

Ф.Р. ТУРСУНОВ, Д.С. ШОДИЕВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. В статье изучается продолжение решения задачи Коши для бигармонического уравнения в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G . Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, у которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданными данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения и получена оценка условной устойчивости.

Ключевые слова: задача Коши, некорректная задача, функция Карлемана, регуляризованное решение, регуляризация, формула продолжения.

УДК: 517.946

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-1-37-51

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$ — точки двумерного евклидова пространства и G — неограниченная область в R^2 , лежащая внутри полосы $0 < y_2 < h$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$, граница которой состоит из прямой T ($y_2 = 0$) и некоторой кривой S ($y_2 = g(y_1)$), удовлетворяющей условиям $0 < g(y_1) < h$, $|g'(y_1)| < M < \infty$ и простирающейся до бесконечности. Положим $\bar{G} = G \cup \partial G$, $\partial G = S \cup T$. Предположим, что для некоторого $b_0 > 0$ выполняется условие

$$\int_{\partial G} \exp\{-b_0 \operatorname{ch} \rho_1 |y'|\} dS < \infty, \quad 0 < \rho_1 < \rho.$$

В области G рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 U(y) = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ — оператор Лапласа.

Обозначим

$$K_\rho(G) = \left\{ U(y) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G}) : U(y) + \operatorname{grad} U(y) + \Delta U(y) + \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \leq \exp[o(\exp \rho |y'|)], \right. \\ \left. |y'| \rightarrow \infty, y \in G \right\}.$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется найти бигармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\overline{G})$, у которой известны значения на части S границы ∂G , т. е.

$$\begin{aligned} U(y_1, y_2)|_S &= f_1(y), \quad \Delta U(y_1, y_2)|_S = f_3(y), \\ \frac{\partial}{\partial n} U(y_1, y_2)|_S &= f_2(y), \quad \frac{\partial}{\partial n} (\Delta U(y_1, y_2))|_S = f_4(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f_j(y)$, $j = \overline{1, 4}$, — заданные достаточно гладкие функции, $\frac{\partial}{\partial n}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G .

Рассматриваемая задача (1)–(2) относится к некорректным задачам математической физики, так как отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

В работе А.Н. Тихонова [1] была указана практическая важность неустойчивых задач и показано, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения.

Задача Коши для линейных эллиптических дифференциальных операторов имеет многочисленные приложения в физике, электродинамике, механике жидкости [2]–[4].

2. КОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИИ КАРЛЕМАНА

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. Т. Карлеман [5] установил формулу, дающую решение уравнения Коши–Римана в специальной области. Г.М. Голузин, В.И. Крылов [6] нашли общий способ получения формулы Карлемана. Они получили формулу восстановления по граничному множеству положительной лебеговой меры, а также предложили новый вариант формулы продолжения. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А. Айзенберга [7]. Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального уравнения со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М.М. Лаврентьевым [2], [8] и дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш.Я. Ярмухамедов [9], [10] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области является гиперповерхностью либо конической поверхностью.

Для рассматриваемой области функцию Карлемана построил Ш.Я. Ярмухамедов [9] в своей докторской диссертации следующим образом:

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{2\pi K(x_2)}, \quad (3)$$

где

$$\varphi(x, y) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{K(w)}{w - x_2} \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad K(w) = \frac{e^{\sigma w}}{w - x_2 + 2h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{2h} e^{\sigma x_2}, \quad (4)$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2, \quad \alpha = |y' - x'|, \quad x' = (x_1, 0), \quad y' = (y_1, 0), \quad 0 < x_2 < h.$$

В формуле (4) выбираем

$$K(w) = \frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2 + 3h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{3h} e^{\sigma x_2^2}$$

и, отделяя мнимую часть, с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(x, y) = & -\frac{3h}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)} \left[\int_0^\infty \frac{2(y_2 - x_2)e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} u du + \right. \\ & + \int_0^\infty \frac{3he^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} u du + \int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2 + \alpha^2} e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} u du - \\ & \left. - \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2 + 3h)(y_2 - x_2)e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В работе [10] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$, определенная равенствами (3) при $\sigma > 0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x, y) = F(r) + G_\sigma(x, y),$$

где $F(r) = \ln \frac{1}{r}$, $G_\sigma(x, y)$ — функция, гармоническая по y в R^2 , включая $y = x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$ для любого $\sigma > 0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x, y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [8].

Определение. Функция $\Phi_\sigma(x, y)$, зависящая от параметра $\sigma > 0$, определенная при $y \neq x$, называется функцией Карлемана для точки $x \in G$ и части $\partial G \setminus S$ указанной области, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Phi_\sigma(x, y)$ представима в виде

$$\Phi_\sigma(x, y) = r^2 \ln \frac{1}{r} + g_\sigma(x, y),$$

где $g_\sigma(x, y)$ гармонична в G по переменной y и непрерывно дифференцируема на $G \cup \partial G = \bar{G}$, причем

$$|g_\sigma(x, y)| \leq c, \quad c = \text{const},$$

$r^2 \ln \frac{1}{r}$ — фундаментальное решение уравнения (1);

2) при фиксированном $x \in G$ функция $\Phi_\sigma(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{\partial G \setminus S} \left\{ |\Phi_\sigma(x, y)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| + |\Delta \Phi_\sigma(x, y)| + \left| \frac{\partial \Delta \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| \right\} dS_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G , а $\varepsilon(\sigma)$ — положительная функция такая, что $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Известно, что если функция Карлемана построена, то используя формулу Грина можно написать регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построения функции Карлемана эквивалентна построению регуляризованного решения задачи Коши.

