

А.Н. МИРОНОВ, Е.Ф. КОСЬКОВА

О ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ И СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Аннотация. Доказаны существование и единственность решения граничной задачи с условиями на двух характеристических плоскостях и на плоскости, не являющейся характеристикой, для системы гиперболических уравнений с кратными характеристиками. Разработан аналог метода Римана–Адамара для указанной задачи, дано определение матрицы Римана–Адамара. Построено решение указанной задачи в терминах введенной матрицы Римана–Адамара.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод Римана, матрица Римана, метод Римана–Адамара, матрица Римана–Адамара, характеристика.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-1-28-36

Граничные задачи для гиперболических систем дифференциальных уравнений представляют значительный интерес как в теоретическом плане, так и в связи с приложениями (см., например, [1]–[18] и библиографию там). В работе [8] предложен вариант метода Римана для систем дифференциальных уравнений как с некротными, так и с кратными характеристиками. В [9], [10] этот вариант метода Римана применяется для исследования задач для системы уравнений с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками. В [19]–[21] в терминах матрицы Римана–Адамара были построены решения задач Дарбу для гиперболических систем с некротными характеристиками, а в [22] было рассмотрено некоторое обобщение задачи Дарбу для системы с двукратными характеристиками с двумя независимыми переменными.

Здесь рассматривается система уравнений с кратными характеристиками с тремя независимыми переменными:

$$\begin{aligned}u_{xx} &= a_1v_x + b_1w_x + c_1u + d_1v + e_1w + f_1(x, y, z), \\v_{yy} &= a_2u_y + b_2w_y + c_2u + d_2v + e_2w + f_2(x, y, z), \\w_{zz} &= a_3u_z + b_3v_z + c_3u + d_3v + e_3w + f_3(x, y, z),\end{aligned}\tag{1}$$

где все коэффициенты зависят от (x, y, z) и в замыкании рассматриваемой области D пространства R^3 удовлетворяют условиям $a_i, b_i \in C^2$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1$, $i = \overline{1, 3}$. Решение системы (1) класса $u, v, w \in C^1(D)$, $u_{xx}, v_{yy}, w_{zz} \in C(D)$ назовем регулярным в D .

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$ (AA_1O_1O), $y = 0$ (AOB), $y = y_0 > 0$ ($A_1O_1B_1$), $z = x$ (OBB_1O_1), $z = z_0 > 0$ (AA_1B_1B) (см. рис. 1). Обозначим через X, Y, T грани D при $x = 0, y = 0, z = x$ соответственно.

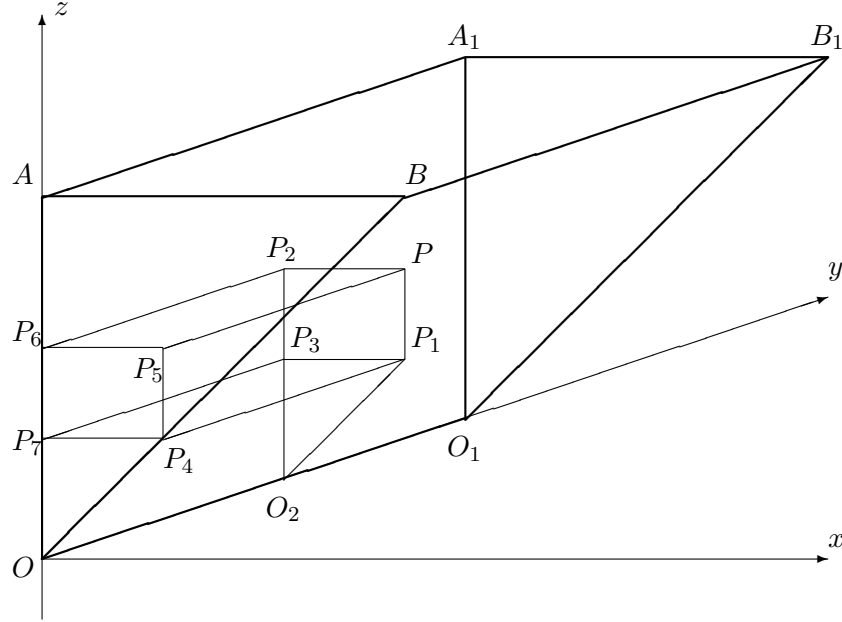


Рис. 1.

