

С.В. АКМАНОВА, М.Г. ЮМАГУЛОВ

О ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Аннотация. Изучается динамика нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) систем и ее зависимость от шага h дискретизации. Такие системы содержат фазовые переменные и уравнения как с непрерывным, так и с дискретным временем. Основным в работе является вопрос о локальных бифуркациях при потере устойчивости точек равновесия гибридных систем. Приводятся достаточные признаки бифуркаций, изучаются свойства бифуркаций, определяются возможные сценарии бифуркаций. Введено понятие трансверсальной бифуркации, означающее, что соответствующее собственное значение матрицы линеаризованной задачи переходит через единичную окружность при переходе параметра h через точку бифуркации h_0 . Показано, что в однопараметрической постановке типичными являются два основных сценария: трансверсальная бифуркация удвоения периода и трансверсальная бифуркация Андронова–Хопфа, при этом сценарий трансверсальной бифуркации кратного равновесия, как правило, не реализуется. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных подходов в задаче исследования бифуркаций в гибридных системах.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, гибридная система, точка равновесия, устойчивость, бифуркация.

УДК: 517.938

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-2-3-14

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решение многих теоретических и практических вопросов связано с необходимостью изучения непрерывно-дискретных (гибридных) динамических систем. Процессы в таких системах имеют несколько уровней разнородного описания, при этом каждое из них может содержать как непрерывные, так и дискретные компоненты. Различным аспектам исследования гибридных систем посвящена обширная литература (см., например, [1]–[3] и имеющуюся там библиографию). Одними из наиболее интересных и важных задач здесь являются задачи об устойчивости основных режимов гибридных систем и связанные с ними задачи о бифуркациях; интерес к изучению указанных задач у специалистов разного профиля является стабильно высоким (см., например, [4]–[6]).

Большинство исследований задач о бифуркациях связано с рассмотрением ситуаций, когда в качестве бифуркационных параметров рассматривают те или иные коэффициенты уравнений системы. В этой связи следует отметить, что важными параметрами гибридной системы являются и величины h , характеризующие длительности промежутков времени, в течение которых система функционирует в непрерывном варианте. Хорошо известно, что

своевременными переключениями неустойчивого режима непрерывной системы можно добиться ее устойчивости. И наоборот, даже когда режим непрерывной системы устойчив, при правильных переключениях он может стать неустойчивым [7]–[9]. Поэтому величины h также могут оказаться бифуркационными: их изменение может приводить к различным сценариям качественной перестройки поведения системы.

В настоящей статье приводятся новые достаточные признаки бифуркаций в окрестностях положений равновесия нелинейных гибридных систем, при этом в качестве бифуркационного параметра рассматриваются указанные величины h . Полученные в настоящей работе результаты являются развитием результатов авторов, анонсированных в работах [10], [11].

Основным объектом, рассматриваемым в работе, является нелинейная гибридная система, динамика которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) &= g(x(t_{k+1}), y(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $x \in R^n$, $y \in R^m$ — переменные, характеризующие поведение соответственно непрерывной и дискретной частей системы (1), моменты времени t_k задают на R равномерную сетку с шагом $h > 0$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_1 + h < \dots < t_{k+1} = t_k + h < \dots, \quad (2)$$

функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ являются непрерывно дифференцируемыми и порождают операторы $f : R^n \times R^m \rightarrow R^n$, $g : R^n \times R^m \rightarrow R^m$.

Функционирование системы (1) осуществляется по стандартной схеме:

- 1) задаются начальные условия $u_0 = (x_0, y_0)$;
- 2) по решению $x = \varphi_0(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_0)$, $x(t_0) = x_0$, находятся векторы $x_1 = \varphi_0(t_1)$ и $y_1 = g(x_1, y_0)$;
- 3) по решению $x = \varphi_1(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_1)$, $x(t_1) = x_1$, находятся векторы $x_2 = \varphi_1(t_2)$ и $y_2 = g(x_2, y_1)$;

и т. д.

Таким образом, решением $u(t) = (x(t), y(t))$ гибридной системы (1), стартовым из точки $u_0 = (x_0, y_0)$, является функция

$$u(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\varphi_0(t), y_0), & t_0 \leq t < t_1; \\ (\varphi_1(t), y_1), & t_1 \leq t < t_2; \\ (\varphi_2(t), y_2), & t_2 \leq t < t_3; \\ \vdots & \end{cases} \quad (3)$$

Первая компонента $x(t)$ решения $u(t) = (x(t), y(t))$ вида (3) является непрерывной при всех $t \geq 0$, непрерывно дифференцируемой на каждом интервале $t_j < t < t_{j+1}$, но не обязательно дифференцируемой в моменты переключений $t = t_j$. Что касается второй компоненты, т. е. функции $y(t)$, то она является кусочно-постоянной, меняя свои значения в моменты $t = t_j$.