Если $U(y) \in K_\rho(G)$ удовлетворяет условию роста

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right| \leq$$

$$\leq M \exp \left[a_0 \cos \left(y_2 - \frac{h}{2} \right) \exp \rho_1 |y'| \right], \quad a_0 \geq 0, \quad y \in \partial G, \quad M = \text{const}, \quad (6)$$

то справедлива интегральная формула Грина [11]

$$\begin{aligned} U(x) = & \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial (\Delta L(x, y))}{\partial n} - \Delta L(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ & + \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial L(x, y)}{\partial n} - L(x, y) \frac{\partial (\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y, \quad x \in G, \end{aligned} \quad (7)$$

где $L(x, y) = r^2 \ln \frac{1}{r}$ является фундаментальным решением уравнения (1).

Так как $\Phi_\sigma(x, y)$ представлена в виде (5), то в интегральном представлении (7), заменяя $L(x, y)$ функцией $L_\sigma(x, y) = r^2 \Phi_\sigma(x, y)$, имеем

$$\begin{aligned} U(x) = & \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ & + \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial (\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y, \quad x \in G. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$ и ее производные $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$, $x \in G$, $i = 1, 2$. В данной работе строится семейство функций $U(x, \sigma, f_{k\delta}) = U_{\sigma\delta}(x)$, $\frac{\partial U(x, \sigma, f_{k\delta})}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$, $k = \overline{1, 4}$, $i = 1, 2$, зависящих от параметра σ , и доказывается, что при специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta \rightarrow 0$ сходится в каждой точке $x \in G$ к решению $U(x)$ и ее производной $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно.

Семейство функций $U(x, \sigma, f_{k\delta})$ и $\frac{\partial U(x, \sigma, f_{k\delta})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, с указанными свойствами называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [8]. Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданным отклонением в равномерной метрике, то предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части ∂G границы.

В работах [12], [13] с помощью функции Карлемана получены оценки отклонения производных первого порядка приближенного решения от производных точного решения в зависимости от расстояния до плоской части границы в двумерных и трехмерных областях для уравнения Лапласа, а в работе [14] — в двумерных областях специального вида для бигармонического уравнения.

Эти результаты могут быть применены к задачам теории упругости при нахождении приближенного значения перемещения, деформации и напряжения.

3. ФОРМУЛА ПРОДОЛЖЕНИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПО М.М. ЛАВРЕНТЬЕВУ

Предположим, что $U(y) \in K_\rho(G)$ на части ∂G удовлетворяет условию

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right| \leq M, \quad y \in T. \quad (9)$$

При этих предположениях в формуле (6) положим $a_0 = 0$.

В работе [15] предлагается метод регуляризации решения задач Коши для уравнения Лапласа введением бигармонического оператора с малым параметром и показано, что если решение исходной задачи существует, то разность между спектральными разложениями решений исходного и регуляризованного уравнений стремится к нулю при стремлении параметра регуляризации к нулю в пространстве функций, суммированных с квадратом.

Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[f_1(y) \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - f_2(y) \Delta L_\sigma(x, y) \right] dS_y + \\ + \int_S \left[f_3(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - f_4(y) L_\sigma(x, y) \right] dS_y, \quad x \in G. \quad (10)$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y) \in K_\rho(G)$ на части S границы ∂G удовлетворяет условию (2) и на части T границы ∂G выполнено неравенство (9). Тогда для любых $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq M\varphi(\sigma, h, x_2)e^{-\sigma x_2^2}, \quad (11)$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq M\varphi_i(\sigma, h, x_2)e^{-\sigma x_2^2}, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

