений [2], [3]. В последние годы различные аспекты теории ОАО изучались рядом российских и зарубежных математиков [4]–[10].

Специальные классы порядково компактных и осколочно компактных ОАО рассматривались в работах [11]–[16]. В частности, в работе [15] было показано, что векторное пространство $COA(E, F)$ всех осколочно компактных, регулярных ОАО, действующих из векторной решетки E в банахову решетку с порядково непрерывной нормой F , обладает богатой порядковой структурой. В связи с этим возникает естественный вопрос: “Сохранится ли порядковая структура пространства $COA(E, F)$ в случае, когда банахова решетка F теряет свойство порядковой непрерывности нормы и, следовательно, свойство порядковой полноты?”. Заметим, что большинство содержательных результатов о структурных свойствах ортогонально аддитивных операторов существенным образом опирается на порядковую полноту пространства образов. Так, в частности, в работе [17] было установлено, что положительное, порядково ограниченное ортогонально аддитивное отображение, заданное на латеральном идеале векторной решетки E и принимающее значение в порядково полной векторной решетке F , допускает продолжение до положительного ОАО, заданного на всем пространстве E . Опять же возникает вопрос: “Возможно ли в задаче продолжения ортогонально аддитивных отображений как-то ослабить условие порядковой полноты векторной решетки F ?”.

Поступила в редакцию 30.01.2024, после доработки 28.02.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (номер гранта 24-21-00278).

Целью настоящей статьи является частичный ответ на этот вопрос. Мы рассмотрим осколочно компактные ОАО, принимающие значения в банаховых решетках специального вида — в так называемых *АМ-пространствах*. В общем случае *АМ-пространство* является порядково неполным. Наш первый основной результат (теорема 1) дополняет один из основных результатов (теорема 3.9) работы [15], второй основной результат (теорема 2) дополняет теорему 1 работы [17].

Опишем вкратце содержание работы. В следующем разделе представим необходимые предварительные сведения о векторных решетках и ОАО. В разделе 2 представлены основные результаты статьи. Мы покажем (теорема 1), что векторное пространство всех осколочно компактных ОАО из векторной решетки E в *АМ-пространство* F , является операторной векторной решеткой, причем решеточные операции вычисляются по формулам типа Рисса–Канторовича. Далее мы покажем, что порядково компактное, положительное ортогонально аддитивное отображение, заданное на латеральном идеале векторной решетки E и принимающее значения в *АМ-пространстве* F , допускает продолжение на все E , и продолженное отображение является положительным, осколочно компактным ортогонально аддитивным оператором (теорема 2).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Все необходимые сведения о векторных и банаховых решетках можно найти в [18], [19]. Все векторные решетки, встречающиеся ниже в тексте, предполагаются архимедовыми. Два элемента e, f векторной решетки E называются *дизъюнктными* (обозначение $e \perp f$), если $|e| \wedge |f| = 0$. Векторная решетка E называется *порядково полной*, если у любого порядково ограниченного подмножества D решетки E существуют супремум и инфимум. Запись $e = \bigsqcup_{i=1}^n e_i$ означает, что $e = \sum_{i=1}^n e_i$ и $e_i \perp e_j$ для всех $i \neq j$. Для случая $n = 2$ будем использовать обозначение $e = e_1 \sqcup e_2$. Элемент f называется *осколком* $e \in E$ (обозначение $f \sqsubseteq e$), если $f \perp (e - f)$. Множество всех осколков элемента $e \in E$ обозначается $\mathfrak{F}_e$.