Постоянные решения $u(t) \equiv (x^*, y^*)$, как обычно, будем называть *точками равновесия* гибридной системы (1). Точки равновесия являются решениями системы

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ g(x, y) &= y. \end{aligned}$$

Для гибридной системы (1) естественным образом определяются также *периодические решения* с периодом $T = kh$; здесь k — натуральное число.

Будем полагать, что система (1) имеет нулевую точку равновесия $x = 0, y = 0$; другими словами, будем предполагать выполненными равенства

$$f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 0. \quad (4)$$

В статье изучаются вопросы, связанные с бифуркациями в окрестности нулевого положения равновесия $x = 0, y = 0$ системы (1). В качестве бифуркационного параметра рассматривается шаг $h > 0$ сетки (2).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

2.1. Переход к дискретной системе. В силу равенств (4) функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ представимы в виде

$$f(x, y) = A_1 x + B_1 y + a(x, y), \quad g(x, y) = A_2 x + B_2 y + b(x, y) \quad (x \in R^n, y \in R^m), \quad (5)$$

где $A_1 = f'_x(0, 0)$, $B_1 = f'_y(0, 0)$, $A_2 = g'_x(0, 0)$, $B_2 = g'_y(0, 0)$, а гладкие нелинейности $a(x, y)$ и $b(x, y)$ удовлетворяют соотношениям:

$$a(x, y) = o(\|x\| + \|y\|), \quad b(x, y) = o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \rightarrow 0. \quad (6)$$

Матрицы A_1, B_1, A_2, B_2 порождают линейные операторы $A_1 : R^n \rightarrow R^n$, $B_1 : R^m \rightarrow R^n$, $A_2 : R^n \rightarrow R^m$, $B_2 : R^m \rightarrow R^m$.

В работе [12] показано, что если $\det A_1 \neq 0$, то гибридная система (1) эквивалентна (в приводимом ниже смысле) следующей дискретной динамической системе (ДДС):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 y_k + \varepsilon(x_k, y_k; h), \\ y_{k+1} &= A_2 e^{A_1 h} x_k + (A_2 A_1^{-1} (e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2) y_k + c(x_k, y_k; h); \end{aligned} \quad (7)$$

здесь $h > 0$ — шаг сетки (2),

$$\varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k+h)A_1} \int_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds;$$

$x = p(t, x_k, y_k)$ — решение задачи Коши

$$x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k), \quad x(t_k) = x_k,$$

нелинейность $c(x_k, y_k; h)$ определяется равенством:

$$c(x_k, y_k; h) = A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(\chi(x_k, y_k; h), y_k);$$

здесь $\chi(x_k, y_k; h)$ — функция, определяемая правой частью первого из уравнений системы (7).

Системы (1) и (7) равносильны в следующем смысле (см. [13]):

- если $(x(t), y_k)$ — решение системы (1), то (x_k, y_k) — решение системы (7), где $x_k = x(t_k)$;
- если (x_k, y_k) — решение системы (7), то $(x(t), y_k)$ — решение системы (1), где $x(t)$ — решение задачи Коши $x' = f(x, y_k), x(t_k) = x_k$.

Дискретная система (7) также имеет нулевую точку равновесия, при этом (см. [12]) свойства устойчивости решений систем (1) и (7) одинаковы.

Систему (7) будем записывать также в компактном виде

$$u_{k+1} = A(h)u_k + \xi(u_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

в котором

$$u_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \xi(u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ c(x_k, y_k; h) \end{bmatrix},$$

$A(h)$ — матрица порядка $n + m$,

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Здесь и ниже I — единичная матрица.

Функция $\xi(u_k, h)$ с учетом условий (6) удовлетворяет соотношению

$$\xi(u, h) = o(\|u\|) \quad \text{при} \quad \|u\| \rightarrow 0.$$

Имеет место следующее утверждение (см. [12], [14]).

Теорема 1. Пусть матрица A_1 обратима и все собственные значения матрицы $A(h_0)$ по модулю меньше единицы, тогда точка равновесия $x = 0, y = 0$ гибридной системы (1) при $h = h_0$ асимптотически устойчива. Если хотя бы одно собственное значение матрицы $A(h_0)$ по модулю больше единицы, то точка равновесия $x = 0, y = 0$ гибридной системы (1) при $h = h_0$ неустойчива.