Задача PD . Найти в области D регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_X &= \varphi_1(y, z), & (u_x - a_1v - b_1w)|_X &= \varphi_2(y, z), \\ v|_Y &= \psi_1(x, z), & (v_y - a_2u - b_2w)|_Y &= \psi_2(x, z), \\ w|_T &= \chi_1(x, y), & (w_z - a_3u - b_3v)|_T &= \chi_2(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_1(y, z), \varphi_2(y, z) \in C^2(\bar{X})$, $\psi_1(x, z), \psi_2(x, z) \in C^2(\bar{Y})$, $\chi_1(x, y), \chi_2(x, y) \in C^2(\bar{T})$.

Здесь предложен метод построения решения задачи PD , который по аналогии с методом решения задачи Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка естественно назвать методом Римана-Адамара.

Покажем, что решение задачи PD существует и единственно. Обозначим

$$u_1 = u_x - a_1v - b_1w, \quad v_1 = -a_2u + v_y - b_2w, \quad w_1 = -a_3u - b_3v + w_z.$$

Тогда система (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} u_x &= u_1 + a_1v + b_1w, \\ u_{1x} &= c_1u + (d_1 - a_{1x})v + (e_1 - b_{1x})w + f_1, \\ v_y &= a_2u + v_1 + b_2w, \\ v_{1y} &= (c_2 - a_{2y})u + d_2v + (e_2 - b_{2y})w + f_2, \\ w_z &= a_3u + b_3v + w_1, \\ w_{1z} &= (c_3 - a_{3z})u + (d_3 - b_{3z})v + e_3w + f_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (1) с условиями (2) эквивалентна системе (3) с условиями

$$\begin{aligned} u|_X &= \varphi_1(y, z), & u_1|_X &= \varphi_2(y, z), \\ v|_Y &= \psi_1(x, z), & v_1|_Y &= \psi_2(x, z), \\ w|_T &= \chi_1(x, y), & w_1|_T &= \chi_2(x, y). \end{aligned}$$

Обозначим $d_{10} = d_1 - a_{1x}$, $e_{10} = e_1 - b_{1x}$, $c_{20} = c_2 - a_{2y}$, $e_{20} = e_2 - b_{2y}$, $c_{30} = c_3 - a_{3z}$, $d_{30} = d_3 - b_{3z}$. Очевидно, что система (3) с условиями (2) равносильна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \varphi_1(y, z) + \int_{x_0}^x (u_1 + a_1 v + b_1 w)(\alpha, y, z) d\alpha, \\
 u_1(x, y, z) &= \varphi_2(y, z) + \int_{x_0}^x (c_1 u + d_{10} v + e_{10} w + f_1)(\alpha, y, z) d\alpha, \\
 v(x, y, z) &= \psi_1(x, z) + \int_{y_0}^y (v_1 + a_2 u + b_2 w)(x, \beta, z) d\beta, \\
 v_1(x, y, z) &= \psi_2(x, z) + \int_{y_0}^y (c_{20} u + d_2 v + e_{20} w + f_2)(x, \beta, z) d\beta, \\
 w(x, y, z) &= \chi_1(x, y) + \int_x^z (w_1 + a_3 u + b_3 v)(x, y, \gamma) d\gamma, \\
 w_1(x, y, z) &= \chi_2(x, y) + \int_x^z (c_{30} u + d_{30} v + e_3 w + f_3)(x, y, \gamma) d\gamma.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Ясно, что система интегральных уравнений Вольтерра (4) имеет единственное решение в классе непрерывных функций.

