

С. ХАДЖИ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОБЩИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОЛЬЦЕ

Аннотация. Представлены обобщения формулы Клайна для некоторых новых обобщенных обратных элементов, таких как сильный обратный элемент Дразина, обобщенный сильный обратный элемент Дразина, обратный элемент Хирано и обобщенный обратный элемент Хирано. Эти результаты расширяют многие известные утверждения, например, результаты З. Ву и К. Зена (*Extensions of Cline's formula for some new generalized inverses*, Filomat **35**, 477–483 (2021)).

Ключевые слова: формула Клайна, кольцо, сильный обратный элемент Дразина, обобщенный сильный обратный элемент Дразина, обратный элемент Хирано, обобщенный обратный элемент Хирано.

УДК: 512

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-1-52-65

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье $\mathcal{R}$ обозначает ассоциативное кольцо с единичным элементом, обозначаемым как 1. Обозначим через $\mathcal{R}^{inv}$ множество всех обратимых элементов в $\mathcal{R}$, а через $\mathcal{R}^{nil}$ — множество всех нильпотентных элементов в $\mathcal{R}$. Пусть

$$\text{comm}(a) = \{x \in \mathcal{R} : ax = xa\},$$

$$\text{comm}^2(a) = \{x \in \mathcal{R} : xy = yx \text{ для всех } y \in \text{comm}(a)\}.$$

Следуя Р. Харту [1], элемент $a \in \mathcal{R}$ называется *квазинильпотентным*, если для любого $x \in \text{comm}(a)$ выполняется $1 + ax \in \mathcal{R}^{inv}$. Множество всех квазинильпотентных элементов в $\mathcal{R}$ обозначается как $\mathcal{R}^{qnil}$. *Радикал Якобсона* кольца $\mathcal{R}$, обозначаемый через $\mathcal{R}^{rad}$, определяется как множество элементов a , для которых $1 + ax$ обратим для всех $x \in \mathcal{R}$.

В 2017 г. З. Ван [2] предложил новый обобщенный обратный элемент — *сильный обратный элемент Дразина*, являющийся подклассом обратного элемента Дразина. Элемент $a \in \mathcal{R}$ называется *сильно обратимым* в смысле Дразина (или *s-обратимым в смысле Дразина*), если существует элемент $b \in \mathcal{R}$ такой, что

$$b \in \text{comm}(a), bab = b \text{ и } a - ab \in \mathcal{R}^{nil}.$$

В этом случае b называется *сильным обратным элементом Дразина* (или *s-обратным элементом Дразина*) для a , обозначается $b = a^{sD}$, а наименьшее неотрицательное целое число k , для которого $(a - ab)^k = 0$, называется *индексом сильного обратного элемента Дразина* для a , обозначаемым как $i_{sD}(a)$. Пусть $\mathcal{R}^{sD}$ — множество всех *s-обратимых элементов* в смысле Дразина в $\mathcal{R}$. Элемент $a \in \mathcal{R}$ называется *обратимым элементом* в смысле Дразина,

если в определении s -обратимого элемента в смысле Дразина условие $a - ab \in \mathcal{R}^{\text{nil}}$ заменяется на $a(1 - ab) \in \mathcal{R}^{\text{nil}}$ ([3]). В этом случае b называется обратным элементом Дразина для a и обозначается $b = a^D$. Множество всех обратимых элементов в смысле Дразина в $\mathcal{R}$ обозначается как $\mathcal{R}^D$. Если $a \in \mathcal{R}^{sD}$, то, заметив, что $a(1 - aa^{sD}) = (a - aa^{sD})(1 - aa^{sD})$, можно заключить, что $a \in \mathcal{R}^D$. Таким образом, s -обратный элемент Дразина для a является единственным, если он существует и принадлежит двойному коммутанту a . Однако обратимые элементы не всегда являются s -обратимыми в смысле Дразина. Например, число два является обратимым, но не является s -обратимым в смысле Дразина в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ ([4]).

Недавно Х. Чен и М.С. Абдолийосефи [5] ввели *обратный элемент Хирано*. Элемент $a \in \mathcal{R}$ называется обратимым в смысле Хирано, если существует элемент $b \in \mathcal{R}$ такой, что

$$b \in \text{comm}(a), \quad bab = b \text{ и } a^2 - ab \in \mathcal{R}^{\text{nil}}.$$

Если такой элемент b существует, то он единственный, обозначается как $b = a^H$ и называется обратным элементом Хирано для a , а наименьшее неотрицательное целое число k , для которого выполняется $(a^2 - ab)^k = 0$, называется индексом Хирано $i_H(a)$ для a . Множество всех обратимых элементов в смысле Хирано в $\mathcal{R}$ обозначается как $\mathcal{R}^H$. Как отмечается в [5], выполняется включение $\mathcal{R}^{sD} \subsetneq \mathcal{R}^H \subsetneq \mathcal{R}^D$. Пусть $a \in \mathcal{R}$ — элемент, s -обратимый в смысле Дразина. Тогда a также является обратимым в смысле Хирано. Однако индексы $i_{sD}(a)$ и $i_H(a)$ не обязаны быть одинаковыми в общем случае (см., например, [4]).

Концепция сильного обратного элемента Дразина была перенесена Д. Мосичем [6] в комплексные банаховы алгебры и О. Гюргюном [7] — в кольца. Напомним, что элемент $a \in \mathcal{R}$ является *обобщенно сильно обратимым в смысле Дразина* (или *gs-обратимым в смысле Дразина*), если существует элемент $b \in \mathcal{R}$ такой, что

$$b \in \text{comm}^2(a), \quad bab = b \text{ и } a - ab \in \mathcal{R}^{\text{qnil}}.$$

В данном случае b называется обобщенным сильным обратным элементом Дразина (или *gs-обратным элементом Дразина*) для элемента a и обозначается как $b = a^{gsD}$. Если в приведенном выше определении условие $a - ab \in \mathcal{R}^{\text{qnil}}$ заменить на $a(1 - ab) \in \mathcal{R}^{\text{qnil}}$, то элемент $a \in \mathcal{R}$ называется *обобщенно обратимым в смысле Дразина* [8]. В этом случае b называется обобщенным обратным элементом Дразина для элемента a и обозначается как $b = a^{gD}$. Обозначение $\mathcal{R}^{gD}$ используется для множества всех обобщенно обратимых в смысле Дразина элементов кольца $\mathcal{R}$. В дальнейшем $\mathcal{R}^{gsD}$ будет обозначать множество всех *gs-обратимых* элементов в смысле Дразина кольца $\mathcal{R}$. Из ([7], следствие 3.3) следует, что если $a \in \mathcal{R}^{gsD}$, то a является обобщенно обратимым в смысле Дразина. Таким образом, *gs-обратный элемент Дразина* для элемента a единственен, если он существует ([8], теорема 4.2).