где M — положительное число и

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma, h, x_2) = & \frac{52h\sqrt{\pi} + 36h^2\sigma\sqrt{\pi}x_2 + 45h^2\sqrt{\pi} + 6h\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}x_2^2} + \frac{162h\sqrt{\pi} + 18h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + \\ & + \frac{36h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2(3h - x_2)} + \frac{156h\sigma + 36h^2\sigma^2\sqrt{\pi} + 24h\sigma + 18h^2\sqrt{\pi}x_2 + 18h^2\sigma\sqrt{\pi} + 9h\sigma\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}} + \\ & + \frac{3h\sqrt{\pi} + 3h\sqrt{\pi}x_2}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + 36h(\sigma x_2 + h\sigma) + \frac{18h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^3} + \frac{3hx_2}{2} + \frac{6h\sqrt{\pi}x_2}{(3h - x_2)^3} + \\ & + \frac{207h^2\sqrt{\pi} + 36h^2\sigma\sqrt{\pi}x_2 + 12h\sqrt{\pi} + 6h\sigma\sqrt{\pi}x_2^2}{\sqrt{\sigma}x_2(3h - x_2)^2} + \frac{63h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \\ & + \frac{15h\sigma\sqrt{\pi}x_2 + 9h^2\sigma\sqrt{\pi} + 6h\sigma\sqrt{\pi} + 3h\sqrt{\pi}x_2 + 12h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)}, \quad (13) \\ \varphi_1(\sigma, h, x_2) = & \frac{30h\sqrt{\pi} + 168\sqrt{\pi}\sigma + 144h\sqrt{\pi}\sigma^2 + 45h^2\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \\ & + \frac{90h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 12h\sqrt{\pi}\sigma^2x_2 + 24h\sqrt{\pi}\sigma^2x_2^2}{\sqrt{\sigma}} + \\ & + \frac{95h\sqrt{\pi} + 1674h\sqrt{\pi}\sigma + 9h^2\sqrt{\pi} + 198h^2\sqrt{\pi}\sigma + 288h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 9h\sqrt{\sigma}x_2}{2\sqrt{\sigma}x_2} + \\ & + \frac{30h\sqrt{\pi} + 180h\sqrt{\pi}x_2 + 132h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 1476h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2}{\sqrt{\sigma}x_2^3} + \frac{1053h\sqrt{\pi}\sigma + 3h\sqrt{\pi}x_2}{2\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \\ & + \frac{144h\sqrt{\pi} + 4266h^2\sqrt{\pi} + 1244h\sqrt{\pi}x_2 + 102h\sqrt{\pi}\sigma x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2x_2^2} + \frac{648h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^3} + 48h + \\ & + 704h\sigma + 48h\sigma^2 + 45h^2\sigma + 72h^2\sigma^2 + (30h\sigma + 3h)x_2 + 12h\sigma^2x_2^2 + 72h^2\sigma^2x_2^3, \\ \varphi_2(\sigma, h, x_2) = & \frac{231h\sqrt{\pi}\sigma + 15h\sqrt{\pi}x_2 + 45h\sqrt{\sigma}x_2 + 9h^2\sqrt{\pi}x_2^2 + 3h\sqrt{\pi}x_2^3}{2\sqrt{\sigma}x_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{210h\sqrt{\pi}\sigma + 9h^2\sqrt{\pi} + 45h^2\sqrt{\pi}\sigma + 144h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 21h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 60h\sqrt{\pi}\sigma^2 x_2 + 12h\sqrt{\pi}\sigma^2 x_2^2}{\sqrt{\sigma}} + \\
& + \frac{4740h\sqrt{\pi}\sigma + 609h^2\sqrt{\pi} + 852h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 6hx_2 + 48h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 18h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2}{4\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \\
& + \frac{732h\sqrt{\pi} + 408h\sqrt{\pi}\sigma + 279h^2\sqrt{\pi} + 2520h^2\sqrt{\pi}\sigma + 30h\sqrt{\pi}x_2 + 192h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 48h\sqrt{\pi}\sigma^2 x_2}{2\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + \\
& + \frac{168h\sqrt{\pi} + 3774h^2\sqrt{\pi} + 1416h\sqrt{\pi}x_2 + 198h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 207h^2\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2 x_2^2} + \\
& + \frac{72h\sqrt{\pi} + 600h\sqrt{\pi}x_2^2 + 9h^2\sqrt{\pi}x_2^2 + 72h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2^2 + 3h\sqrt{\pi}\sigma x_2^4}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^3 x_2^2} + \frac{192h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^4} + \\
& + 804h\sigma + 72h^2\sigma + 72h^2\sigma^2 + 39h\sigma x_2 + 72h^2\sigma^2 x_2 + 24h\sigma^2 x_2 + 3h\sigma x_2^2 + 72h\sigma^2 x_2^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим через $I_\sigma(x)$ разность

$$I_\sigma(x) = U(x) - U_\sigma(x).$$

Далее из (8), (10) имеем

$$\begin{aligned}
I_\sigma(x) &= \int_T \left[U(y) \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\
&+ \int_T \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y, \quad x \in G.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (9) следует

$$\begin{aligned}
|I_\sigma(x)| &= \left| \int_T \left[U(y) \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \right. \\
&+ \left. \int_T \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y \right| \leq MN_\sigma(x),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
N_\sigma(x) &= \int_T \left[|L_\sigma(x, y)| + \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| + |\Delta L_\sigma(x, y)| + \left| \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right| \right] dS_y = \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}$$

Справедливость оценки (11) следует из неравенства

$$N_\sigma(x) \leq \varphi(\sigma, h, x_2) e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 0. \quad (14)$$

Докажем (14). Согласно $L_\sigma(x, y) = r^2 \Phi_\sigma(x, y)$ имеем

$$\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} = \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_2} \sin \gamma$$

и, предполагая, что $\cos \gamma$, $\sin \gamma$ являются координатами единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G , имеем

$$\begin{aligned}
L_\sigma(x, y) &= r^2 \Phi_\sigma(x, y) = r^2 \left\{ \frac{3he^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)}}{\pi} \int_0^\infty \frac{(y_2 - x_2)e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)((y_2 - x_2 + 3h)^2 + u^2 + \alpha^2)} u du + \right. \\
&+ \frac{9h^2 e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)((y_2 - x_2 + 3h)^2 + u^2 + \alpha^2)} u du -
\end{aligned}$$

$$- \frac{3h(y_2 - x_2)(y_2 - x_2 + 3h)e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)((y_2 - x_2 + 3h)^2 + u^2 + \alpha^2)} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} +$$

$$+ \frac{3he^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \sqrt{u^2 + \alpha^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)((y_2 - x_2 + 3h)^2 + u^2 + \alpha^2)} udu \Bigg\}.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} = \frac{\partial (L_\sigma(x, y))}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial y_2} [r^2 \Phi_\sigma(x, y)] = 2(y_2 - x_2) \Phi_\sigma(x, y) + r^2 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2},$$

$$\Delta L_\sigma(x, y) = \Delta (r^2 \Phi_\sigma(x, y)) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} [r^2 \Phi_\sigma(x, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} [r^2 \Phi_\sigma(x, y)] =$$

$$= 4\Phi_\sigma(x, y) + 4(y_1 - x_1) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1} + 4(y_2 - x_2) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} = \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_2} \sin \gamma = \frac{\partial}{\partial y_2} [\Delta (r^2 \Phi_\sigma(x, y))] =$$

$$= 8 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} + 4(y_1 - x_1) \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1 \partial y_2} + 4(y_2 - x_2) \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2^2}.$$