Бинарное отношение $\sqsubseteq$ на E является отношением частичного порядка, называемого *латеральным* порядком [20]. Линейное подпространство E_0 векторной решетки E называется *порядковым идеалом* E , если для любых $e \in E_0, f \in E$ из неравенства $|f| \leq |e|$ следует включение $f \in E_0$. Пусть D — произвольное подмножество векторной решетки E . Введем следующие обозначения:

$$D^\perp := \{e \in E : e \perp f \text{ для любого } f \in D\}, \quad D^{\perp\perp} := (D^\perp)^\perp.$$

Будем говорить, что $D^\perp$ — *дизъюнктное дополнение* D . Подмножество B в векторной решетке E называется *полосой*, если $B = D^\perp$ для некоторого $D \subset E$. Отметим, что для произвольного множества $D \subset E$ его дизъюнктное дополнение (полоса) $D^\perp$ является порядково замкнутым порядковым идеалом в E . Подмножество $D \subset E$ векторной решетки E называется *порядково ограниченным*, если существует элемент $e \in E_+$ такой, что $|f| \leq e$ для любого $f \in D$. Говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов векторной решетки E *порядково сходится* к элементу $e \in E$, если существует сеть $u_\alpha \downarrow 0$ в E_+ такая, что $|e - e_\alpha| \leq u_\alpha$ для любого $\alpha \in A$ такого, что $\alpha \geq \alpha_0$ для некоторого фиксированного индекса $\alpha_0 \in A$. Пусть теперь $(E, \|\cdot\|)$ — банахова решетка. Будем говорить, что норма $\|\cdot\|$ в E *порядково непрерывна*, если для любой сети $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ в E_+ такой, что $f_\alpha \downarrow 0$ следует $\|f_\alpha\|_{\alpha \in A} \downarrow 0$. Заметим, что порядковая непрерывность нормы банаховой решетки $(E, \|\cdot\|)$ гарантирует ее порядковую полноту ([19], следствие 4.10). Банахова решетка $(E, \|\cdot\|)$ называется *АМ-пространством*,

если $\|e \vee f\| = \max\{\|e\|, \|f\|\}$ для любых дизъюнктивных элементов $e, f \in E_+$. Замыкание подмножества D в нормированном пространстве F обозначим через $\overline{D}$.

Определение 1. Пусть E — векторная решетка и X — действительное векторное пространство. Отображение $T : E \rightarrow X$ называется *ортогонально аддитивным оператором*, если $T(e \sqcup f) = Te + Tf$ для любых дизъюнктивных $e, f \in E$.

Из определения следует $T(0) = 0$.

Определение 2. Пусть E, F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \rightarrow F$ называется:

- 1) *положительным*, если $T(E) \subset F_+$;
- 2) *порядково ограниченным*, или *абстрактным оператором Урысона*, если T отображает порядково ограниченные подмножества E в порядково ограниченные подмножества F ;
- 3) *регулярным*, если $T = S_1 - S_2$, где S_1, S_2 — положительные ортогонально аддитивные операторы из E в F .

Следующий пример показывает, что в отличие от линейного случая, положительность ОАО не гарантирует его порядковой ограниченности. Рассмотрим отображение $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданное формулой

$$Te = \begin{cases} \frac{1}{|e|}, & \text{если } e \neq 0; \\ 0, & \text{если } e = 0. \end{cases}$$

Заметим, что два произвольных элемента $e, f \in \mathbb{R}$ дизъюнктивны тогда и только тогда, когда хотя бы один из элементов равен нулю, в силу чего T является положительным ОАО. Оператор не может быть порядково ограниченным, так как образ $T(-1, 1)$ интервала $(-1, 1)$ неограничен в $\mathbb{R}$.

Множества всех положительных и регулярных ОАО из E в F обозначаются через

$$\mathcal{OA}_+(E, F) \text{ и } \mathcal{OA}_r(E, F)$$

соответственно. Существует естественный частичный порядок на $\mathcal{OA}_r(E, F)$, задаваемый соотношением $S \leq T \Leftrightarrow (T - S) \in \mathcal{OA}_+(E, F)$. Если векторная решетка образов F порядково полна, то упорядоченное векторное пространство $\mathcal{OA}_r(E, F)$ является порядково полной векторной решеткой.

Предложение 1 ([21], теорема 3.6). Пусть E, F — векторные решетки, причем F порядково полна. Тогда векторное пространство $\mathcal{OA}_r(E, F)$ всех регулярных ортогонально аддитивных операторов из E в F является порядково полной векторной решеткой.

Рассмотрим некоторые важные для приложений примеры ОАО.