Другая подгруппа обобщенных обратных элементов в смысле Дразина, так называемые *обобщенные обратные элементы Хирано*, была введена М.С. Абдолийосефи и Х. Ченом [9]. Обобщенный обратный элемент Хирано является единственным общим решением уравнений

$$b \in \text{comm}^2(a), \quad bab = b \text{ и } a^2 - ab \in \mathcal{R}^{\text{qnil}}.$$

Указанный выше элемент b единственен, если он существует, будем обозначать его как $b = a^{gH}$. Множество всех обобщенных обратимых элементов в смысле Хирано в $\mathcal{R}$ обозначим через $\mathcal{R}^{gH}$.

З. Ван и Дж.Л. Чен в работе [10] ввели понятие, которое соединяет обратимость в смысле Дразина и обобщенную обратимость в смысле Дразина. Элемент $a \in \mathcal{R}$ называется *псевдо-обратимым в смысле Дразина*, если существует элемент $b \in \text{comm}^2(a)$ такой, что

$$bab = b, \quad a^k ba - a^k \in \mathcal{R}^{rad} \text{ для некоторого неотрицательного целого числа } k.$$

Если такой элемент b существует, то он единственен, называется *псевдообратным элементом Дразина* для элемента a и обозначается как a^{pD} . Наименьшее положительное целое число k называется *псевдоиндексом* элемента a . Множество всех элементов из $\mathcal{R}$, которые имеют псевдообратный элемент в смысле Дразина, обозначается как $\mathcal{R}^{pD}$.

В 1965 г. Р.Е. Клайн [11] обнаружил, что обратимость в смысле Дразина элемента ab переносится на элемент ba , а также, что $(ba)^D = b((ab)^D)^2 a$. Это уравнение теперь называется *формулой Клайна* и играет важную роль в выражении обратного элемента Дразина для суммы двух элементов (см., например, [12]). Формула Клайна для обобщенного обратного элемента Дразина была установлена в работе [13].

Авторы работ [5], [7] установили, что формула Клайна применима к сильному обратному элементу Дразина, обобщенному сильному обратному элементу Дразина, обратному элементу Хирано и обобщенному обратному элементу Хирано при выполнении предположения

$$aba = aca. \quad (1)$$

При других условиях в работах [4] и [14] формула Клайна была расширена на сильный обратный элемент Дразина, обобщенный сильный обратный элемент Дразина, обратный элемент Хирано и обобщенный обратный элемент Хирано для элементов ac и bd .

Недавно К. Ян и др. [15] ввели условия

$$bac = bdb \text{ и } cdb = cac$$

и рассмотрели обратные элементы Дразина для ac и bd (см. библиографии в [15]–[18]).

При этих условиях

$$a(ba)^2 = abaca = acaba = (ac)^2 a.$$

Ряд работ был посвящен распространению формулы Клайна на обобщенные обратные элементы при выполнении этих равенств [14], [19].

В более поздней работе [20] Х. Чен и М.С. Абдолийосефи предложили следующие условия:

$$\begin{aligned} (ac)^2 a &= acdba = dbaca = (db)^2 a; \\ (ac)^2 d &= acdbd = dbacd = (db)^2 d. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти авторы представили обобщенные формулы Клайна для g -обратных элементов Дразина в кольцах [20].

Основное внимание настоящей статьи уделено общим свойствам произведений элементов в унитарном ассоциативном кольце $\mathcal{R}$. Мы расширяем формулу Клайна на новые обобщенные обратные элементы, связанные с обратным элементом Дразина, такие как (обобщенный) сильный обратный элемент Дразина и (обобщенный) обратный элемент Хирано. Точнее говоря, при предположении (2) показываем, что

$$ac \in \mathcal{R}^\bullet \iff bd \in \mathcal{R}^\bullet,$$

а также

$$(ac)^\bullet = d((bd)^\bullet)^3 bac \text{ и } (bd)^\bullet = b((ac)^\bullet)^2 d,$$

где $\bullet \in \{pD, sD, gsD, H, gH\}$. Как частный случай получаем некоторые недавние результаты из [2], [5], [7], [9].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нам необходима

Лемма ([20], лемма 2.1). Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^{qnil} \text{ если и только если } bd \in \mathcal{R}^{qnil}.$$

Заметим, что ([20], следствие 3.4) может быть перенесено на кольцо при условиях (2). Получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^D \text{ если и только если } bd \in \mathcal{R}^D.$$

В этом случае

$$(ac)^D = d((bd)^D)^3 bac \text{ и } (bd)^D = b[(ac)^D]^2 d.$$

Доказательство. Предположим, что $bd \in \mathcal{R}^D$, тогда $bd \in \mathcal{R}^d$. Из ([20], теорема 2.2) получаем $(ac)^d = d[(bd)^D]^3 bac$. Очевидно, $ac = (ac)(ac)^d(ac)$ и $(ac)(ac)^d = (ac)^d(ac)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} & [ac - (ac)^d(ac)^2] (ac)^3 = [ac - d[(bd)^D]^3 bac(ac)^2] (ac)^3 = \\ & = [(ac)^3 ac - d[(bd)^D]^4 bdbacacac(ac)^3] = [db(ac)^3 - d[(bd)^D]^4 bdbdbdbdb(ac)^3] = \\ & = d[1 - (bd)(bd)^D] b(ac)^2 ac = d[1 - (bd)(bd)^D] (bd)^2 bac. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & [ac - (ac)^d(ac)^2]^4 = [ac - (ac)^d(ac)^2] (ac)^3 [1 - (ac)^d(ac)] = \\ & = d[bd - (bd)^2(bd)^D] bdbac [1 - (ac)^d(ac)]. \end{aligned}$$

Так как $bd - (bd)^2(bd)^D$ является нильпотентным, то индуктивно получаем, что $ac - (ac)^d(ac)^2$ также нильпотентный.