Полагая $y_2 = 0$ и оценивая, получим

$$J_1 = \int_T |L_\sigma(x, y)| dS_y \leq \left(\frac{3h\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} x_2 + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\sigma x_2^2}.$$

Здесь и также в дальнейшем при оценке интегралов используем неравенство

$$\frac{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2}{u^2 + (y_1 - x_1)^2 + x_2^2} < 1.$$

Введя полярные системы координаты, имеем

$$J_2 = \int_T \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| dS_y \leq \left(\frac{3h\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{3h\sqrt{\pi x_2}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \frac{27h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \frac{3hx_2}{2} + \frac{3h\sigma\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\sigma x_2^2},$$

$$J_3 = \int_T |\Delta L_\sigma(x, y)| dS_y \leq \left(\frac{12h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \frac{45h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2} + 12h + \frac{6h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2} + \frac{18h^2\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \right.$$

$$\left. + \frac{12h\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + \frac{18h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + \frac{9h\sigma\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}} \right) e^{-\sigma x_2^2},$$

$$J_4 = \int_T \left| \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right| dS_y \leq \left(\frac{52h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2} + \frac{162h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + \frac{36h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)x_2^2} + \frac{309h\sigma\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} + \right.$$

$$+ \frac{36h^2\sigma^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{36h^2\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2} + \frac{18h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^3} + \frac{207h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2x_2} + 36h\sigma x_2 + \frac{24h\sigma}{\sqrt{\sigma}} +$$

$$+ \frac{15h\sigma\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \frac{6h\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^3} + \frac{9h^2\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \frac{36h^2\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + 36h^2\sigma + \frac{12h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2x_2} +$$

$$\left. + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \frac{18h^2\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}} + \frac{6h\sigma\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + \frac{6h\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} \right) e^{-\sigma x_2^2}.$$

С учетом полученных оценок

$$\int_T \left[\left| \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right| + |\Delta L_\sigma(x, y)| + \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| + |L_\sigma(x, y)| \right] dS_y \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \frac{52h\sqrt{\pi} + 36h^2\sigma\sqrt{\pi}x_2 + 45h^2\sqrt{\pi} + 6h\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}x_2^2} + \frac{162h\sqrt{\pi} + 18h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h-x_2)^2} + \right. \\
&+ \frac{36h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2(3h-x_2)} + \frac{156h\sigma + 36h^2\sigma^2\sqrt{\pi} + 24h\sigma + 18h^2\sqrt{\pi}x_2 + 18h^2\sigma\sqrt{\pi} + 9h\sigma\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}} + \\
&\frac{3h\sqrt{\pi} + 3h\sqrt{\pi}x_2}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + 36h(\sigma x_2 + h\sigma) + \frac{18h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^3} + \frac{3hx_2}{2} + \frac{6h\sqrt{\pi}x_2}{(3h-x_2)^3} + \\
&+ \frac{207h^2\sqrt{\pi} + 36h^2\sigma\sqrt{\pi}x_2 + 12h\sqrt{\pi} + 6h\sigma\sqrt{\pi}x_2^2}{\sqrt{\sigma}x_2(3h-x_2)^2} + \frac{63h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} + \\
&\left. + \frac{15h\sigma\sqrt{\pi}x_2 + 9h^2\sigma\sqrt{\pi} + 6h\sigma\sqrt{\pi} + 3h\sqrt{\pi}x_2 + 12h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h-x_2)} \right\} e^{-\sigma x_2^2}.
\end{aligned}$$

Докажем неравенство (12). Дифференцируя равенства (8), (10) по x_i , $i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} &= \int_{\partial G} \left[U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] - \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_i} \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\
&+ \int_{\partial G} \left[\Delta U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] - \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_i} \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y, \\
\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} &= \int_S \left[U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] - \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_i} \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y + \\
&+ \int_S \left[\Delta U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] - \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_i} \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y.
\end{aligned}$$

Обозначим через $I_{i\sigma}(x)$ разность производных:

$$\begin{aligned}
I_{i\sigma}(x) &= \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \int_T \left[U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] - \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_i} \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\
&+ \int_T \left[\Delta U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] - \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_i} \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y.
\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (9) следует

$$\begin{aligned}
|I_{i\sigma}(x)| &= \left| \int_T \left[U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] - \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_i} \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \right. \\
&+ \left. \int_T \left[\Delta U(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] - \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_i} \frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n} \right] dS_y \right| \leq M N_{i\sigma}(x),
\end{aligned}$$

где

$$N_{i\sigma}(x) = \int_T \left[\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] \right| + \left| \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] \right| + \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_i} \right| \right] dS_y.$$

Для справедливости оценки (12) докажем неравенство

$$N_{i\sigma}(x) \leq \varphi_i(\sigma, h, x_2) e^{-\sigma x_2^2}, \quad \sigma > 0. \quad (15)$$

При $i = 1$

$$N_{1\sigma}(x) = \int_T \left[\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] \right| + \left| \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] \right| + \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_1} \right| \right] dS_y.$$