Определение 3. Пусть (A, Σ, μ) и (B, Ξ, ν) — пространства с конечными мерами. Через $(A \times B, \mu \otimes \nu)$ обозначим их произведение. Отображение $K : A \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Каратеодори*, если выполняются следующие условия:

- (C₁) $K(\cdot, \cdot, r)$ является $\mu \otimes \nu$ -измеримой для любого $r \in \mathbb{R}$;
- (C₂) $K(s, t, \cdot)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ для $\mu \otimes \nu$ -почти всех (п. в.) $(s, t) \in A \times B$.

Будем говорить, что K — это *нормализованная* функция Каратеодори, если $K(s, t, 0) = 0$ для $\mu \otimes \nu$ -п.в. $(s, t) \in A \times B$.

Предложение 2 ([22], утверждение 3.2). Пусть E — порядковый идеал в пространстве $L_0(\nu)$, $K: A \times B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — нормализованная функция Каратеодори и для любого элемента $f \in E$ неравенство

$$\int_B |K(s, t, f(t))| d\nu(t) < \infty$$

выполняется для почти $s \in A$. Тогда отображение $T: E \rightarrow L_0(\mu)$, заданное равенством

$$(Tf)(s) = \int_B K(s, t, f(t)) d\nu(t), \quad f \in L_0(\nu), \quad (1)$$

является регулярным ортогонально аддитивным оператором из E в $L_0(\mu)$.

Отображение $T: E \rightarrow L_0(\mu)$, задаваемое формулой (1), известно в литературе как *интегральный оператор Урысона* ([2]).

Следующий класс примеров связан с операторами суперпозиции.

Определение 4. Пусть (A, Σ, μ) — пространство с конечной мерой. Функция $N: A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется:

- 1) *суперпозиционно-измеримой* (суперизмеримой для краткости), если для любой функции $f \in L_0(\mu)$ имеет место включение $N(\cdot, f(\cdot)) \in L_0(\mu)$;
- 2) *нормализованной*, если $N(t, \cdot) = 0$ для почти всех $t \in A$.

Предложение 3 ([22], пример 1). Пусть E — порядковый идеал пространства $L_0(\nu)$, $N: A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — суперизмеримая функция. Тогда формула

$$(\mathcal{N}f)(\cdot) = N(\cdot, f(\cdot)) \quad (2)$$

задает регулярный ортогонально аддитивный оператор $\mathcal{N}: E \rightarrow L_0(\mu)$.

Оператор $\mathcal{N}$ известен в литературе как нелинейный оператор суперпозиции или оператор Немецкого [23].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе мы изучим осколочно компактные ОАО, принимающие значения в АМ-пространстве, и покажем, что для них имеет место порядковое исчисление типа Рисса–Канторовича. Мы также покажем, что порядково компактное, положительное ортогонально аддитивное отображение, заданное на латеральном идеале векторной решетки E и принимающие значения в АМ-пространстве F , допускает продолжение на все E и продолженное отображение является положительным, осколочно компактным ОАО.

Введем необходимые нам подклассы порядково и осколочно компактных ОАО.

Определение 5. Пусть E — векторная решетка, а F — банахова решетка. Ортогонально аддитивный оператор $T: E \rightarrow F$ называется:

- 1) *порядково компактным*, если T отображает порядково ограниченные подмножества решетки E в предкомпактные подмножества F ;
- 2) *осколочно компактным*, если $T(\mathfrak{F}_e)$ — предкомпактное подмножество F для любого $e \in E$.

Данные классы операторов впервые были введены в работе [13] в связи с некоторыми задачами теории интегральных операторов Урысона. Заметим, что каждый порядково компактный ОАО является и осколочно компактным оператором. Векторное пространство всех осколочно компактных ОАО из E в F обозначим через $\mathcal{COA}(E, F)$.

Ниже нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 4 ([18], лемма 3.13). Пусть D — предкомпактное подмножество AM -пространства F . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) подмножество $\mathcal{FS}(D)$ пространства F , элементами которого являются супремумы всех конечных подмножеств D , является предкомпактным;
- 2) супремум множества D существует в F ;
- 3) имеет место включение $\sup D \in \overline{\mathcal{FS}(D)}$.