2.2. О бифуркациях в дискретной системе. Динамика системы (1) зависит от величины h , которую можно рассматривать как параметр системы. Изменение параметра h может изменить характер устойчивости нулевой точки равновесия системы (1), что, в свою очередь, может приводить к различным сценариям бифуркаций. А именно, как следует из теоремы 1, характер устойчивости нулевого решения системы (1) может измениться при переходе параметра h через значение h_0 , если хотя бы одно собственное значение матрицы $A(h_0)$ будет равно по модулю единице.

В соответствии с теоремой 1 и классической теорией бифуркаций (см., например, [15], с. 81; [16], с. 244) значение $h = h_0 > 0$ будем называть *точкой бифуркации системы* (1), если матрица $A(h_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, модуль которого равен единице.

Замечание 1. Так как в настоящей работе задача о бифуркациях обсуждается в предположении, что система (1) имеет единственный бифуркационный параметр (а именно, параметр h), то естественно рассматривать только бифуркации коразмерности один.

В соответствии с этим замечанием задачу о точках бифуркации системы (1) будем рассматривать в следующих случаях, когда матрица $A(h_0)$ имеет:

S1) простое собственное значение $\lambda = 1$;

S2) простое собственное значение $\lambda = -1$;

S3) пару простых собственных значений $\lambda = e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, $\theta_0 \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Каждому из указанных случаев (в соответствии с общей теорией бифуркаций: см., например, [16], с. 218–224) отвечает свой сценарий бифуркации.

Случаю S1) отвечает *бифуркация кратного равновесия* системы (8). Такой сценарий реализуется, если существует последовательность $h_l \rightarrow h_0$ такая, что система (8) при $h = h_l$ имеет ненулевую точку равновесия $u^{(l)} = (x^{(l)}, y^{(l)})$ такую, что $u^{(l)} \rightarrow (0, 0)$ при $l \rightarrow \infty$.

Случаю S2) отвечает *бифуркация удвоения периода*. Такой сценарий реализуется, если существует последовательность $h_l \rightarrow h_0$ такая, что система (8) при $h = h_l$ имеет ненулевой цикл периода 2:

$$(x_0^{(l)}, y_0^{(l)}), (x_1^{(l)}, y_1^{(l)}), (x_0^{(l)}, y_0^{(l)}), (x_1^{(l)}, y_1^{(l)}), \dots,$$

такой, что $\|(x_0^{(l)}, y_0^{(l)})\| + \|(x_1^{(l)}, y_1^{(l)})\| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Наконец, случаю S3) отвечает *бифуркация Андронова-Хопфа*. Такой сценарий реализуется, если существует последовательность $h_l \rightarrow h_0$ такая, что система (8) при $h = h_l$ имеет

замкнутую инвариантную кривую Γ_l , ограничивающую (на центральном многообразии системы) область притяжения или отталкивания точки $u_0 = (0, 0)$ так, что Γ_l стягивается к точке u_0 при $l \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Необходимыми условиями для реализации указанных сценариев бифуркации являются следующие требования:

- для бифуркации кратного равновесия матрица $A(h_0)$ должна иметь собственное значение $\lambda = 1$;
- для бифуркации удвоения периода матрица $A(h_0)$ должна иметь собственное значение $\lambda = -1$;
- для бифуркации Андронова–Хопфа матрица $A(h_0)$ должна иметь собственные значения $\lambda = e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$.

Однако указанные условия еще не являются достаточными. Достаточные условия обычно формулируются в виде соотношений, обеспечивающих трансверсальный переход соответствующих собственных значений матрицы $A(h)$ через единичную окружность при переходе параметра h через значение h_0 . Обсудим это более детально. Для простоты ограничимся рассмотрением случая S1). Случаи S2) и S3) рассматриваются аналогично.

В случае S1) матрица $A(h_0)$ имеет простое собственное значение $\lambda = 1$. В силу теории возмущений линейных операторов (см., например, [17]) при малых $|h - h_0|$ матрица $A(h)$ имеет единственное простое собственное значение $\lambda(h)$ такое, что $\lambda(h)$ является гладкой функцией и $\lambda(h_0) = 1$. Пусть $\lambda'(h_0) \neq 0$; тогда собственное значение $\lambda(h)$ матрицы $A(h)$ трансверсально переходит через единичную окружность при переходе параметра h через значение h_0 . При этом (согласно общей теории бифуркаций: см., например, [18]) условие $\lambda'(h_0) \neq 0$ является достаточным для реализации бифуркации кратного равновесия системы (8).

В этой связи значение $h = h_0 > 0$ будем называть *трансверсальной точкой бифуркации кратного равновесия* системы (8), если имеет место случай S1) и выполнено условие $\lambda'(h_0) \neq 0$. Аналогично определяются понятия *трансверсальной точки бифуркации удвоения периода* и *трансверсальной точки бифуркации Андронова–Хопфа* системы (8).