Обозначим

$$Z_1 = \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [r^2 \Phi_\sigma(x, y)] = r^2 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1} - 2(y_1 - x_1) \Phi_\sigma(x, y), \quad (16)$$

$$Z_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_2} \sin \gamma \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y_2} (r^2 \Phi_\sigma(x, y)) \right] =$$

$$= 2(y_2 - x_2) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1} - 2(y_1 - x_1) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} + r^2 \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1 \partial y_2}, \quad (17)$$

$$Z_3 = \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [\Delta (r^2 \Phi_\sigma(x, y))] = 4 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1} - 4 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1} +$$

$$+ 4(y_1 - x_1) \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1 \partial y_1} + 4(y_2 - x_2) \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1 \partial y_2}, \quad (18)$$

$$Z_4 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_2} \sin \gamma \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_2} \right] = 8 \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1 \partial y_2} - 4 \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1 \partial y_2} + 4(y_1 - x_1) \frac{\partial^3 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1 \partial y_1 \partial y_2} +$$

$$+ 4(y_2 - x_2) \frac{\partial^3 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_1 \partial y_2^2}. \quad (19)$$

При определении $\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right]$ и $\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right]$ учитываем, что $\cos \gamma$, $\sin \gamma$ являются координатами единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G .

Полагая $y_2 = 0$ в формулах (16)–(19) и оценивая интегралы, имеем

$$N_{1\sigma}(x) \leq \left(\frac{30h\sqrt{\pi} + 168\sqrt{\pi}\sigma + 144h\sqrt{\pi}\sigma^2 + 45h^2\sqrt{\pi}\sigma + 90h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 12h\sqrt{\pi}\sigma^2x_2}{\sqrt{\sigma}} + \right.$$

$$+ \frac{24h\sqrt{\pi}\sigma^2x_2^2}{\sqrt{\sigma}} + \frac{95h\sqrt{\pi} + 1674h\sqrt{\pi}\sigma + 9h^2\sqrt{\pi} + 198h^2\sqrt{\pi}\sigma + 288h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 9h\sqrt{\sigma}x_2}{2\sqrt{\sigma}x_2} +$$

$$+ \frac{30h\sqrt{\pi} + 180h\sqrt{\pi}x_2 + 132h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 1476h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2}{\sqrt{\sigma}x_2^3} + \frac{1053h\sqrt{\pi}\sigma + 3h\sqrt{\pi}x_2}{2\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} +$$

$$+ \frac{144h\sqrt{\pi} + 4266h^2\sqrt{\pi} + 1244h\sqrt{\pi}x_2 + 102h\sqrt{\pi}\sigma x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2x_2^2} + 48h + 704h\sigma + 48h\sigma^2 + 45h^2\sigma +$$

$$\left. + \frac{648h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^3} + 72h^2\sigma^2 + (30h\sigma + 3h)x_2 + 12h\sigma^2x_2^2 + 72h^2\sigma^2x_2^3 \right) e^{-\sigma x_2^2}. \quad (20)$$

Неравенство (15) доказано при $i = 1$. Теперь докажем неравенство (15) при $i = 2$:

$$N_{2\sigma}(x) = \int_T \left[\left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] \right| + \left| \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] \right| + \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_2} \right| \right] dS_y.$$

Вводим следующие обозначения:

$$P_1 = \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} [r^2 \Phi_\sigma(x, y)] = r^2 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2} - 2(y_2 - x_2) \Phi_\sigma(x, y), \quad (21)$$

$$P_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial y_2} \sin \gamma \right] = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial}{\partial y_2} (r^2 \Phi_\sigma(x, y)) \right] =$$

$$= 2\Phi_\sigma(x, y) + 2(y_2 - x_2) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2} - 2(y_2 - x_2) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} + r^2 \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2 \partial y_2}, \quad (22)$$

$$P_3 = \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} [\Delta (r^2 \Phi_\sigma(x, y))] = 4 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2} +$$

$$+4(y_1 - x_1) \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_1 \partial x_2} - 4 \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2} + 4(y_2 - x_2) \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2 \partial y_2}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right] = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_1} \cos \gamma + \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_2} \sin \gamma \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial y_2} \right] = 8 \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2 \partial y_2} - 4 \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial y_2^2} + 4(y_1 - x_1) \frac{\partial^3 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2 \partial y_1 \partial y_2} + \\ &\quad + 4(y_2 - x_2) \frac{\partial^3 \Phi_\sigma(x, y)}{\partial x_2 \partial y_2^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