Из сказанного выше следует справедливость следующего утверждения.

Теорема. Если в замыкании области D выполняются включения $a_i, b_i \in C^2$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1$, $i = \overline{1, 3}$, то регулярное решение задачи PD (1), (2) существует и единственно.

Следуя работе [8], представим систему (3) в матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_x + \mathbf{A}_2 \mathbf{U}_y + \mathbf{A}_3 \mathbf{U}_z - \mathbf{B} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{colon}(u, u_1, v, v_1, w, w_1),$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{A}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ c_1 & 0 & d_{10} & 0 & e_{10} & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 & b_2 & 0 \\ c_{20} & 0 & d_2 & 0 & e_{20} & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 1 \\ c_{30} & 0 & d_{30} & 0 & e_3 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \text{colon}(0, f_1, 0, f_2, 0, f_3).$$

Матрица Римана имеет вид $\mathbf{R} = \text{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_5, \mathbf{R}_6)$, где $\mathbf{R}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}, r_{i5}, r_{i6})$, $i = \overline{1, 6}$, являются решениями систем

$$\begin{aligned}
 r_{i1}(x, y, z) &= \delta_{i1} - \int_{\xi}^x (c_1 r_{i2} + a_2 r_{i3} + c_{20} r_{i4} + a_3 r_{i5} + c_{30} r_{i6})(\alpha, y, z) d\alpha, \\
 r_{i2}(x, y, z) &= \delta_{i2} - \int_{\xi}^x r_{i1}(\alpha, y, z) d\alpha, \\
 r_{i3}(x, y, z) &= \delta_{i3} - \int_{\eta}^y (a_1 r_{i1} + d_{10} r_{i2} + d_2 r_{i4} + b_3 r_{i5} + d_{30} r_{i6})(x, \beta, z) d\beta, \\
 r_{i4}(x, y, z) &= \delta_{i4} - \int_{\eta}^y r_{i3}(x, \beta, z) d\beta, \\
 r_{i5}(x, y, z) &= \delta_{i5} - \int_{\zeta}^z (b_1 r_{i1} + e_{10} r_{i2} + b_2 r_{i3} + e_{20} r_{i4} + e_3 r_{i6})(x, y, \gamma) d\gamma, \\
 r_{i6}(x, y, z) &= \delta_{i6} - \int_{\zeta}^z r_{i5}(x, y, \gamma) d\gamma,
 \end{aligned} \tag{5}$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Решения систем (5) существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первой тройке аргументов (x, y, z) матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (5) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -(\mathbf{VA}_1)_x - (\mathbf{VA}_2)_y - (\mathbf{VA}_3)_z - \mathbf{VB}.$$

Возьмем внутри области D произвольную точку $P(\xi, \eta, \zeta)$. Она определяет область $D_P = O_2 P_1 P P_2 O P_4 P_5 P_6$ (см. рис. 1), которая состоит из двух частей: параллелепипеда $D_1 = P_1 P P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7$ и призмы $D_2 = O_2 P_1 P_3 O P_4 P_7$.

Определим матрицу Римана-Адамара $\mathbf{H}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, $\mathbf{H} = (h_{ij})$, для задачи PD . Пусть

$$\mathbf{H}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \mathbf{R}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_1; \\ \mathbf{Q}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta), & (x, y, z) \in D_2, \end{cases} \tag{6}$$

где $\mathbf{R}$ — определенная выше матрица Римана, а матрица $\mathbf{Q} = \text{colon}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_6)$, где векторы $\mathbf{Q}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i5}, q_{i6})$, $i = \overline{1, 6}$, нужно доопределить в области D_2 .