2.3. О бифуркациях в гибридной системе. Приведенные сценарии бифуркаций относились к дискретной системе (8). Для того, чтобы описать соответствующие сценарии для исходной гибридной системы (1), воспользуемся следующими утверждениями (см. [12], [19]).

Лемма 1. *Каждая точка равновесия (x^*, y^*) системы (1) является и точкой равновесия системы (8). Каждой точке равновесия (x^*, y^*) системы (8) соответствует h -периодическое решение $(\varphi_0(t), y^*)$ системы (1) так, что $\varphi_0(0) = \varphi_0(h) = x^*$. При этом характер устойчивости указанных решений систем (1) и (8) одинаков.*

Лемма 2. *Каждое qh -периодическое решение $(\varphi(t), y_k^*)$ системы (1) образует q -цикл*

$$(x_0^*, y_0^*), (x_1^*, y_1^*), \dots, (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*), (x_0^*, y_0^*), (x_1^*, y_1^*), \dots, (x_{q-1}^*, y_{q-1}^*), \dots \quad (10)$$

системы (8) так, что

$$\varphi(0) = x_0^*, \varphi(h) = x_1^*, \dots, \varphi((q-1)h) = x_{q-1}^*, \varphi(qh) = x_0^*. \quad (11)$$

Каждому q -циклу (10) системы (8) соответствует qh -периодическое решение $(\varphi(t), y_k^)$ системы (1) так, что выполняются равенства (11).*

Лемма 3. *Пусть $n = 1$. Тогда каждая точка равновесия (x^*, y^*) системы (8) является и точкой равновесия системы (1), и наоборот.*

Из этих лемм следует, что в случаях S1)–S3) имеют место следующие сценарии бифуркаций для исходной гибридной системы (1).

Случаю S1) отвечает *бифуркация h -периодических решений* системы (1). При $n = 1$ имеет место *бифуркации кратного равновесия*.

Случаю S2) отвечает *бифуркация $2h$ -периодических решений* системы (1).

Наконец, случаю S3) отвечает *бифуркация Андронова–Хопфа*: существует последовательность $h_l \rightarrow h_0$ такая, что система (1) при $h = h_l$ имеет решение $(\varphi^{(l)}(t), y_k^{(l)})$ так, что $(\varphi^{(l)}(t_k), y_k^{(l)}) \in \Gamma_l$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

3. СЛУЧАЙ S1): БИФУРКАЦИИ КРАТНОГО РАВНОВЕСИЯ

Напомним, что этот случай требует, чтобы определенная равенством (9) матрица $A(h)$ при некотором $h = h_0 > 0$ имела простое собственное значение $\lambda = 1$. Обсудим соответствующие условия.

Здесь следует различать ситуации J1 и J2, когда участвующая в (9) матрица A_1 не имеет или, соответственно, имеет чисто мнимые собственные значения.

3.1. Ситуация J1. Пусть сначала матрица A_1 не имеет чисто мнимых собственных значений. Напомним то, что эта матрица не имеет нулевого собственного значения, предполагалось изначально.

Положим

$$\Delta_1 = \det (A_2 A_1^{-1} B_1 - B_2 + I). \quad (12)$$

Теорема 2. Пусть $\Delta_1 \neq 0$. Тогда при любом $h > 0$ матрица $A(h)$ не имеет собственного значения $\lambda = 1$.

Теорема 3. Пусть $\Delta_1 = 0$. Тогда при любом $h > 0$ матрица $A(h)$ имеет собственное значение $\lambda = 1$.

Доказательства этих и других основных утверждений работы приводятся в разделе 6.

3.2. Ситуация J2. Пусть матрица A_1 имеет собственное значение $\lambda = \omega i$, где $\omega > 0$. Отметим, что если в системе (8) имеем $n = 1$, то в ней матрица A_1 является вещественным ненулевым числом a_1 и, следовательно, ситуация J2 в этом случае не выполняется.

Теорема 4. Пусть в системе (8) имеем $n \geq 2$. Тогда матрица $A(h)$ при каждом $h = \frac{2\pi l}{\omega}$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) имеет собственное значение $\lambda = 1$ кратности $\nu \geq 2$.

Теорема 5. Пусть в системе (8) имеем $n \geq 2$. Пусть $h \neq \frac{2\pi l}{\omega}$ ($l = 1, 2, 3, \dots$). Тогда
 – если $\Delta_1 \neq 0$, то при любом таком h матрица $A(h)$ не имеет собственного значения $\lambda = 1$;
 – если $\Delta_1 = 0$, то при любом таком h матрица $A(h)$ имеет собственное значение $\lambda = 1$.