Обратно, предположим, что $ac \in \mathcal{R}^D$, тогда $ac \in \mathcal{R}^d$. Из ([20], теорема 2.2) получаем $(bd)^d = b[(ac)^D]^2 d$. Очевидно, $bd = (bd)(bd)^d(bd)$ и $(bd)(bd)^d = (bd)^d(bd)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} & [bd - (bd)^d(bd)^2] (bd)^2 = [bd - b[(ac)^D]^2 d(bd)^2] (bd)^2 = \\ & = [bd - b[(ac)^D]^2 (ac)^2 d] (bd)^2 = b[1 - (ac)(ac)^D] (db)^2 d = b[1 - (ac)(ac)^D] (ac)^2 d. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} & [bd - (bd)^d(bd)^2]^3 = [bd - (bd)^d(bd)^2] (bd)^2 [1 - (bd)^d(bd)] = \\ & = b[ac - (ac)^2(ac)^D] acd [1 - (bd)^d(bd)]. \end{aligned}$$

Так как $ac - (ac)^2(ac)^D$ является нильпотентным, то индуктивно получаем, что $bd - (bd)^d(bd)^2$ также нильпотентный. $\square$

Теорема 2. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^{pD} \text{ если и только если } bd \in \mathcal{R}^{pD}.$$

В этом случае

$$(ac)^{pD} = d((bd)^{pD})^3 bac \text{ и } (bd)^{pD} = b((ac)^{pD})^2 d.$$

Доказательство. Предположим, что ac является псевдообратимым в смысле Дразина. Тогда $(ac)^{pD} \in \text{comm}^2(ac)$, $(ac)^{pD}ac(ac)^{pD} = (ac)^{pD}$ и $(ac)^k(ac)^{pD}(ac) - (ac)^k \in \mathcal{R}^{\text{rad}}$.

Положим $s = d((ac)^{pD})^2b$. Рассуждая аналогично доказательству ([20], теорема 2.2), получаем

$$s \in \text{comm}^2(bd) \text{ и } sbds = s.$$

Поэтому $(ac)^k(ac)^{pD}(ac) - (ac)^k \in \mathcal{R}^{\text{rad}}$,

$$\begin{aligned} & (bd)^{k+1}s(bd) - (bd)^{k+1} = b(db)^kdb((ac)^{pD})^2dbd - b(db)^kd = \\ & = b(ac)^kdb((ac)^{pD})^2dbd - b(ac)^kd = b(ac)^kdbac((ac)^{pD})^4acdbd - b(ac)^kd = \\ & = b(ac)^kacac((ac)^{pD})^4acacd - b(ac)^kd = b(ac)^kac((ac)^{pD})^2acd - b(ac)^kd = \\ & = b(ac)^k(ac)^{pD}acd - b(ac)^kd = b((ac)^k(ac)^{pD}(ac) - (ac)^k)d \in \mathcal{R}^{\text{rad}}. \end{aligned}$$

Тогда $(bd)^k(bd)^{pD}(bd) - (bd)^k \in \mathcal{R}^{\text{rad}}$. Таким образом,

$$(bd)^{pD} = d((ac)^{pD})^3b \text{ и } i(bd) \leq i(ac) + 1.$$

Обратно, если bd является псевдообратимым в смысле Дразина, то аналогичными рассуждениями можно показать, что ac также псевдообратимый в смысле Дразина, причем $i(bd) \leq i(ac) + 1$. $\square$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3. Ван опубликовал формулу Клайна для s -обратного элемента Дразина ([2], теорема 3.1). Далее мы обобщаем ее на случай, когда выполняются условия (2).

Теорема 3. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^{sD} \text{ если и только если } bd \in \mathcal{R}^{sD}.$$

В этом случае

$$(ac)^{sD} = d((bd)^{sD})^3bac, (bd)^{sD} = b((ac)^{sD})^2d \text{ и } |i_{sD}(ac) - i_{sD}(bd)| \leq 2.$$

Доказательство. Предположим, что существуют $s \in \mathcal{R}$ и неотрицательное целое число k такие, что

$$s(bd) = (bd)s, s(bd)s = s \text{ и } (bd - sbd)^k = 0.$$

Возьмем $t = ds^3bac$. По теореме 1 t является обратным элементом Дразина для ac , откуда

$$t(ac) = (ac)t \text{ и } t(ac)t = t.$$

Поэтому для доказательства $ac \in \mathcal{R}^{sD}$ достаточно показать, что $(ac - act)^{k+2} = 0$. Поскольку $(1 - s)^k(bd)^k = 0$, получаем следующие случаи.

Случай 1. Для $k > 1$ имеем

$$\begin{aligned} (ac - act)^{k+2} &= (ac - acds^3bac)^{k+2} = (ac - acd(bd)^2s^5bac)^{k+2} = \\ &= (ac - ac(db)^2ds^5bac)^{k+2} = (ac - d(bd)^3ds^5bac)^{k+2} = \\ &= (ac - ds^2bac)^{k+2} = [(1 - ds^2b)ac]^{k+2} = (1 - ds^2b)[ac(1 - ds^2b)]^k ac(1 - ds^2b)(ac) = \\ &= (1 - ds^2b)(ac - acds^2b)^{k+1}(ac) = (1 - ds^2b)(ac - acdbds^3b)^{k+1}(ac) = \\ &= (1 - ds^2b)(ac - dbdbds^3b)^{k+1}(ac) = (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k+1}(ac) = \\ &= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-1}(ac - dsb)((ac)^2 - dbdbds^3bac) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-1}(ac - ds^3bdbb)((ac)^2 - acdbds^3bac) = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-1}(aca - ds^3bdbba)(cac - cdbds^3bac) = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-1}(aca - ds^3bdbaca)(cac - cdbds^3bac) = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-1}(1 - ds^3bdb)((ac)^2ac - acacdbds^3bac) = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-1}(1 - ds^3bdb)(acdbac - acdbdbds^3bac) = \\
&\quad = (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-1}(1 - ds^3bdb)acd(1 - s)bac = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-2}((ac)^2d - acds^3bdbacd)(1 - s^3bacd)(1 - s)bac = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-2}(1 - acds^3b)((ac)^2d - (ac)^2ds^3bacd)(1 - s)bac = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-2}(1 - acds^3b)acd(bd)(1 - s^3bdb)(1 - s)bac = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-2}(1 - acds^3b)acd(bd)(1 - s)(1 - s)bac = \\
&= (1 - ds^2b)(ac - dsb)^{k-2}(1 - acds^3b)acd(bd)(1 - s)(1 - s)bac = \\
&\quad = (1 - ds^2b)(1 - acds^3b)acd(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = \\
&\quad = (1 - ds^2b)acd(1 - s^3bacd)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = \\
&\quad = (1 - ds^2b)acd(1 - s^4bdbacd)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = \\
&\quad = (1 - ds^2b)acd(1 - s^4bdbbdb)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = \\
&= (1 - ds^2b)acd(1 - s)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = (acd - ds^2bacd)(1 - s)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = \\
&= (acd - ds^3bdbacd)(1 - s)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = (acd - ds^3(bd)^3)(1 - s)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = \\
&= (acd - (db)^3ds^3)(1 - s)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = (acd - acd(bd)^2s^3)(1 - s)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = \\
&\quad = acd(1 - s)(1 - s)(bd)^{k-1}(1 - s)^kbac = acd(1 - s)^{k+2}(bd)^kbac.
\end{aligned}$$