В формулах (21)–(24) полагая $y_2 = 0$ и оценивая интегралы, имеем

$$\begin{aligned} N_{2\sigma}(x) &\leq \left(\frac{231h\sqrt{\pi}\sigma + 15h\sqrt{\pi}x_2 + 45h\sqrt{\sigma}x_2 + 9h^2\sqrt{\pi}x_2^2 + 3h\sqrt{\pi}x_2^3}{2\sqrt{\sigma}x_2} + \right. \\ &+ \frac{210h\sqrt{\pi}\sigma + 9h^2\sqrt{\pi} + 45h^2\sqrt{\pi}\sigma + 144h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 21h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 60h\sqrt{\pi}\sigma^2 x_2 + 12h\sqrt{\pi}\sigma^2 x_2^2}{\sqrt{\sigma}} + \\ &+ \frac{4740h\sqrt{\pi}\sigma + 609h^2\sqrt{\pi} + 852h^2\sqrt{\pi}\sigma^2 + 6hx_2 + 48h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 18h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2}{4\sqrt{\sigma}(3h - x_2)} + \\ &+ \frac{732h\sqrt{\pi} + 408h\sqrt{\pi}\sigma + 279h^2\sqrt{\pi} + 2520h^2\sqrt{\pi}\sigma + 30h\sqrt{\pi}x_2 + 192h\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 48h\sqrt{\pi}\sigma^2 x_2}{2\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2} + \\ &+ \frac{168h\sqrt{\pi} + 3774h^2\sqrt{\pi} + 1416h\sqrt{\pi}x_2 + 198h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2 + 207h^2\sqrt{\pi}x_2}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^2 x_2^2} + \\ &+ \frac{72h\sqrt{\pi} + 600h\sqrt{\pi}x_2^2 + 9h^2\sqrt{\pi}x_2^2 + 72h^2\sqrt{\pi}\sigma x_2^2 + 3h\sqrt{\pi}\sigma x_2^4}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^3 x_2^2} + 804h\sigma + 72h^2\sigma + 72h^2\sigma^2 + \\ &\left. + \frac{192h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}(3h - x_2)^4} + 39h\sigma x_2 + 72h^2\sigma^2 x_2 + 24h\sigma^2 x_2 + 3h\sigma x_2^2 + 72h\sigma^2 x_2^2 \right) e^{-\sigma x_2^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Неравенство (15) доказано при $i = 2$.

Из (20) и (25) следует доказательство неравенства (12). $\square$

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливы равенства

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через $\bar{G}_\varepsilon$ множество

$$\bar{G}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2) \in G, \ a > x_2 \geq \varepsilon, \ a = \max_T g(x_1), \ 0 < \varepsilon < a \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\bar{G}_\varepsilon \subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x \in \bar{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{ \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right\}$ сходится равномерно при $\sigma \rightarrow \infty$, т. е.

$$U_\sigma(x) \Rightarrow U(x), \quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Следует отметить, что множества $\Pi_\varepsilon = G \setminus \bar{G}_\varepsilon$ служат пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

4. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Оценка условной устойчивости краевой задачи для уравнения эллиптического типа четвертого порядка в прямоугольных областях получена в работе [16].

Предположим, что кривая S задана уравнением $y_2 = g(y_1)$, $y_1 \in T$, где g — однозначная функция такая, что S является кривой Ляпунова.

Рассмотрим множество

$$E = \left\{ U \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G}) : |U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right| \leq M, \quad M > 0, \quad y \in T \right\}.$$

Положим

$$\max_T g(y_1) = a, \quad \max_T \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dy_1} \right)^2} = b.$$

Теорема 2. Пусть функция $U(y) \in E$ удовлетворяет уравнению (1) и на части S границы области G выполняется неравенство

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right| \leq \delta, \quad y \in S. \quad (26)$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедлива оценка

$$|U(x)| \leq 2\Psi(\sigma, h, x_2) M^{1 - \frac{x_2^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_2^2}{a^2}}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma, h, x_2) = & \max_S (\varphi(\sigma, h, x_2), \psi(\sigma, h, x_2)), \\ \psi(\sigma, h, x_2) = & \frac{486\sqrt{\pi}bh\sigma + 60\sqrt{\pi}bh^2\sigma^2 + 342\sqrt{\pi}bh^2\sigma + 336\sqrt{\pi}bh^4\sigma^3}{\sqrt{\sigma}} + \\ & + \frac{18\sqrt{\pi}bh^2 + 170\sqrt{\pi}bh + 288\sqrt{\pi}bh^4\sigma^2 + 108\sqrt{\pi}bh^3\sigma + 1320bh^3\sigma^2 + 87\sqrt{\pi}bh^2\sigma(h - x_2)}{4\sqrt{\sigma}} + \\ & + \frac{3bh + 51bh\sigma + 537bh^2\sigma + 21bh\sigma(h - x_2)}{2\sigma} + \\ & + \frac{69\sqrt{\pi}bh + 9\sqrt{\pi}bh^3\sigma + 21\sqrt{\pi}bh\sigma + 2550\sqrt{\pi}bh^2\sigma + 582\sqrt{\pi}bh^4\sigma^2}{\sqrt{\sigma}(4h - x_2)} + \\ & + \frac{354\sqrt{\pi}bh^2 + 12\sqrt{\pi}bh^2(h - x_2) + 3\sqrt{\pi}bh(4h - x_2)^2}{4\sqrt{\sigma}(h - x_2)} + \frac{9\sqrt{\pi}bh^2 + 1164\sqrt{\pi}bh^2\sigma}{4\sqrt{\sigma}(h - x_2)} + \\ & + \frac{90\sqrt{\pi}bh^2}{\sqrt{\sigma}(4h - x_2)^3} + \frac{852\sqrt{\pi}bh + 177\sqrt{\pi}bh^2 + 300\sqrt{\pi}bh^2\sigma + 216\sqrt{\pi}bh^3\sigma + 252\sqrt{\pi}bh^4\sigma^2}{\sqrt{\sigma}(4h - x_2)^2} + \\ & + \frac{12\sqrt{\pi}bh + 501\sqrt{\pi}bh^2}{\sqrt{\sigma}(4h - x_2)^2(h - x_2)} + 36bh\sigma + 180bh^4\sigma + 216bh^3\sigma + 2424bh^2\sigma + 768bh^4\sigma^2 + 48bh^2\sigma^2 + \\ & + 864bh^3\sigma^2 + 60bh\sigma(h - x_2) + 192bh^2\sigma^2(h - x_2) + 54bh^3\sigma(h - x_2) + 486bh^2\sigma(h - x_2) + \\ & + 240bh^3\sigma^2(h - x_2) + 24bh^2\sigma(h - x_2)^2 + 48bh^2\sigma^2(4h - x_2), \end{aligned}$$

и $\varphi(\sigma, h, x_2)$ определяется по формуле (13).