Следствие 1. Из приведенных утверждений следует, что система (1) не имеет трансверсальных точек бифуркации кратного равновесия. При этом (в силу теоремы 2) матрица $A(h)$, как правило, при всех значениях $h > 0$ не имеет собственного значения $\lambda = 1$ и, следовательно, как правило, необходимые условия бифуркации не будут выполняться. Однако, если даже при некотором $h = h_0$ матрица $A(h)$ имеет собственное значение $\lambda = 1$, то оно либо кратное (см. теорему 4), либо (даже если оно простое, то см. теоремы 3 и 5) не будет трасверсальности.

Следствие 2. Пусть A_1, B_1, A_2, B_2 — это матрицы из равенств (5). Пусть матрица B_2 не имеет собственного значения $\lambda = 1$. Тогда если $\|A_2\| \ll 1$ и $\|B_1\| \ll 1$, то (в силу теоремы 2) матрица $A(h)$ при всех значениях $h > 0$ не имеет собственного значения $\lambda = 1$ и, следовательно, необходимые условия бифуркации кратного равновесия для системы (1) не будут выполняться.

Следствие 3. В условиях теоремы 4 сценарий бифуркации кратного равновесия для системы (1) может реализоваться. Однако в этом случае бифуркация имеет коразмерность два или выше и, соответственно, она может быть эффективно изучена только в рамках многопараметрической постановки.

4. СЛУЧАЙ S2): БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

Напомним, что этот случай требует, чтобы определенная равенством (9) матрица $A(h)$ при некотором $h = h_0 > 0$ имела простое собственное значение $\lambda = -1$.

Простые примеры показывают, что указанный случай вполне типичен и, более того, соответствующая бифуркация будет транскритической.

Рассмотрим для иллюстрации важный частный случай системы (1), когда $n = m = 1$. В этом случае равенства (5) принимают вид

$$f(x, y) = a_1x + b_1y + a(x, y), \quad g(x, y) = a_2x + b_2y + b(x, y) \quad (x \in R^1, y \in R^1), \quad (13)$$

где числа a_1, b_1, a_2, b_2 определяются равенствами: $a_1 = f'_x(0, 0)$, $b_1 = f'_y(0, 0)$, $a_2 = g'_x(0, 0)$, $b_2 = g'_y(0, 0)$, а нелинейности $a(x, y)$ и $b(x, y)$ удовлетворяют соотношениям:

$$a(x, y) = o(|x| + |y|), \quad b(x, y) = o(|x| + |y|) \quad \text{при } |x| + |y| \rightarrow 0. \quad (14)$$

С учетом (13) система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_1x(t) + b_1y(t_k) + a(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) &= a_2x(t_{k+1}) + b_2y(t_k) + b(x(t_{k+1}), y(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

в котором нелинейные слагаемые удовлетворяют условиям (14).

Пусть $a_2b_1 + a_1(1 + b_2) \neq 0$. Положим

$$\gamma_1 = \frac{a_2b_1 - a_1(1 + b_2)}{a_2b_1 + a_1(1 + b_2)}. \quad (16)$$

Теорема 6. Пусть $\gamma_1 > 0$, $a_1 \ln \gamma_1 > 0$ и $b_2\gamma_1 \neq 1$. Тогда значение

$$h = h_0 = \frac{\ln \gamma_1}{a_1} > 0 \quad (17)$$

является точкой трансверсальной бифуркации удвоения периода системы (15).

Пример 1. Рассмотрим гибридную систему вида (15)

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + y(t_k) + a(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) &= 2x(t_{k+1}) - 2y(t_k) + b(x(t_{k+1}), y(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

в которой моменты переключения t_k задают на R равномерную сетку (2) с шагом $h > 0$.

Здесь число (17) равно $h = h_0 = \ln 3$. Все условия теоремы 8 для системы (18) выполнены и, следовательно, при переходе параметра h через значение $h_0 = \ln 3$ в окрестности точки равновесия $x = 0, y = 0$ этой системы возникают ненулевые периодические решения с периодом T так, что $T \approx 2 \ln 3$.

Вернемся к исходной системе (1). Пусть матрица $A(h)$ при некотором $h = h_0 > 0$ имеет простое собственное значение $\lambda = -1$. Пусть e, g — собственные векторы матрицы $A_0 = A(h_0)$ и сопряженной матрицы $A_0^* = A^*(h_0)$, соответствующие простому собственному значению -1 .

Теорема 7. Пусть матрица $A_0 = A(h_0)$ имеет простое собственное значение -1 , а остальные ее собственные значения имеют модуль, не равный 1. Пусть $(A'(h_0)e, g) \neq 0$. Тогда значение h_0 является точкой трансверсальной бифуркации удвоения периода системы (1).