Получаем $(ac - act)^{k+2} = 0$, что и требовалось при $k > 1$.

Случай 2. Для $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
(ac - act)^3 &= (ac - acds^3bac)^3 = (ac - acds^3bac)(ac - acds^3bac)(ac - acds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b)((ac)^2a - (ac)^2ds^3baca)(c - cds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b)((db)^2a - (db)^2ds^4bdbaca)(c - cds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b)((db)^2a - (db)^2ds^4bdbba)(c - cds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b)d(1 - s)bdb(ac - acds^3bac).
\end{aligned}$$

Поскольку $(1 - s)(bd) = 0$, то $(ac - act)^3 = 0$.

Обратно, предположим, что $ac \in \mathcal{R}^{sD}$, и пусть u — сильный обратный элемент Дразина для ac , m — его индекс. Положим $v = bu^2d$. Снова по теореме 1 получаем, что v — обратный элемент Дразина для bd . Вследствие этого остается только показать, что $(bd - bdv)^{m+2} = 0$. Заметим, что

$$bd - bdv = bd - bdbu^2d = bd - bdbacacu^4d = bd - bacacacu^4d = b(1 - u)d.$$

Случай 1. Для $m > 1$ имеем

$$\begin{aligned}
[b(1 - u)d]^{m+2} &= [b(1 - u)d][b(1 - u)d][b(1 - u)d][b(1 - u)d]^{m-1} = \\
&= b(1 - u)(db - dbu)(dbd - dbud)[b(1 - u)d]^{m-1} = \\
&= b(1 - u)(db - dbu)(dbd - dbacacu^3d)[b(1 - u)d]^{m-1} = \\
&= b(1 - u)(db - dbu)(dbd - dbdbacu^3d)[b(1 - u)d]^{m-1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b(1-u)(dbdbd - dbacacu^3dbd)(1 - bacu^3d)[b(1-u)d]^{m-1} = \\
&= b(1-u)(acdbd - acudbd)(1 - bacu^3d)[b(1-u)d]^{m-1} = \\
&= b(1-u)(ac - acu)(dbd - dbdbacu^3d)[b(1-u)d]^{m-1} = \\
&= \dots = b(1-u)(ac - acu)^{m-1}(dbd - dbud) = \\
&= b(1-u)(1-u)^{m-1}(ac)^{m-1}(dbd - dbacu^2d) = \\
&= b(1-u)(1-u)^{m-1}((ac)^{m-1}dbd - (ac)^{m-1}dbacu^2d) = \\
&= b(1-u)(1-u)^{m-1}((ac)^{m-1}acd - (ac)^{m-1}acacu^2d) = \\
&= b(1-u)(ac - acu)^{m-1}(ac - acu)d = b(1-u)(ac - acu)^m d = 0.
\end{aligned}$$

Случай 2. Для $m = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
&[b(1-u)d]^3 = [b(1-u)d][b(1-u)d][b(1-u)d] = \\
&= b(1-u)(db - dbu)(dbd - dbud) = b(1-u)(db - dbu)(dbd - dbacacu^3d) = \\
&= b(1-u)(db - dbu)(dbd - dbdbacu^3d) = b(1-u)(dbdbd - dbacacu^3dbd)(1 - bacu^3d) = \\
&= b(1-u)(acdbd - acudbd)(1 - bacu^3d) = \\
&= b(1-u)(ac - acu)(dbd - dbdbacu^3d) = b(1-u)(dbd - dbud) = \\
&= b(1-u)(1-u)^{m-1}(ac)^{m-1}(dbd - dbacu^2d) = \\
&= b(1-u)(1-u)^{m-1}((ac)^{m-1}dbd - (ac)^{m-1}dbacu^2d) = \\
&= b(1-u)(1-u)^{m-1}((ac)^{m-1}acd - (ac)^{m-1}acacu^2d) = \\
&= b(1-u)(ac - acu)^{m-1}(ac - acu)d = b(1-u)(ac - acu)d = 0.
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\mathcal{B}(X, Y)$ для множества всех ограниченных линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y . Используя метод блочных матриц, получаем операторный случай теоремы 3.

Следствие 1. Пусть $A, B, C, D \in \mathcal{B}(X, Y)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
(AC)^2 A &= ACDBA = DBACA = (DB)^2 A; \\
(AC)^2 D &= ACDBD = DBACD = (DB)^2 D.
\end{aligned}$$

Тогда AC является s -обратимым в смысле Дразина, если и только если BD является s -обратимым в смысле Дразина.