Область D_2 ограничена характеристиками $x = 0$, $y = 0$, $y = \eta$ и нехарактеристическими плоскостями $z = x$, $z = \xi$. Она подобна области D , в которой ищем решение задачи PD . Определим каждый из векторов $\mathbf{Q}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i5}, q_{i6})$ как решение задачи PD в области D_2 для системы (3) с условиями на плоскости $z = x$ для q_{i1} и q_{i2} , на плоскости $y = \eta$ для q_{i3} и q_{i4} , на плоскости $z = \xi$ для q_{i5} и q_{i6} . Как уже доказано выше, решение такой задачи существует и единственно.

Потребуем, чтобы $\mathbf{Q}_i$, $i = \overline{1, 6}$, были решениями задачи PD в области D_2 для системы (3) с условиями

$$\begin{aligned} q_{i1}(z, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= 0, & q_{i2}(z, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= 0, \\ q_{i3}(x, \eta, z, \xi, \eta, \zeta) &= 0, & q_{i4}(x, \eta, z, \xi, \eta, \zeta) &= 0, \\ q_{i5}(x, y, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta) &= r_{i5}(x, y, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta), \\ q_{i6}(x, y, \xi - 0, \xi, \eta, \zeta) &= r_{i6}(x, y, \xi + 0, \xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \quad (7)$$

Векторы $\mathbf{Q}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, $i = \overline{1, 6}$, однозначно определяются. Ясно, что тогда и матрица Римана–Адамара существует и единственна.

Справедливо тождество

$$\mathbf{R}\mathbf{L}(\mathbf{U}) = (\mathbf{H}\mathbf{A}_1\mathbf{U})_x + (\mathbf{H}\mathbf{A}_2\mathbf{U})_y + (\mathbf{H}\mathbf{A}_3\mathbf{U})_z, \quad (8)$$

которое можно проверить непосредственным вычислением.

Проинтегрируем первую строку тождества (8) по области D_1 (она определяется неравенствами $0 < x < \xi$, $0 < y < \eta$, $\xi < z < \zeta$):

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta \int_\xi^\zeta (r_{11}u + r_{12}u_1)(\xi, \beta, \gamma) d\gamma d\beta - \int_0^\eta \int_\xi^\zeta (r_{11}u + r_{12}u_1)(0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \\ & + \int_0^\xi \int_\xi^\zeta (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, \eta, \gamma) d\gamma d\alpha - \int_0^\xi \int_\xi^\zeta (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, 0, \gamma) d\gamma d\alpha + \\ & + \int_0^\xi \int_0^\eta (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, \zeta) d\beta d\alpha - \int_0^\xi \int_0^\eta (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, \xi) d\beta d\alpha = \\ & = \int_0^\xi \int_0^\eta \int_\xi^\zeta (r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3)(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь у r_{ij} , указана только первая тройка аргументов, вторая всегда есть (ξ, η, ζ) .

В (9) в силу (5) выполняются тождества

$$\begin{aligned} r_{11}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) &\equiv 1, & r_{12}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) &\equiv r_{13}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) \equiv \\ &\equiv r_{14}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) \equiv r_{15}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv r_{16}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv 0. \end{aligned}$$

Затем интегрируем третью и пятую строки:

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta \int_\xi^\zeta (r_{i1}u + r_{i2}u_1)(\xi, \beta, \gamma) d\gamma d\beta - \int_0^\eta \int_\xi^\zeta (r_{i1}u + r_{i2}u_1)(0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \\ & + \int_0^\xi \int_\xi^\zeta (r_{i3}v + r_{i4}v_1)(\alpha, \eta, \gamma) d\gamma d\alpha - \int_0^\xi \int_\xi^\zeta (r_{i3}v + r_{i4}v_1)(\alpha, 0, \gamma) d\gamma d\alpha + \\ & + \int_0^\xi \int_0^\eta (r_{i5}w + r_{i6}w_1)(\alpha, \beta, \zeta) d\beta d\alpha - \int_0^\xi \int_0^\eta (r_{i5}w + r_{i6}w_1)(\alpha, \beta, \xi) d\beta d\alpha = \\ & = \int_0^\xi \int_0^\eta \int_\xi^\zeta (r_{i2}f_1 + r_{i4}f_2 + r_{i6}f_3)(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha, \quad i = 3, 5. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь снова у r_{ij} указана только первая тройка аргументов, вторая всегда есть (ξ, η, ζ) . При этом выполняются тождества