Предложение 5 ([15], предложение 3.11). Пусть E — векторная решетка и $\bigcup_{i=1}^n x_i = \bigcup_{k=1}^m y_k$ для некоторых наборов $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_k)_{k=1}^m$ элементов E . Тогда существует семейство (z_{ik}) попарно дизъюнктивных элементов E , где $i \in \{1, \dots, n\}$ и $k \in \{1, \dots, m\}$ такие, что

- (i) $x_i = \bigcup_{k=1}^m z_{ik}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$;
- (ii) $y_k = \bigcup_{i=1}^n z_{ik}$ для любого $k \in \{1, \dots, m\}$;
- (iii) $\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^m z_{ik} = \bigcup_{i=1}^n x_i = \bigcup_{k=1}^m y_k$.

В работе [15] была описана порядковая структура пространства $\mathcal{COA}(E, F)$ в случае, когда банахова решетка образов F обладает порядково непрерывной нормой и, следовательно, порядково полна.

Предложение 6 ([15], теорема 3.9). Пусть E — векторная решетка и F — банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Тогда векторное пространство $\mathcal{COA}(E, F)$ всех осколочно компактных ортогонально аддитивных операторов из E в F является полосой в порядково полной векторной решетке $\mathcal{OA}_r(E, F)$.

Заметим, что условие порядковой полноты банаховой решетки F гарантирует порядковую полноту операторной векторной решетки $\mathcal{OA}_r(E, F)$ и не может быть отброшено. Вместе с тем возникает вопрос: “Сохраняется ли какая-либо порядковая структура у пространства $\mathcal{COA}(E, F)$ для неполной банаховой решетки F ?”.

Первым основным результатом статьи является

Теорема 1. Пусть E — векторная решетка и F — AM -пространство. Тогда векторное пространство $\mathcal{COA}(E, F)$ всех осколочно компактных ортогонально аддитивных операторов из E в F является векторной решеткой, причем для любых $S, T \in \mathcal{COA}(E, F)$ и $e \in E$ решеточные операции имеют вид

- 1) $(T \vee S)e := \sup\{Tu + Sv : e = u \sqcup v\}$;
- 2) $(T \wedge S)e := \inf\{Tu + Sv : e = u \sqcup v\}$;
- 3) $T^+e := \sup\{Tu : u \sqsubseteq e\}$;
- 4) $T^-e := -\inf\{Tu : u \sqsubseteq e\}$;
- 5) $|T|e := \sup\{Tu - Tv : e = u \sqcup v\}$;
- 6) $|Te| \leq |T|e$.

Доказательство теоремы начнем с формулы 1). Для этого сначала установим существование супремума в правой части 1). Покажем, что любого элемента $e \in E$ множество $H(e) := \{Tu + Sv : e = u \sqcup v\}$ является предкомпактным в F . Для этого достаточно установить предкомпактность множества

$$W(e) := \{Tf + Sg : g, f \in \mathfrak{F}_e\}.$$

Действительно, в силу очевидного включения $H(e) \subset W(e)$ предкомпактность $W(e)$ влечет предкомпактность $H(e)$. Пусть $\{Tf_1, \dots, Tf_k\}$ — конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть в $T(\mathfrak{F}_e)$ и $\{Sg_1, \dots, Sg_m\}$ — конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть в $S(\mathfrak{F}_e)$. Возьмем произвольные $f, g \in \mathfrak{F}_e$. Тогда для подходящих f_i, g_j можем написать

$$\|Tf + Sg - (Tf_i + Sg_j)\| \leq \|Tf - Tf_i\| + \|Sg - Sg_j\| < \varepsilon.$$