Доказательство. Из интегральной формулы Грина имеем

$$\begin{aligned}
U(x) = & \int_S \left[U(y) \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\
& + \int_T \left[U(y) \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\
& + \int_S \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\
& + \int_T \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right] dS_y. \tag{28}
\end{aligned}$$

Из условия (2) и неравенства (26) вытекает

$$\begin{aligned}
|U(x)| \leq & \left| \int_S \left[f_1(y) \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - f_2(y) \Delta L_\sigma(x, y) \right] dS_y + \right. \\
& + \int_T \left[U(y) \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x, y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\
& + \int_S \left[f_3(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - f_4(y) L_\sigma(x, y) \right] dS_y + \\
& \left. + \int_T \left[\Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - L_\sigma(x, y) \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right] dS_y \right| \leq \delta |U_\sigma(x)| + M \left(\int_T \left| \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right| dS_y + \right. \\
& + \int_T |\Delta L_\sigma(x, y)| dS_y + \int_T \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| dS_y + \int_T |L_\sigma(x, y)| dS_y \Big) \leq \\
& \leq \delta |U_\sigma(x)| + M \varphi(\sigma, h, x_2) e^{-\sigma x_2^2}. \tag{29}
\end{aligned}$$

Здесь использована оценка

$$\begin{aligned}
M \left(\int_T \left| \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right| dS_y + \int_T |\Delta L_\sigma(x, y)| dS_y + \int_T \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| dS_y + \int_T |L_\sigma(x, y)| dS_y \right) \leq \\
\leq M \varphi(\sigma, h, x_2) e^{-\sigma x_2^2},
\end{aligned}$$

которая доказана в теореме 1.

Далее оценим $|U_\sigma(x)|$:

$$|U_\sigma(x)| \leq \int_S \left| \frac{\partial (\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right| dS_y + \int_S |\Delta L_\sigma(x, y)| dS_y + \int_S \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| dS_y + \int_S |L_\sigma(x, y)| dS_y,$$

получим

$$\begin{aligned}
|U_\sigma(x)| \leq & \left[\frac{486\sqrt{\pi}bh\sigma + 60\sqrt{\pi}bh^2\sigma^2 + 342\sqrt{\pi}bh^2\sigma + 336\sqrt{\pi}bh^4\sigma^3}{\sqrt{\sigma}} + \right. \\
& + \frac{18\sqrt{\pi}bh^2 + 170\sqrt{\pi}bh + 288\sqrt{\pi}bh^4\sigma^2 + 108\sqrt{\pi}bh^3\sigma + 1320bh^3\sigma^2 + 87\sqrt{\pi}bh^2\sigma(h - x_2)}{4\sqrt{\sigma}} + \\
& + \frac{3bh + 51bh\sigma + 537bh^2\sigma + 21bh\sigma(h - x_2)}{2\sigma} + \\
& + \frac{69\sqrt{\pi}bh + 9\sqrt{\pi}bh^3\sigma + 21\sqrt{\pi}bh\sigma + 2550\sqrt{\pi}bh^2\sigma + 582\sqrt{\pi}bh^4\sigma^2}{\sqrt{\sigma}(4h - x_2)} + \\
& + \frac{354\sqrt{\pi}bh^2 + 12\sqrt{\pi}bh^2(h - x_2) + 3\sqrt{\pi}bh(4h - x_2)^2}{4\sqrt{\sigma}(h - x_2)} + \frac{9\sqrt{\pi}bh^2 + 1164\sqrt{\pi}bh^2\sigma}{4\sqrt{\sigma}(h - x_2)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{90\sqrt{\pi}bh^2}{\sqrt{\sigma}(4h-x_2)^3} + \frac{852\sqrt{\pi}bh + 177\sqrt{\pi}bh^2 + 300\sqrt{\pi}bh^2\sigma + 216\sqrt{\pi}bh^3\sigma + 252\sqrt{\pi}bh^4\sigma^2}{\sqrt{\sigma}(4h-x_2)^2} + \\
& + \frac{12\sqrt{\pi}bh + 501\sqrt{\pi}bh^2}{\sqrt{\sigma}(4h-x_2)^2(h-x_2)} + 36bh\sigma + 180bh^4\sigma + 216bh^3\sigma + 2424bh^2\sigma + 768bh^4\sigma^2 + 48bh^2\sigma^2 + \\
& + 864bh^3\sigma^2 + 60bh\sigma(h-x_2) + 192bh^2\sigma^2(h-x_2) + 54bh^3\sigma(h-x_2) + 486bh^2\sigma(h-x_2) + \\
& + 240bh^3\sigma^2(h-x_2) + 24bh^2\sigma(h-x_2)^2 + 48bh^2\sigma^2(4h-x_2) \Big] e^{-\sigma(x_2^2-a^2)}.
\end{aligned}$$

Из интегральной формулы (29) и условия (9) вытекает

$$|U(x)| \leq \delta e^{\sigma(a^2-x_2^2)} \psi(\sigma, h, x_2) + M \varphi(\sigma, h, x_2) e^{-\sigma x_2^2} = \Psi(\sigma, h, x_2) \left(M e^{-\sigma x_2^2} + \delta e^{\sigma(a^2-x_2^2)} \right). \quad (30)$$