В этом случае

$$(AC)^{sD} = D((BD)^{sD})^3 BAC \text{ и } (BD)^{sD} = B((AC)^{sD})^2 D.$$

Следствие 2. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2), и пусть $n \geq 2$ — целое число. Тогда

$$(ac)^n \in \mathcal{R}^{sD} \text{ если и только если } (bd)^n \in \mathcal{R}^{sD}.$$

В этом случае

$$((bd)^n)^{sD} = b \left[((ac)^n)^{sD} \right]^2 d (bd)^{n-1} \text{ и } ((ac)^n)^{sD} = d \left[((bd)^n)^{sD} \right]^2 b (ac)^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $b' = b(db)^{n-1}$ и $c' = c(ac)^{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}(ac')^2 a &= ac' db' a = db' ac' a = (db')^2 a; \\ (ac')^2 d &= ac' db' d = ac' db' d = (db')^2 d.\end{aligned}$$

Из теоремы 3 следует, что $(ac)^n = ac' \in \mathcal{R}^{sD}$ тогда и только тогда, когда $(bd)^n = b'd \in \mathcal{R}^{sD}$, получаем

$$\begin{aligned}((bd)^n)^{sD} &= (b'd)^{sD} = b' \left((ac')^{sD} \right)^2 d = b(db)^{n-1} \left[((ac)^n)^{sD} \right]^2 d, \\ ((ac)^n)^{sD} &= (ac')^{sD} = d \left((b'd)^{sD} \right)^3 b' ac' = d \left[((bd)^n)^{sD} \right]^3 b(db)^{n-1} ac(ac)^{n-1} = \\ &= d \left[((bd)^n)^{sD} \right]^3 b(db)^n (ac)^{n-1} = d \left[((bd)^n)^{sD} \right]^2 b(ac)^{n-1}.\end{aligned}$$

□

Лемма Джекобсона утверждает, что $1-ab \in \mathcal{R}^{-1}$ тогда и только тогда, когда $1-ba \in \mathcal{R}^{-1}$. В последние годы многие математики уделяли большое внимание лемме Джекобсона для (обобщенного) обратного элемента Дразина [18], [21]–[28]. Задачей является нахождение подходящих аналогов леммы Джекобсона для (обобщенного) обратного элемента Дразина при выполнении условий (2).

В ([2], лемма 3.3) З. Ван доказал, что если $a \in \mathcal{R}^{sD}$ и $i_{sD}(a) = k$, то $1-a \in \mathcal{R}^{sD}$ и $i_{sD}(1-a) = k$, причем $(1-a)^{sD} = \sum_{i=0}^{k-1} a^i (1-aa^{sD})$. Этот результат устанавливает связь между формулой Клайна для s -обратного элемента Дразина и леммой Джекобсона для s -обратного элемента Дразина.

Следствие 3. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда

1) если $1-ac \in \mathcal{R}^{sD}$ и $i_{sD}(1-ac) = k$, то $1-bd \in \mathcal{R}^{sD}$ и

$$(1-bd)^{sD} = \sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i - b \left[\sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} (db)^i (1-ac)^j \right] [1 - (1-ac)(1-ac)^{sD}] d;$$

2) если $1-bd \in \mathcal{R}^{sD}$ и $i_{sD}(1-bd) = k$, то $1-ac \in \mathcal{R}^{sD}$ и

$$(1-ac)^{sD} = \left[\sum_{i=0}^{k+1} (ac)^i \right] \left[1 - d \left[\sum_{j=0}^{k-1} (1-ac)^j \right]^2 [1 - (1-ac)(1-ac)^{sD}]^2 bac \right].$$

Доказательство. 1) Пусть $1-ac \in \mathcal{R}^{sD}$, тогда ввиду ([2], лемма 3.3) $ac \in \mathcal{R}^{sD}$,

$$(ac)^{sD} = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (1-ac)^j \right] [1 - (1-ac)(1-ac)^{sD}].$$

Применяя теорему 3, получаем $bd \in \mathcal{R}^{sD}$, $(bd)^{sD} = b((ac)^{sD})^2 d$ и $i_{sD}(bd) \leq k+2$. Снова ввиду ([2], лемма 3.3) $1-bd \in \mathcal{R}^{sD}$ и

$$(1-bd)^{sD} = \left[\sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i \right] [1 - (bd)(bd)^{sD}] = \left[\sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i \right] [1 - (bd)b((ac)^{sD})^2 d] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i \right] [1 - bdbacac((ac)^{sD})^4 d] = \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i \right] [1 - b(ac)^3((ac)^{sD})^4 d] = \left[\sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i \right] [1 - b(ac)^{sD} d] = \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i \right] \left[1 - b \left[\sum_{j=0}^{k-1} (1-ac)^j \right] [1 - (1-ac)(1-ac)^{sD}] d \right] = \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (bd)^i - b \left[\sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} (db)^i (1-ac)^j \right] [1 - (1-ac)(1-ac)^{sD}] d.
\end{aligned}$$

2) Пусть $1 - bd \in \mathcal{R}^{sD}$, тогда ввиду ([2], лемма 3.3) $bd \in \mathcal{R}^{sD}$,

$$(bd)^{sD} = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (1-bd)^j \right] [1 - (1-bd)(1-bd)^{sD}].$$

Применяя теорему 3, получаем $ac \in \mathcal{R}^{sD}$ и $(ac)^{sD} = d((bd)^{sD})^3 bac$. Тогда

$$acd((bd)^{sD})^3 bac = acdbd((bd)^{sD})^4 bac = dbdbd((bd)^{sD})^4 bac = d((bd)^{sD})^2.$$

Снова ввиду ([2], лемма 3.3) $1 - ac \in \mathcal{R}^{sD}$,

$$\begin{aligned}
(1-ac)^{sD} &= \left[\sum_{i=0}^{k+1} (ac)^i \right] [1 - (ac)(ac)^{sD}] = \left[\sum_{i=0}^{k+1} (ac)^i \right] [1 - acd((bd)^{sD})^3 bac] = \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k+1} (ac)^i \right] [1 - d((bd)^{sD})^2 bac] = \\
&= \left[\sum_{i=0}^{k+1} (ac)^i \right] \left[1 - d \left[\sum_{j=0}^{k-1} (1-ac)^j \right]^2 [1 - (1-ac)(1-ac)^{sD}]^2 bac \right].
\end{aligned}$$

□

Следствие 4. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2), и пусть $n \geq 2$ — целое число. Тогда

$$(1-ac)^n \in \mathcal{R}^{sD} \text{ если и только если } (1-bd)^n \in \mathcal{R}^{sD}.$$

Доказательство. Пусть

$$c_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k (ca)^{k-1} c, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k (bd)^{k-1} b.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(ac_n)^2 a &= ac_n db_n a = db_n ac_n a = (db_n)^2 a; \\
(ac_n)^2 d &= ac_n db_n d = ac_n db_n d = (db_n)^2 d.
\end{aligned}$$

Заметим, что $1 - ac_n = (1 - ac)^n$ и $1 - b_n d = (1 - bd)^n$. Из следствия 3 можно получить, что $(1 - bd)^n \in \mathcal{R}^{sD}$.