Таким образом, множество

$$\{Tf_i + Sg_j : 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq m\}$$

является ε -сетью в $W(e)$, в силу чего множество $H(e)$ предкомпактно в F . Тогда согласно предложению 4 супремум множества $H(e)$ существует и является элементом $\overline{\mathcal{FS}(W(e))}$. Положим по определению

$$Re := \sup H(e) = \sup\{Tf + Sg : e = f \sqcup g\}.$$

Докажем, что $R: E \rightarrow F$ является ОАО из E в F . Возьмем пару произвольных дизъюнктивных элементов $f, g \in E$ и покажем, что $R(f \sqcup g) = Rf + Rg$. Пусть $f = u_1 \sqcup u_2$ и $g = v_1 \sqcup v_2$. Отсюда $f \sqcup g = (u_1 \sqcup v_1) \sqcup (u_2 \sqcup v_2)$. Имеют место следующие формулы:

$$Tu_1 + Su_2 + Tv_1 + Sv_2 = T(u_1 \sqcup v_1) + S(u_2 \sqcup v_2) \leq R(f \sqcup g).$$

Переходя к супремуму в левой части вышеприведенного неравенства по всем осколкам u_1, u_2, v_1, v_2 элементов f и g таким, что $f = u_1 \sqcup u_2$, $g = v_1 \sqcup v_2$, получаем

$$Rf + Rg \leq R(f \sqcup g).$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $w \sqcup h = f \sqcup g$. Тогда согласно предложению 5 найдутся дизъюнктивные осколки f_1, f_2 и g_1, g_2 элементов f и g , соответственно, такие, что $w = f_1 \sqcup g_1$ и $h = f_2 \sqcup g_2$. Далее можем написать

$$Tw + Sh = T(f_1 \sqcup g_1) + S(f_2 \sqcup g_2) = Tf_1 + Tg_1 + Sf_2 + Sg_2 = Tf_1 + Sf_2 + Tg_1 + Sg_2 \leq Rf + Rg.$$

Переходя к супремуму в левой части вышеприведенного неравенства по всем осколкам w и h элемента $f \sqcup g$ таким, что $w \sqcup h = f \sqcup g$, выводим

$$R(f \sqcup g) \leq Rf + Rg \Rightarrow R(f \sqcup g) = Rf + Rg.$$

ОАО оператора $R: E \rightarrow F$ установлена. Покажем, что $R = T \vee S$. Возьмем произвольный $e \in E$ и осколочно компактный ОАО $G: E \rightarrow F$ такой, что $G \geq T$ и $G \geq S$. Тогда для любых $f, g \in \mathfrak{F}_e$ таких, что $e = f \sqcup g$, можем написать

$$Sf + Tg \leq Gf + Gg = Ge \Rightarrow Re \leq Ge \Rightarrow R = T \vee S.$$

Возьмем теперь произвольный элемент $e \in E$ и покажем, что $R(\mathfrak{F}_e)$ является предкомпактным множеством в F . Заметим, что согласно предложению 4 для любого осколка $f \in \mathfrak{F}_e$ элемента e справедливы включения

$$W(f) \subset W(e) \Rightarrow \overline{\mathcal{FS}(W(f))} \subset \overline{\mathcal{FS}(W(e))}.$$

В силу доказанного выше для любого $f \in \mathfrak{F}_e$ имеем

$$Rf \in \overline{\mathcal{FS}(W(f))} \subset \overline{\mathcal{FS}(W(e))} \Rightarrow R(\mathfrak{F}_e) \subset \overline{\mathcal{FS}(W(e))}.$$

Отсюда вытекает

$$\overline{R(\mathfrak{F}_e)} \subset \overline{\mathcal{FS}(W(e))},$$

и согласно предложению 4 множество $\overline{R(\mathfrak{F}_e)}$ компактно. Таким образом, осколочная компактность оператора R установлена. Докажем теперь оставшиеся формулы 2)–6). Формула 2) является следствием равенства

$$x \wedge y = -((-x) \vee (-y)),$$

имеющего место в произвольной векторной решетке. Действительно,

$$\begin{aligned} (T \wedge S)e &= -((-T) \vee (-S))e = -\{\sup\{-Tu - Sv : e = u \sqcup v\}\} = \\ &= -\{-\inf\{Tu + Sv : e = u \sqcup v\}\} = \inf\{Tu + Sv : e = u \sqcup v\}. \end{aligned}$$