Пример 2. Рассмотрим модель динамической системы, управляемой быстрыми переключениями режимов ее функционирования в моменты времени $t = t_k, k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) - y(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ x_2'(t) &= -2x_2(t) - 2y(t_k), \\ y(t_{k+1}) &= 4x_1(t_{k+1}) + \frac{1}{3}y(t_k) - y^2(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Данная гибридная система имеет вид (1), в котором $x \in R^2, y \in R^1$, при этом соответствующая ей ДДС (8) имеет следующие матричные компоненты:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{3},$$

$$e^{A_1 h} = \begin{bmatrix} e^{-h} & 0 \\ 0 & e^{-2h} \end{bmatrix}.$$

$$\text{В таком случае имеем } A(h) = \begin{bmatrix} e^{-h} & 0 & e^{-h} - 1 \\ 0 & e^{-2h} & e^{-2h} - 1 \\ 4e^{-h} & 0 & 4e^{-h} - \frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

При $h_0 = \ln 2$ матрица $A(h_0)$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{6}, \lambda_3 = \frac{1}{4}$, что соответствует условиям теоремы 7. Векторы e и g , удовлетворяющие требованиям теоремы 7, можно выбрать в виде

$$e = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда $(A'(h_0)e, g) = -80 \neq 0$ и, следовательно, значение h_0 является точкой трансверсальной бифуркации удвоения периода системы (19).

5. СЛУЧАЙ S3): БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА–ХОПФА

Напомним, что этот случай требует, чтобы определенная равенством (9) матрица $A(h)$ при некотором $h = h_0 > 0$ имела пару простых собственных значений: $\lambda = e^{\pm 2\pi\theta_0 i}, 0 < \theta_0 < \frac{1}{2}, \theta_0 \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Также, как и в случае S2), простые примеры показывают, что случай S3) вполне типичен и, более того, соответствующая бифуркация будет транскритической.

Снова для иллюстрации рассмотрим простейшую гибридную систему (15). Положим

$$a = \frac{a_2 b_1 (b_2 - 1)}{a_1 b_2} - b_2 - \frac{1}{b_2}. \quad (20)$$

Теорема 8. Пусть выполнены условия

$$|a| < 2, \quad a \neq 0, \quad a \neq 1, \quad b_2 > 0, \quad a_1 \ln b_2 < 0.$$

Тогда значение

$$h = h_0 = -\frac{\ln b_2}{a_1} > 0 \quad (21)$$

является точкой трансверсальной бифуркации Андронова–Хопфа системы (15).

Пример 3. Рассмотрим гибридную систему

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + (\sqrt{2} + 1)y(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) &= -\frac{5\sqrt{2}}{2}x(t_{k+1}) + \frac{\sqrt{2}}{2}y(t_k) + y^3(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

т. е. систему вида (15), в которой $a_1 = 1$, $b_1 = \sqrt{2} + 1$, $a_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Число (21) здесь равно $h_0 = \ln \sqrt{2}$. Далее, матрица (9) и отвечающая ей матрица $A(h_0)$ здесь имеют, соответственно, вид

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^h & (\sqrt{2} + 1)(e^h - 1) \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}e^h & -\frac{5(2 + \sqrt{2})}{2}(e^h - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad A_0 = A(h_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -5 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Так как число (20) здесь $a = \sqrt{2}$, то все условия теоремы 8 выполнены, при этом матрица A_0 имеет простые собственные значения $\lambda = e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $\theta_0 = \frac{3}{8}$. Таким образом, число $h_0 = \ln \sqrt{2}$ является точкой трансверсальной бифуркации Андронова–Хопфа рассматриваемой системы.

Вернемся к исходной системе (8). Пусть матрица $A_0 = A(h_0)$ имеет пару простых собственных значений $\lambda = e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, $\theta_0 \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Тогда найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^{n+m}$ такие, что выполняются равенства

$$A_0(e + ig) = (\alpha_0 + i\beta_0)(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = (\alpha_0 - i\beta_0)(e^* + ig^*); \quad (22)$$

здесь $\alpha_0 = \cos 2\pi\theta_0$, $\beta_0 = \sin 2\pi\theta_0$, A_0^* — транспонированная матрица. Векторы e, g, e^*, g^* в (22) можно нормировать в соответствии с равенствами $(e, e^*) = 1$, $(e, g^*) = 0$.