Обратное утверждение доказывается аналогично. □

Формула Клайна для gs -обратного элемента Дразина была установлена в ([7], теорема 4.14) при выполнении условия (1). Далее мы обобщаем ее на случай, когда выполняется условие (2).

Теорема 4. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда $ac \in \mathcal{R}^{gsD}$ если и только если $bd \in \mathcal{R}^{gsD}$. В этом случае

$$(ac)^{gsD} = d((bd)^{gsD})^3 bac \text{ и } (bd)^{gsD} = b((ac)^{gsD})^2 d.$$

Доказательство. Пусть $bd \in \mathcal{R}^{gsD}$ и s — обобщенный сильный обратный элемент Дразина для bd . Возьмем $t = ds^3 bac$. Из ([20], теорема 2.2) следует, что t является обобщенным обратным элементом для ac . Поэтому для доказательства того, что $ac \in \mathcal{R}^{gsD}$, достаточно показать, что $(ac - act) \in \mathcal{R}^{qnil}$. Пусть $a' = (1 - ds^2 b)a$ и $b' = (1 - s)b$. Тогда $b'd \in \mathcal{R}^{qnil}$. Более того, непосредственные вычисления показывают, что

$$(a'c)^2 a' = a' c d b' a' = d b' a' c a' = (d b')^2 a';$$

$$(a'c)^2 d = a' c d b' d = d b' a' c d = (d b')^2 d.$$

Тогда по лемме 1 заключаем, что $ac - act \in \mathcal{R}^{qnil}$, откуда следует $ac \in \mathcal{R}^{gsD}$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что если $ac \in \mathcal{R}^{gsD}$, то $bd \in \mathcal{R}^{gsD}$ и $(bd)^{gsD} = b((ac)^{gsD})^2 d$. $\square$

Из доказательства ([2], лемма 3.3) можно также вывести, что $a \in \mathcal{R}^{gsD}$ тогда и только тогда, когда $1 - a \in \mathcal{R}^{gsD}$. Таким образом, непосредственным следствием теоремы 4 является следующий результат.

Следствие 5. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда

$$1 - ac \in \mathcal{R}^{gsD} \text{ если и только если } 1 - bd \in \mathcal{R}^{gsD}.$$

В дальнейшем, как расширение ([5], теорема 4.1), мы устанавливаем формулу Клайна для обратного элемента Хирано при выполнении условий (2).

Теорема 5. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда $ac \in \mathcal{R}^H$ если и только если $bd \in \mathcal{R}^H$. В этом случае

$$(ac)^H = d((bd)^H)^3 bac, \quad (bd)^H = b((ac)^H)^2 d \text{ и } |i_H(ac) - i_H(bd)| \leq 1.$$

Доказательство. Предположим, что существуют $s \in \mathcal{R}$ и неотрицательное целое число k такие, что

$$s(bd) = (bd)s, s(bd)s = s \text{ и } ((bd)^2 - s b d)^k = 0.$$

Возьмем $t = ds^2 bac$. По теореме 1 t является обратным элементом Дразина для ac и имеем $t(ac) = (ac)t$ и $t(ac)t = t$. Поэтому для доказательства того, что $ac \in \mathcal{R}^H$, достаточно показать, что $((ac)^2 - act)^{k+1} = 0$. Поскольку $(bd - s)^k (bd)^k = 0$ имеем следующие случаи.

Случай 1. Для $k > 1$ имеем

$$\begin{aligned} ((ac)^2 - act)^{k+1} &= ((ac)^2 - ac d s^3 bac)^{k+1} = ((ac)^2 - ac d b d s^4 bac)^{k+1} = \\ &= ((ac)^2 - (db)^2 d s^4 bac)^{k+1} = ((ac)^2 - ds^2 bac)^{k+1} = [(ac - ds^2 b) ac]^{k+1} = \\ &= (ac - ds^2 b) [ac (ac - ds^2 b)]^{k-1} ac (ac - ds^2 b) (ac) = \\ &= (ac - ds^2 b) [ac (ac - ds^2 b)]^{k-1} ((db)^2 ac - ac d b d s^3 bac) = \\ &= (ac - ds^2 b) [ac (ac - ds^2 b)]^{k-1} d (bd - (bd)^2 s^3) bac = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (ac - ds^2b) [ac (ac - ds^2b)]^{k-1} d (bd - s) bac = \\
&= (ac - ds^2b) [ac (ac - ds^2b)]^{k-2} ac (ac - ds^2b) d (bd - s) bac = \\
&= (ac - ds^2b) [ac (ac - ds^2b)]^{k-2} ((ac)^2d - acdbds^3bd) (bd - s) bac = \\
&= (ac - ds^2b) [ac (ac - ds^2b)]^{k-2} ((db)^2d - (db)^2s^3bd) (bd - s) bac = \\
&= (ac - ds^2b) [ac (ac - ds^2b)]^{k-2} ((db)^2d - (db)^2ds^3bd) (bd - s) bac = \\
&= (ac - ds^2b) [ac (ac - ds^2b)]^{k-2} d(bd) (bd - s) (bd - s) bac = d(1 - s^2)(bd)^k(bd - s)^k bac.
\end{aligned}$$

Получаем $((ac)^2 - act)^{k+1} = 0$.

Случай 2. Для $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
(ac - act)^2 &= (ac - acds^3bac)^3 = (ac - acds^3bac) (ac - acds^3bac) (ac - acds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b) ((ac)^2a - (ac)^2ds^3baca) (c - cds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b) ((db)^2a - (db)^2ds^4bdbaca) (c - cds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b) ((db)^2a - (db)^2ds^4bdbbda) (c - cds^3bac) = \\
&= (1 - acds^3b) d(1 - s) bdb (ac - acds^3bac).
\end{aligned}$$

Поскольку $(1 - s)(bd) = 0$, получаем $(ac - act)^3 = 0$.

Обратно, предположим, что $ac \in \mathcal{R}^H$, и пусть u — обратный элемент Хирано для ac , а m — его индекс. Положим $v = bu^2d$. Снова по теореме 1 получаем, что v является обратным элементом Дразина для bd . Поэтому остается лишь показать, что $((bd)^2 - bdv)^{m+1} = 0$.