Справедливость формул 3)–5) очевидна. Так как произвольный элемент $e \in E$ можно представить в виде дизъюнктивных сумм $e = e \sqcup 0$ и $e = 0 \sqcup e$, то неравенство 6) является следствием цепочки формул

$$|T|e = \sup\{Tu - Tv : e = u \sqcup v\} \geq \{(Te - T0) \vee (T0 - Te)\} = Te \vee (-Te) = |Te|.$$

Осколочная компактность операторов, выражаемых формулами 2)–5) также является очевидным следствием осколочной компактности оператора R . $\square$

Заметим, что в условиях теоремы 1 все осколочно компактные ОАО автоматически являются регулярными.

Определение 6. Пусть E — векторная решетка. Подмножество $\mathcal{I}$ решетки E называется *латеральным идеалом* при выполнении следующих условий:

- 1) если $e \in \mathcal{I}$, то $f \in \mathcal{I}$ для любого $f \in \mathfrak{F}_e$;
- 2) если $e, f \in \mathcal{I}$ и $e \perp f$, то $e \sqcup f \in \mathcal{I}$.

Легко видеть, что каждый порядковый идеал векторной решетки является и латеральным идеалом. Другим примером латерального идеала, важным для всей теории ОАО, является множество осколков $\mathfrak{F}_e$ произвольного элемента $e \in E$ ([24], лемма 3.5).

Подмножество $D \subset \mathcal{I}$ латерального идеала $\mathcal{I}$ называется *порядково ограниченным*, если существует элемент $e \in E_+$ такой, что неравенство $|f| \leq e$ выполняется для любого $f \in D$.

Определение 7. Пусть E, F — векторные решетки и $\mathcal{I}$ — латеральный идеал решетки E . Отображение $R: \mathcal{I} \rightarrow F$ называется

- *ортогонально аддитивным*, если $R(e \sqcup f) = Re + Rf$ для любых дизъюнктивных элементов $e, f \in \mathcal{I}$;
- *положительным*, если $Rf \in F_+$ для любого $f \in \mathcal{I}$;
- *порядково ограниченным*, если R отображает порядково ограниченные подмножества $\mathcal{I}$ в порядково ограниченные подмножества F .
- *порядково компактным*, если F — банахова решетка и R отображает порядково ограниченные подмножества $\mathcal{I}$ в предкомпактные подмножества F .

Предложение 7 ([17], теорема 1). Пусть E, F — векторные решетки, F , кроме того, порядкова полна, $\mathcal{I}$ — латеральный идеал в E и $T: \mathcal{I} \rightarrow F$ — порядково ограниченное, положительное ортогонально аддитивное отображение. Тогда существует положительный, абстрактный оператор Урысона $\tilde{T}: E \rightarrow F$ такой, что $Te = \tilde{T}e$ для любого $e \in \mathcal{I}$.

Ниже мы покажем, что порядково компактное, положительное отображение можно продолжить на все пространство даже в случае порядково неполного пространства образов. Вторым основным результатом работы является

Теорема 2. Пусть E — векторная решетка, F — АМ-пространство, $\mathcal{I}$ — латеральный идеал в E и $T: \mathcal{I} \rightarrow F$ — порядково компактное, положительное ортогонально аддитивное отображение. Тогда существует осколочно компактный, положительный ортогонально аддитивный оператор $\tilde{T}_{\mathcal{I}}: E \rightarrow F$ такой, что $Tf = \tilde{T}_{\mathcal{I}}f$ для любого $f \in \mathcal{I}$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $e \in E$ и рассмотрим множество

$$H(e) := \{f : f \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\}.$$

Заметим, что $H(e)$ ограничено сверху элементом e . В силу порядковой компактности отображения $T: \mathcal{I} \rightarrow F$ множество $\{Tf : f \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\}$ предкомпактно в F . Положим по определению

$$Re := \sup \{Tf : f \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\}, \quad e \in E.$$