$$\begin{aligned} r_{33}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) &\equiv 1, & r_{31}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) &\equiv r_{32}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) \equiv \\ &\equiv r_{34}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) \equiv r_{35}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv r_{36}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv 0, \\ r_{55}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) &\equiv 1, & r_{51}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) &\equiv r_{52}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) \equiv \\ &\equiv r_{53}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) \equiv r_{54}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) \equiv r_{56}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv 0. \end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем (8) по области D_2 . Очевидно, область D_2 может быть задана двумя системами неравенств:

- 1) $0 < x < \xi$, $0 < y < \eta$, $x < z < \xi$;
- 2) $0 < x < z$, $0 < y < \eta$, $0 < z < \xi$.

Из первой строки матрицы получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta d\beta \int_0^\xi d\gamma \int_0^\gamma (q_{11}u + q_{12}u_1)_x(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha + \int_0^\xi d\gamma \int_0^\gamma d\alpha \int_0^\eta (q_{13}v + q_{14}v_1)_y(\alpha, \beta, \gamma) d\beta + \\ & + \int_0^\eta d\beta \int_0^\xi d\alpha \int_\alpha^\xi (q_{15}w + q_{16}w_1)_z(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma = \\ & = \iiint_{D_2} (q_{12}f_1 + q_{14}f_2 + q_{16}f_3)(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta d\beta \int_0^\xi ((q_{11}u + q_{12}u_1)(\gamma, \beta, \gamma) - (q_{11}u + q_{12}u_1)(0, \beta, \gamma)) d\gamma + \\ & + \int_0^\xi d\gamma \int_0^z ((q_{13}v + q_{14}v_1)(\alpha, \eta, \gamma) - (q_{13}v + q_{14}v_1)(\alpha, 0, \gamma)) d\alpha + \\ & + \int_0^\eta d\beta \int_0^\xi ((q_{15}w + q_{16}w_1)(\alpha, \beta, \xi) - (q_{15}w + q_{16}w_1)(\alpha, \beta, \alpha)) d\alpha = \\ & = \iiint_{D_2} (q_{12}f_1 + q_{14}f_2 + q_{16}f_3)(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу (7) здесь выполняются тождества

$$q_{11}(\gamma, \beta, \gamma) \equiv q_{12}(\gamma, \beta, \gamma) \equiv q_{13}(\alpha, \eta, \gamma) \equiv q_{14}(\alpha, \eta, \gamma) \equiv 0.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta d\beta \int_0^\xi ((q_{i1}u + q_{i2}u_1)(\gamma, \beta, \gamma) - (q_{i1}u + q_{i2}u_1)(0, \beta, \gamma)) d\gamma + \\ & + \int_0^\xi d\gamma \int_0^z ((q_{i3}v + q_{i4}v_1)(\alpha, \eta, \gamma) - (q_{i3}v + q_{i4}v_1)(\alpha, 0, \gamma)) d\alpha + \\ & + \int_0^\eta d\beta \int_0^\xi ((q_{i5}w + q_{i6}w_1)(\alpha, \beta, \xi) - (q_{i5}w + q_{i6}w_1)(\alpha, \beta, \alpha)) d\alpha = \\ & = \iiint_{D_2} (q_{i2}f_1 + q_{i4}f_2 + q_{i6}f_3)(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma, \quad i = 3, 5. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь в силу (7)

$$q_{i1}(\gamma, \beta, \gamma) \equiv q_{i2}(\gamma, \beta, \gamma) \equiv q_{i3}(\alpha, \eta, \gamma) \equiv q_{i4}(\alpha, \eta, \gamma) \equiv 0, \quad i = 3, 5.$$