Положим

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} [(A'(h_0)e, e^*) + (A'(h_0)g, g^*)], \quad \beta_1 = \frac{1}{2} [-(A'(h_0)e, g^*) + (A'(h_0)g, e^*)].$$

Теорема 9. Пусть

$$\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 \neq 0.$$

Тогда h_0 — точка трансверсальной бифуркации Андронова–Хопфа системы (1).

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

6.1. Доказательство теоремы 2. Допустим противное, т. е. пусть $\Delta_1 \neq 0$ и тем не менее найдется значение $h = h_0 > 0$, при котором матрица $A(h_0)$ имеет собственное значение 1. Тогда $\det(A(h_0) - I) = 0$, т. е.

$$\det \begin{bmatrix} e^{A_1 h} - I_n & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I_n)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I_n)B_1 + B_2 - I_m \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

при $h = h_0$; здесь I_n и I_m — единичные матрицы порядка n и m соответственно.

Так как $\det A_1 \neq 0$ и матрица A_1 не имеет чисто мнимых собственных значений, то $\det(e^{A_1 h} - I_n) \neq 0$. Тогда из (23) и формул Шура (см. [20], с. 55) получим равенство

$$\det(A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I_n)B_1 + B_2 - I_m - A_2 e^{A_1 h}(e^{A_1 h} - I_n)^{-1} A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I_n)B_1) = 0,$$

верное при $h = h_0$. После несложных преобразований получим $\det(A_2 A_1^{-1} B_1 - B_2 + I_m) = 0$, т. е. согласно формуле (12) $\Delta_1 = 0$. Получили противоречие, которое и доказывает теорему.

6.2. Доказательство теоремы 3. Из доказательства теоремы 2 следует: если $\det A_1 \neq 0$ и матрица A_1 не имеет чисто мнимых собственных значений, то условие $\Delta_1 = 0$ равносильно условию $\det(A(h) - I) = 0$. Таким образом, при любых $h > 0$ матрица $A(h)$ имеет собственное значение 1.

6.3. Доказательство теоремы 4. Если матрица A_1 имеет собственное значение $\lambda = wi$, $w > 0$, то матрица $e^{A_1 h}$ при $h = h_l = \frac{2\pi l}{w}$ ($l = 1, 2, 3, \dots$) будет иметь собственные значения $e^{\pm 2\pi li} = 1$ кратности 2. Поэтому блочная матрица $A(h_l)$ также будет иметь собственное значение 1 кратности $\nu \geq 2$.

6.4. Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теорем 2 и 3.

6.5. Доказательство теоремы 6. Характеристическое уравнение матрицы $A(h)$, соответствующей системе (15), имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{24}$$

где

$$a = \frac{a_2 b_1}{a_1}(1 - e^{a_1 h}) - b_2 - e^{a_1 h}, \quad b = b_2 e^{a_1 h}.$$

Из этих равенств следует, что при $h = h_0 = \frac{\ln \gamma_1}{a_1} > 0$ матрица $A(h_0)$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -b$, причем $b \neq 1$. В соответствии с теорией возмущений линейных операторов (см., например, [21], с. 87–88) матрица $A(h)$ при близких к h_0 значениях h имеет собственное значение $\lambda_1(h)$ так, что функция $\lambda_1(h)$ является гладкой, причем $\lambda_1(h_0) = -1$. Учитывая (16), несложно показать, что $\lambda_1'(h_0) \neq 0$. Отсюда и вытекает, что значение h_0 является точкой трансверсальной бифуркации удвоения периода системы (15).

6.6. Доказательство теорем 7 и 9. Справедливость этих теорем вытекает из общих достаточных признаков бифуркаций, установленных в [18] и [22].