В силу предложения 4 отображение $R: E \rightarrow F$ определено корректно. Покажем, что R является ОАО из E в F . Возьмем пару e, f произвольных дизъюнктивных элементов E , произвольные элементы $v \in H(e)$ и $w \in H(f)$. Тогда можем написать

$$Tv + Tw = T(v \sqcup w) \leq R(e \sqcup f).$$

Переходя к супремуму в левой части вышеприведенного неравенства по всем $v \in H(e)$ и $w \in H(f)$, получаем оценку

$$Re + Rf \leq R(e \sqcup f).$$

Докажем теперь обратное неравенство. Пусть $h \in H(e \sqcup f)$. Тогда в силу предложения 5 и свойств латерального идеала найдутся элементы $v \in H(e)$ и $w \in H(f)$ такие, что $h = v \sqcup w$. Отсюда выводим

$$Th = T(v \sqcup w) = Tv + Tw \leq Re + Rf$$

и, переходя к супремуму в левой части неравенства по всем $h \in H(e \sqcup f)$, получаем окончательную оценку

$$R(e \sqcup f) \leq Re + Rf \Rightarrow R(e \sqcup f) = Re + Rf.$$

Положим $\tilde{T}_{\mathcal{I}} := R$. Положительность оператора $\tilde{T}_{\mathcal{I}}$ очевидна. Покажем, что $\tilde{T}_{\mathcal{I}}$ является продолжением T . Так как для любого $f \in \mathcal{I}$ справедливо включение $\mathfrak{F}_f \subset \mathcal{I}$, то справедливо равенство

$$\tilde{T}_{\mathcal{I}}f = \sup \{Tg : g \in \mathfrak{F}_f \cap \mathcal{I}\} = \sup \{Tg : g \in \mathfrak{F}_f\} = Tf.$$

Осталось установить осколочную компактность оператора $\tilde{T}_{\mathcal{I}}$. Пусть $e \in E$ — произвольный элемент векторной решетки E . В силу предложения 4

$$\tilde{T}_{\mathcal{I}}e = \sup \{Tg : g \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\} \in \overline{\mathcal{FS}\{Tg : g \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\}}.$$

Так как для любых $f, e \in E$ таких, что $f \sqsubseteq e$, имеет место включение

$$\{Tg : g \in \mathfrak{F}_f \cap \mathcal{I}\} \subset \{Tg : g \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\},$$

то справедлива импликация

$$\overline{\mathcal{FS}\{Tg : g \in \mathfrak{F}_f \cap \mathcal{I}\}} \subset \overline{\mathcal{FS}\{Tg : g \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\}}.$$

Таким образом, для любого элемента $e \in E$

$$\tilde{T}_{\mathcal{I}}(\mathfrak{F}_e) \subset \overline{\mathcal{FS}\{Tg : g \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\}},$$

в силу чего

$$\overline{\widetilde{T}_{\mathcal{I}}(\mathfrak{F}_e)} \subset \overline{\mathcal{FS}\{Tg : g \in \mathfrak{F}_e \cap \mathcal{I}\}}.$$

Отсюда выводим, что множество $\overline{\widetilde{T}_{\mathcal{I}}(\mathfrak{F}_e)}$ компактно и оператор $\widetilde{T}_D : E \rightarrow F$ осколочно компактен. $\square$