Наилучшая оценка для функции $|U(x)|$ получается в случае, когда

$$M e^{-\sigma x_2^2} = \delta e^{\sigma(a^2-x_2^2)}$$

или

$$\sigma = \frac{1}{a^2} \ln \frac{M}{\delta}. \quad (31)$$

Подставляя выражение для σ из (31) в (30), получим (27). $\square$

Положим

$$\begin{aligned}
U_{\sigma\delta}(x) &= \int_S \left[f_{1\delta}(y) \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} - f_{2\delta}(y) \Delta L_\sigma(x, y) \right] dS_y + \\
&+ \int_S \left[f_{3\delta}(y) \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} - f_{4\delta}(y) L_\sigma(x, y) \right] dS_y.
\end{aligned} \quad (32)$$

Теорема 3. Пусть функция $U(y) \in E$ на S удовлетворяет условию (2) и вместо функций $f_i(y)$ заданы их приближения $f_{i\delta}(y)$, $i = \overline{1, 4}$, с заданным уклоном $\delta > 0$

$$\max_S |f_i(y) - f_{i\delta}(y)| < \delta.$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедлива оценка

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq \Psi(\sigma, h, x_2) M^{1-\frac{x_2^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_2^2}{a^2}}.$$

Доказательство. Из (28), (32)

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq |I_\sigma(x)| + \delta \int_S \left\{ \left| \frac{\partial(\Delta L_\sigma(x, y))}{\partial n} \right| + |\Delta L_\sigma(x, y)| + \left| \frac{\partial L_\sigma(x, y)}{\partial n} \right| + |L_\sigma(x, y)| \right\} dS_y.$$

Из теорем 1, 2 следует

$$|U(x)| \leq \Psi(\sigma, h, x_2) \left(M e^{-\sigma x_2^2} + \delta e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} \right),$$

и выбирая $\sigma = \frac{1}{a^2} \ln \frac{M}{\delta}$, получим доказательство теоремы. $\square$

Следствие 3. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x).$$

Следствие 4. Если $x \in \bar{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$ сходится равномерно:

$$U_{\sigma\delta}(x) \Rightarrow U(x) \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Аналогично можно получить оценки устойчивости для $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, и верны следующие выводы.

Следствие 5. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Следствие 6. Если $x \in \bar{G}_\varepsilon$, то семейство функций

$$U_{\sigma\delta}(x) \Rightarrow U(x), \quad \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2,$$

сходится равномерно при $\delta \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н. *Об устойчивости обратных задач*, Докл. АН СССР **39** (5), 195–198 (1943).
- [2] Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики* (Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962).
- [3] Мергелян С.Н. *Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа*, Усп. матем. наук **11** (5 (71)), 3–26 (1956).
- [4] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи* (Сиб. научн. изд-во, Новосибирск, 2009).
- [5] Carleman T. *Les fonctions quasi analytiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1926).
- [6] Голузин Г.М., Крылов В.И. *Обобщенная формула Carleman'a и приложение ее к аналитическому продолжению функций*, Матем. сб. **40** (2), 144–149 (1933).
- [7] Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе* (Наука, Новосибирск, 1990).
- [8] Лаврентьев М.М. *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, Изв. АН СССР **20** (6), 819–842 (1956).
- [9] Ярмухамедов Ш. *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук (ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1983).
- [10] Ярмухамедов Ш. *Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши*, Матем. заметки **83** (5), 763–778 (2008).
- [11] Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений* (Гостехиздат, М., Л., 1948).
- [12] Хасанов А.Б., Турсунов Ф.Р. *О задаче Коши для уравнения Лапласа*, Уфимск. матем. журн. **11** (4), 92–106 (2019).
- [13] Хасанов А.Б., Турсунов Ф.Р. *Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа*, Изв. вузов. Матем. (2), 56–73 (2021).
- [14] Shodiyev D.S. *On the Cauchy problem for the biharmonic equation*, Журн. Сиб. фед. ун-та. Сер. Матем. физ. **15** (2), 201–215 (2022).
- [15] Тихомирнов В.В., Очиллов Н.Н. *О регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа*, Дифференц. уравнения, **50** (8), 1133–1137 (2014).
- [16] Фаязов К.С., Хажиев И.О. *Оценка устойчивости и приближенное решение краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка*, Матем. заметки СВФУ **22** (1), 78–88 (2015).

Фарход Рузикулович Турсунов

Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова,
ул. Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,
e-mail: farhod.tursunov.76@mail.ru

Дилшод Сирождинович Шодиев

Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова,
ул. Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,
e-mail: dilshod.shodiev.76@mail.ru

F.R. Tursunov and D.S. Shodiyev

Cauchy problem for the biharmonic equation in an unbounded region

Abstract. The article studies the continuation of the solution of the Cauchy problem for the biharmonic equation in the domain G from its known values on the smooth part S of the boundary ∂G . The considered problem belongs to the problems of mathematical physics, in which there is no continuous dependence of solutions on the initial data. It is assumed that the solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established.

Keywords: Cauchy problem, ill-posed problem, Carleman function, regularized solution, regularization, continuation formula.

Farkhod Ruzikulovich Tursunov

*Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
15 University boulevard str., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: farhod.tursunov.76@mail.ru

Dilshod Sirojiddinovich Shodiyev

*Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
15 University boulevard str., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: dilshod.shodiev.76@mail.ru