Складывая формулы (9) и (11), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta \int_\xi^\zeta u(\xi, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \int_0^\eta \int_0^\zeta ((q_{15} - r_{15})w + (q_{16} - r_{16})w_1)(\alpha, \beta, \xi) d\alpha d\beta = \\ & = \int_0^\eta \int_\xi^\zeta (r_{11}u + r_{12}u_1)(0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \int_0^\xi \int_\xi^\zeta (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, 0, \gamma) d\gamma d\alpha + \\ & + \int_0^\eta \int_0^\xi (q_{11}u + q_{12}u_1)(0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \int_0^\xi \int_0^z (q_{13}v + q_{14}v_1)(\alpha, 0, \gamma) d\alpha d\gamma + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\xi \int_0^\eta (q_{15}w + q_{16}w_1)(\alpha, \beta, \alpha) d\beta d\alpha + \iiint_D (h_{12}f_1 + h_{14}f_2 + h_{16}f_3)(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha. \quad (13)$$

Второе слагаемое в левой части (13) обращается в нуль в силу (7).

Обозначим грани D_1 и D_2 при $z = x$ через S , при $x = 0$ — через X_1 и X_2 , а при $y = 0$ — через Y_1 и Y_2 соответственно. Перепишем формулу (13) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \int_\xi^\zeta u(\xi, \beta, \gamma) d\gamma d\beta &= \iint_{X_1+X_2} (h_{11}u + h_{12}u_1) d\gamma d\beta + \iint_{Y_1+Y_2} (h_{13}v + h_{14}v_1) d\gamma d\alpha + \\ &+ \iint_S (h_{15}w + h_{16}w_1) d\beta d\alpha + \iiint_{D_P} (h_{12}f_1 + h_{14}f_2 + h_{16}f_3) d\gamma d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим правую часть (14) через $F_1(\xi, \eta, \zeta)$. Очевидно, что $F_1(\xi, \eta, \zeta)$ может считаться известной функцией, так как выражается через H и данные задачи Дарбу. Дифференцируя (14), получим

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 F_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta \partial \zeta}.$$

Аналогично, складывая (10) и (12), находим

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \int_\eta^\zeta v(\alpha, \eta, \gamma) d\gamma d\alpha &= \iint_{X_1+X_2} (h_{31}u + h_{32}u_1) d\gamma d\beta + \iint_{Y_1+Y_2} (h_{33}v + h_{34}v_1) d\gamma d\alpha + \\ &+ \iint_S (h_{35}w + h_{36}w_1) d\beta d\alpha + \iiint_{D_P} (h_{32}f_1 + h_{34}f_2 + h_{36}f_3) d\gamma d\beta d\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \int_0^\eta w(\alpha, \beta, \zeta) d\beta d\alpha &= \iint_{X_1+X_2} (h_{51}u + h_{52}u_1) d\gamma d\beta + \iint_{Y_1+Y_2} (h_{53}v + h_{54}v_1) d\gamma d\alpha + \\ &+ \iint_S (h_{55}w + h_{56}w_1) d\beta d\alpha + \iiint_{D_P} (h_{52}f_1 + h_{54}f_2 + h_{56}f_3) d\gamma d\beta d\alpha, \end{aligned} \quad (16)$$

откуда дифференцированием получаем

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 F_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 F_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (17)$$

где $F_2(\xi, \eta, \zeta)$ и $F_3(\xi, \eta, \zeta)$ — известные правые части (15), (16), выражающиеся через матрицу H и данные задачи Дарбу.