Случай 1. Для $m > 1$ имеем

$$\begin{aligned}
((bd)^2 - bdv)^{m+1} &= ((bd)^2 - bdv)bd(bd - v) ((bd)^2 - bdv)^{m-1} = \\
&= ((bd)^2bd - bdvbd)(bd - v) ((bd)^2 - bdv)^{m-1} = \\
&= (b(db)^2d - bdbu^2dbd)(bd - v) ((bd)^2 - bdv)^{m-1} = \\
&= (bacdbd - bdbacacu^4dbd)(bd - v) ((bd)^2 - bdv)^{m-1} = \\
&= (bacdbd - bacacacu^4dbd)(bd - v) ((bd)^2 - bdv)^{m-1} = \\
&= b(ac - u)dbd(bd - v) ((bd)^2 - bdv)^{m-1} = \\
&= b(ac - u)dbd(bd - v) ((bd)^2 - bdv)^{m-1} = \dots = [b(ac - u)d]^{m+1}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[b(ac - u)d]^{m+1} &= [b(ac - u)d][b(ac - u)d][b(ac - u)d][b(ac - u)d]^{m-2} = \\
&= b(ac - u)(dbacdb - dbudb)(ac - u)d[b(ac - u)d]^{m-2} = \\
&= b(ac - u)((ac)^2db - dbudb)(ac - u)d[b(ac - u)d]^{m-2} = \\
&= b(ac - u)((ac)^2 - dbacacu^3)db(ac - u)d[b(ac - u)d]^{m-2} = \\
&= b(ac - u)((ac)^2 - (ac)^3u^3)db(ac - u)d[b(ac - u)d]^{m-2} = \\
&= b(ac - u)((ac)^2 - acu)db(ac - u)d[b(ac - u)d]^{m-2} = \\
&= \dots = b(ac - u)((ac)^2 - acu)^m d = 0.
\end{aligned}$$

Случай 2. Для $m = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
[b(ac - u)d]^2 &= [b(ac - u)d][b(ac - u)d][b(ac - u)d] = b(ac - acu^2)db(ac - u)d = \\
&= b(1 - u^2)(acdbac - acdbu)d = b(1 - u^2)((ac)^3 - acdbacu^2)d = b(1 - u^2)((ac)^3 - (ac)^3u^2)d =
\end{aligned}$$

$$= b(1 - u^2)ac((ac)^2 - (ac)^2u^2)d = b(1 - u^2)ac((ac)^2 - acu)d = 0.$$

Наконец, формула Клайна для обобщенного обратного элемента Хирано устанавливается при выполнении условия (2), что расширяет результат ([9], теорема 4.1).

Теорема 6. Пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям (2). Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^{gH} \text{ если и только если } bd \in \mathcal{R}^{gH}.$$

В этом случае

$$(ac)^{gH} = a((ba)^{gH})^2 c \text{ и } (ba)^{gH} = b((ac)^{gH})^2 a.$$

Доказательство. Пусть $bd \in \mathcal{R}^{gH}$ и s — обобщенный обратный элемент Хирано для bd . Возьмем $t = ds^3bac$. Из ([20], теорема 2.2) следует, что t является обобщенным обратным элементом Дразина для ac . Поэтому для доказательства того, что $ac \in \mathcal{R}^{gH}$, достаточно показать, что $(ac)^2 - act \in \mathcal{R}^{\text{qnil}}$. Пусть $a' = d(1 - s^2)ba$ и $b' = bac - sb$. Тогда $b'd \in \mathcal{R}^{\text{qnil}}$. Более того, непосредственные вычисления показывают, что

$$(a'c)^2a' = a'cdb'a' = db'a'ca' = (db')^2a';$$

$$(a'c)^2d = a'cdb'd = db'a'cd = (db')^2d$$

и $(ac)^2 - act = a'c$. Тогда по лемме 1 получаем $(ac)^2 - act \in \mathcal{R}^{\text{qnil}}$, откуда $ac \in \mathcal{R}^{gH}$.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что если $ac \in \mathcal{R}^{gH}$, то $bd \in \mathcal{R}^{gH}$ и $(bd)^{gH} = b((ac)^{gH})^2 d$. $\square$

В случае, когда $c = b$ и $d = a$, мы получаем известную обобщенную формулу Клайна для g -обратного элемента Дразина.

Следствие 6. Пусть $a, b, c \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям

$$(ac)^2a = acaba = abaca = a(ba)^2.$$

Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^\bullet \iff ba \in \mathcal{R}^\bullet,$$

имеем

$$(ac)^\bullet = a((ba)^\bullet)^2 c \text{ и } (bd)^\bullet = b((ac)^\bullet)^2 a,$$

где $\bullet \in \{sD, gsD, H, gH\}$.

Следствие 7 ([4], теорема 2.1). Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо и пусть $a, b, c, d \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условиям

$$aca = dba, \quad acd = dbd.$$

Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^\bullet \iff bd \in \mathcal{R}^\bullet,$$

имеем

$$(ac)^\bullet = d((bd)^\bullet)^3 bac \text{ и } (bd)^\bullet = b((ac)^\bullet)^2 d,$$

где $\bullet \in \{sD, gsD, H, gH\}$.

Следствие 8. Пусть $a, b, c \in \mathcal{R}$ удовлетворяют условию

$$aca = aba.$$

Тогда

$$ac \in \mathcal{R}^\bullet \iff ba \in \mathcal{R}^\bullet,$$

$$(ac)^\bullet = a((ba)^\bullet)^2 c \text{ и } (bd)^\bullet = b((ac)^\bullet)^2 a,$$

где $\bullet \in \{sD, gsD, H, gH\}$.

Заметим, что аналогичные результаты следствий 1, 2 также справедливы для обобщенного сильного обратного элемента Дразина, обратного элемента Хирано и обобщенного обратного элемента Хирано. Завершим работу численным примером, иллюстрирующим теоремы 3–6.