6.7. Доказательство теоремы 8. Характеристическое уравнение матрицы $A(h)$, соответствующей системе (15), имеет вид (24). При $h = h_0$ (здесь h_0 — число (21)) коэффициент a этого уравнения совпадает с числом (20), а коэффициент b равен единице. Поэтому указанное характеристическое уравнение имеет корни $\lambda = e^{\pm 2\pi \theta_0 i}$, $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, $\theta_0 \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Далее можно воспользоваться общими достаточными признаками бифуркаций, установленными в [17], [18] и [22].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Максимов В.П., Чадов А.Л. *Гибридные модели в задачах экономической динамики*, Вестн. Пермск. ун-та **2** (9), 13–23 (2011).
- [2] Марченко В.М., Борковская И.М. *О стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем*, Тр. БГТУ, Сер. 3: Физ. матем. науки и информатика. **1** (230), 5–13 (2020).
- [3] Логунова О.С., Агапитов Е.Б., Баранкова И.И., Андреев С.М., Чусавитина Г.Н. *Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами*, Электротехнические системы и комплексы **2** (43), 25–34 (2019).
- [4] Лакрисенко П.А. *Об устойчивости положений равновесия нелинейных гибридных механических систем*, Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер.10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., **3**, 116–125 (2015).
- [5] Васильев С.Н., Маликов А.И. *О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем*, в сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН, 23–81 (Фолиант, Казань, 2011).
- [6] Симонов П.М. *Устойчивость и асимптотически периодические решения гибридных систем с последствием*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. **168**, ВИНТИ РАН, М., 91–98 (2019).
- [7] Бортакоский А.С. *Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами*, Изв. РАН. Теория и системы управления **4**, 86–103 (2017).
- [8] Branicky M.S. *Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems*, IEEE Trans. Automat. Contr. **43** (4), 475–482 (1998).
- [9] Liberzon D. *Switching in Systems and Control* (Birkhäuser, Boston, 2003).
- [10] Юмагулов М.Г., Акманова С.В. *Устойчивость и бифуркации непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации*, Вестн. Башкирск. ун-та **26** (4), 862–865 (2021).
- [11] Юмагулов М.Г., Акманова С.В. *Первые ляпуновские величины и основные сценарии бифуркаций для неавтономных периодических динамических систем*, Вестн. Башкирск. ун-та **26** (3), 560–564 (2021).
- [12] Юмагулов М.Г., Акманова С.В. *Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем*, Уфимск. матем. журн. **15** (2), 85–100 (2023).
- [13] Akmanova S.V., Kopylova N.A. *The Stability of Continuous-Discrete Dynamical Systems under Fast Switching*, Lobachevskii J. Math. **44** (5), 1826–1832 (2023).
- [14] Акманова С.В. *Асимптотическая устойчивость и бифуркации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем*, в сб.: Уфимская осенняя математическая школа–2021: Матер. межд. науч. конф., Уфа, Т. 2, 10–12 (Аэтерна, Уфа, 2021).
- [15] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л., *Методы качественной теории о нелинейной динамике*, Ч. 2 (Ин-т компьютерных исслед., М.–Ижевск, 2009).
- [16] Юмагулов М.Г. *Введение в нелинейную динамику: теория, приложения, модели* (Лань, СПб., 2022).
- [17] Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С. *Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем*, Уфимск. матем. журн. **13** (3), 178–195 (2021).
- [18] Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах*, Уфимск. матем. журн. **2** (4), 3–26 (2010).
- [19] Юмагулов М.Г., Акманова С.В. *О качественных характеристиках точек равновесия и циклов непрерывно-дискретных систем*, в сб.: Теория управления и математическое моделирование: Матер. Всероссийск. конф. с межд. участием, посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, 142–145 (Изд. центр “Удмурдск. ун-т”, Ижевск, 2022).
- [20] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (Наука, М., 1988).
- [21] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* (Мир, М., 1972).
- [22] Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г. *Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем*, Уфимск. матем. журнал **10** (1), 25–49 (2018).

Светлана Владимировна Акманова

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова,

пр. Ленина, д. 38, г. Магнитогорск, 455000, Россия,

e-mail: svet.akm_74@mail.ru

Марат Гаязович Юмагулов

*Уфимский университет науки и технологий,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450076, Россия,*

e-mail: yum_mg@mail.ru

S.V. Akmanova and M.G. Yumagulov

On local bifurcations in nonlinear continuous-discrete dynamical systems

Abstract. The dynamics of nonlinear continuous-discrete (hybrid) systems and its dependence on the sampling step h are studied. Such systems contain phase variables and equations with both continuous and discrete time. The main focus of the work is the issue of local bifurcations during loss of stability of equilibrium points of hybrid systems. Sufficient signs of bifurcations are given, the properties of bifurcations are studied, and possible bifurcation scenarios are determined. The concept of transversal bifurcation is introduced, meaning that the corresponding eigenvalue of the matrix of the linearized problem passes through the unit circle when the parameter h passes through the bifurcation point h_0 . It is shown that in a one-parameter formulation, two main scenarios are typical: transversal bifurcation of period doubling and transversal Andronov–Hopf bifurcation, while the scenario of transversal bifurcation of multiple equilibrium, as a rule, is not realized. Examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed approaches in the problem of studying bifurcations in hybrid systems.

Keywords: continuous-discrete system, hybrid system, equilibrium point, stability, bifurcation.

Svetlana Vladimirovna Akmanova

*Nosov Magnitogorsk State Technical University,
38 Lenina str., Magnitogorsk, 455000 Russia,*

e-mail: svet.akm_74@mail.ru

Marat Gayazovich Yumagulov

*Ufa University of Science and Technology,
32 Z.Validi str., Ufa, 450076 Russia,*

e-mail: yum_mg@mail.ru