Авторы выражают признательность рецензенту за внимательное чтение статьи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mazón J.M., Segura de León S. *Order bounded orthogonally additive operators*, Rev. Roumane Math. Pures Appl. **35** (4), 329–353 (1990).
- [2] Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций* (М., Наука, 1966).
- [3] Le Dret H. *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations* (Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2018).
- [4] Абасов Н.М., Джусоева Н.А., Плиев М.А. *Диффузные ортогонально аддитивные операторы*, Матем. сб. **215** (1), 3–32 (2024).
- [5] Abasov N., Pliev M. *Disjointness-preserving orthogonally additive operators in vector lattices*, Banach J. Math. Anal. **12** (3), 730–750 (2018).
- [6] Abasov N., Pliev M. *Dominated orthogonally additive operators in lattice-normed spaces*, Adv. Oper. Theory **4** (1), 251–264 (2019).
- [7] Feldman W.A. *A factorization for orthogonally additive operators on Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl. **472** (1), 238–245 (2019).
- [8] Pliev M., Sukochev F. *The Kalton and Rosenthal type decomposition of operators in Köthe–Bochner spaces*, J. Math. Anal. Appl. **494** (1), 124594 (2021).
- [9] Popov M. *Banach lattices of orthogonally additive operators*, J. Math. Anal. Appl. **514** (1), 126279 (2022).
- [10] Turan B., Tulu D. *On orthogonally additive band operators and orthogonally additive disjointness preserving operators*, Turkish J. Math. **47** (4), article 15 (2023).
- [11] Джусоева Н.А., Итарова С.Ю. *Об ортогонально аддитивных операторах в РНП*, Матем. заметки **113** (1), 58–74 (2023).
- [12] Abasov N. *Completely additive and C-compact operators in lattice-normed spaces*, Ann. Funct. Anal. **11** (4), 914–928 (2020).
- [13] Mazón J.M., Segura de León S. *Uryson operators*, Rev. Roumane Math. Pures Appl. **35** (5), 431–449 (1990).
- [14] Orlov V., Pliev M., Rode D. *Domination problem for AM-compact abstract Uryson operators*, Arch. Math. **107** (5), 543–552 (2016).
- [15] Pliev M. *On C-compact orthogonally additive operators*, J. Math. Anal. Appl. **494** (1), 124594 (2021).
- [16] Pliev M.A., Polat F., Weber M.R. *Narrow and C-compact orthogonally additive operators in lattice-normed spaces*, Results Math. **74** (4), article 157 (2019).
- [17] Плиев М.А., Попов М.М. *О продолжении абстрактных операторов Урысона*, Сиб. матем. журн. **57** (3), 700–708 (2016).
- [18] Abramovich Y.A., Aliprantis C.D. *An Invitation to Operator Theory* (AMS, 2002).
- [19] Aliprantis C.D., Burkinshaw O. *Positive Operators* (Springer, Dordrecht, 2006).
- [20] Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M. *The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators*, Positivity **25** (2), 291–327 (2021).
- [21] Pliev M., Ramdane K. *Order Unbounded Orthogonally Additive Operators in Vector Lattices*, Mediter. J. Math. **15** (2), article 55 (2018).
- [22] Erkursun-Özcan N., Pliev M. *On orthogonally additive operators in C-complete vector lattices*, Banach J. Math. Anal. **16** (1), article 6 (2022).
- [23] Appell J., Zabrejko P.P. *Nonlinear superposition operators* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990).
- [24] Ben Amor M.A., Pliev M. *Laterally continuous part of an abstract Uryson operator*, Int. J. Math. Anal. **7** (58), 2853–2860 (2013).

Нонна Анатольевна Джусоева

*Северо-Осетинский государственный университет,
ул. Ватутина, д. 46, г. Владикавказ, 362025, Россия,*

e-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Заурбек Сосланович Валгасов

*Северо-Осетинский государственный университет,
ул. Ватутина, д. 46, г. Владикавказ, 362025, Россия,*

e-mail: zaurbek.valgasov@mail.ru

N.A. Dzhusoeva and Z.S. Valgasov

On C -compact orthogonally additive operators

Abstract. It is shown that the set of all C -compact orthogonally additive operators from a vector lattice E to an AM -space F is a vector lattice and the lattice operations can be calculated by the Riesz–Kantorovich formulas. Moreover, a positive AM -compact orthogonally additive map defined on a lateral ideal of a vector lattice E and taking values in an AM -space F can be extended to the whole space E .

Keywords: orthogonally additive operator, C -compact operator, AM -compact orthogonally additive map, Banach lattice, AM -space, lateral ideal.

Nonna Anatolievna Dzhusoeva

*North-Ossetian State University,
46 Vatutina str., Vladikavkaz, 362025 Russia,*

e-mail: djusoevanonna@rambler.ru

Zaurbek Soslanovich Valgasov

*North-Ossetian State University,
46 Vatutina str., Vladikavkaz, 362025 Russia,*

e-mail: zaurbek.valgasov@mail.ru