Пример. Пусть A, B, C, D — четыре линейных оператора, действующих на прямой сумме четырех векторных пространств X . Эти операторы в данном пространстве представлены следующими матрицами:

$$A = B = C = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} I & R & S & T \\ 0 & 0 & U & V \\ 0 & 0 & 0 & W \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь R, T, S, U, V и W произвольны в X , при этом $VW \neq W$, $U \neq O$ и $U \neq I$, для матриц A, C, D и B выполняются равенства

$$(AC)^2 A = ACDBA = DBACA = (DB)^2 A;$$

$$(AC)^2 D = ACDBD = DBACD = (DB)^2 D,$$

при этом $(DB)^2 \neq (AC)^2$, $DBA \neq ACA$ и $CDB \neq CAC$. Таким образом, установлено, что общие локальные спектральные свойства операторов AC и BD могут быть выведены только непосредственно из представленных в данном контексте результатов, а не из соответствующих результатов в [4], [14]. В этом случае $ac \in \mathcal{R}^\bullet$, где $\bullet \in \{sD, gsD, H, gH\}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Harte R. *On quasnilpotents in rings*, Panamer. Math. J. **1**, 10–16 (1991).
- [2] Wang Z. *A class of Drazin inverses in rings*, Filomat **31** (6), 1781–1789 (2017).
- [3] Drazin M.P. *Pseudo-inverse in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly **65**, 506–514 (1958).
- [4] Wu Z., Zeng Q. *Extensions of Cline's formula for some new generalized inverses*, Filomat **35** (2), 477–483 (2021).
- [5] Chen H., Abdolyousefi M.S. *On Hirano inverses in rings*, Turkish J. Math. **43** (4), 2049–2057 (2019).
- [6] Mosić D. *Reverse order laws for the generalized strong Drazin inverses*, Appl. Math. Comput. **284** (2), 37–46 (2016).
- [7] Gürgün O. *Properties of generalized strongly Drazin invertible elements in general rings*, J. Algebra Appl. **16** (11), 1750207 (2017).
- [8] Koliha J.J., Patrício P. *Elements of rings with equal spectral idempotents*, J. Aust. Math. Soc. **72** (1), 137–152 (2002).
- [9] Chen H., Sheibani M. *Generalized Hirano inverses in rings*, Commun. Algebra **47** (7), 2967–2978 (2019).
- [10] Wang Z., Chen J.L. *Pseudo Drazin inverse in associative rings and Banach algebras*, Linear Algebra Appl. **437** (6), 1332–1345 (2012).
- [11] Cline R.E. *An application of representation for the generalized inverse of a matrix*, MRC Techn. Report **592**, 174–198 (1965).
- [12] Patrício P., Hartwig R.E. *Some additive results on Drazin inverses*, Appl. Math. Comput. **215** (2), 530–538 (2009).
- [13] Liao Y.H., Chen J.L., Cui J. *Cline's formula for the generalized Drazin inverse*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. Ser. 2, **37** (1), 37–42 (2014).
- [14] Ren Y., Jiang L. *Jacobson's lemma for the generalized n -strong Drazin inverses in rings and in operator algebras*, Glasnik Matem. **57** (1), 1–15 (2022).

- [15] Yan K., Zeng Q., Zhu Y. *On Drazin spectral equation for the operator products*, Complex Anal. Oper. Theory **14** (1) (2020).
- [16] Jiang Y., Wen Y., Zeng Q. *Generalizations of Cline's formula for three generalized inverses*, Rev. Union Matem. Argentina **58** (1), 127–134 (2017).
- [17] Lian H.F., Zeng Q.P. *An extension of Cline's formula for a generalized Drazin inverse*, Turk. J. Math. **40** (1), 161–165 (2016).
- [18] Hadji S., Zguitti H. *Further common spectral properties of bounded linear operators AC and BD* , Rend. Circ. Matem. Palermo, Ser. 2, **71** (4), 707–723 (2022).
- [19] Chen H., Abdolousefi M.S. *Cline's Formula for g -Drazin Inverses in a ring*, Filomat **33** (8), 2249–2255 (2019).
- [20] Chen H., Abdolousefi M.S. *Generalized Cline's formula for the generalized Drazin inverse in rings*, Filomat **37** (10), 3021–3028 (2023).
- [21] Castro-González N., Mendes-Araújo C., Patrício P. *Generalized inverses of a sum in rings*, Bull. Aust. Math. Soc. **82**, 156–164 (2010).
- [22] Cvetković-Ilić D., Harte R. *On Jacobson's lemma and Drazin invertibility*, Appl. Math. Lett. **23** (4), 417–420 (2010).
- [23] Lam T.Y., Nielsen P.P. *Jacobson's lemma for Drazin inverses*, Contemp. Math.: Ring Theory Appl. **609**, 185–196 (2014).
- [24] Patrício P., Veloso da Costa A. *On the Drazin index of regular elements*, Cent. Eur. J. Math. **7** (2), 200–205 (2009).
- [25] Zhuang G., Chen J., Cui J. *Jacobson's lemma for the generalized Drazin inverse*, Linear Algebra Appl. **436** (3), 742–746 (2012).
- [26] Hadji S., Zguitti H. *Back to the common spectral properties of operators satisfying $A^k B^k A^k = A^{k+1}$ and $B^k A^k B^k = B^{k+1}$* , Asian-Eur. J. Math. **14** (10), 2150177 (2021).
- [27] Hadji S., Zguitti H. *Jacobson's Lemma for Generalized Drazin–Riesz Inverses*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. **39** (3), 481–496 (2023).
- [28] Miller V.G., Zguitti H. *New extensions of Jacobson's lemma and Cline's formula*, Rend. Circ. Matem. Palermo, Ser. 2, **67** (1), 105–114 (2018).

Суффиан Хаджи

Рабатский университет Мухаммеда V, Высшая нормальная школа,
а/я 5118, Такаддум, г. Рабат, 10105, Марокко,

e-mail: soufiane.hadji@usmba.ac.ma

S. Hadji

Further common spectral properties for some generalized inverses in a ring

Abstract. Extensions of Cline's formula for some new generalized inverses such as strong Drazin inverse, generalized strong Drazin inverse, Hirano inverse and generalized Hirano inverse are presented. These extend many known results, e.g., Z. Wu and Q. Zeng, *Extensions of Cline's formula for some new generalized inverses*, Filomat **35**, 477–483 (2021).

Keywords: Cline's formula, ring, strong Drazin inverse, generalized strong Drazin inverse, Hirano inverse, generalized Hirano inverse.

Soufiane Hadji

Mohammed V University in Rabat, Ecole Normale Supérieure,
PO Box 5118, Takaddoum, Rabat, 10105 Morocco,

e-mail: soufiane.hadji@usmba.ac.ma