Формулы (14) и (17) представляют собой решение задачи PD в терминах матрицы Римана–Адамара H .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бицадзе А.В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка*, Матем. моделирование **6** (6), 22–31 (1994).
- [2] Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными*, Дифференц. уравнения, **18** (9), 1614–1622 (1982).
- [3] Чекмарев Т.В. *Системы уравнений смешанного типа* (НГТУ, Нижний Новгород, 1995).
- [4] Плещинская И.Е. *Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными*, Дифференц. уравнения, **23** (9), 1634–1637 (1987).
- [5] Романовский Р.К. *О матрицах Римана первого и второго рода*, Матем. сб. **127** (**169**) (4(8)), 494–501 (1985).
- [6] Романовский Р.К. *Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными*, Матем. сб. **133** (**175**) (3(7)), 341–355 (1987).

- [7] Воробьева Е.В., Романовский Р.К. *Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости*, Сиб. матем. журн. **41** (3), 531–540 (2000).
- [8] Миронова Л.Б. *О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками*, Изв. вузов. Матем. (1), 34–39 (2006).
- [9] Миронова Л.Б. *О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными*, Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та, Сер. физ.-матем. науки. **43**, 31–37 (2006).
- [10] Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными*, Изв. вузов. Матем. (3), 12–21 (2007).
- [11] Романовский Р.К., Мендзив М.В. *Устойчивость решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости с периодическими по времени коэффициентами*, Сиб. матем. журн. **48** (5), 1134–1141 (2007).
- [12] Жегалов В.И. *Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений*, Изв. вузов. Матем. (8), 70–72 (2008).
- [13] Воронова А.Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа*, Уфимск. матем. журн. **2** (2), 20–26 (2010).
- [14] Жибер А.В., Костригина О.С. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка*, Уфимск. матем. журн. **3** (3), 67–79 (2011).
- [15] Созонтова Е.А. *О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа*, Изв. вузов. Матем. (10), 43–54 (2013).
- [16] Романовский Р.К., Медведев Ю.А. *Оптимальное двустороннее граничное управление теплопереносом в стержне. Гиперболическая модель*, Изв. вузов. Матем. (6), 54–60 (2016).
- [17] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некротными характеристиками*, Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та, Сер. физ.-матем. науки. **21** (4), 752–759 (2017).
- [18] Миронов А.Н., Миронова Л.Б., Яковлева Ю.О. *Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной*, Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та, Сер. физ.-матем. науки. **25** (2), 207–240 (2021).
- [19] Mironova L.B. *Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations*, Lobachevskii J. Math. **41** (3), 400–406 (2020).
- [20] Миронов А.Н., Миронова Л.Б. *Метод Римана–Адамара для одной системы в трехмерном пространстве*, Дифференц. уравнения, **57** (8), 1063–1070 (2021).
- [21] Миронов А.Н., Миронова Л.Б. *К задаче Дарбу для гиперболических систем*, Дифференц. уравнения, **59** (5), 642–651 (2023).
- [22] Миронов А.Н., Волков А.П. *О задаче типа Дарбу для гиперболической системы уравнений с кратными характеристиками*, Изв. вузов. Матем. (8), 39–45 (2022).

Алексей Николаевич Миронов

Елабужский институт Казанского федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423600, Россия;

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия,

e-mail: lbmironova@yandex.ru

Евдокия Фанилевна Коськова

Елабужский институт Казанского федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423600, Россия,

e-mail: evochka02202@gmail.com

A.N. Mironov and E.F. Kos'kova

On a problem with conditions on characteristics and free surface for a hyperbolic system of equations with three independent variables with two-fold characteristics

Abstract. The existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem with conditions on two characteristic planes and on a plane that is not a characteristic for a system of hyperbolic equations with multiple characteristics are proved. An analogue of the Riemann–Hadamard method is developed for this problem, the definition of the Riemann–Hadamard matrix is given. The solution of this problem is constructed in terms of the introduced Riemann–Hadamard matrix.

Keywords: hyperbolic system, Riemann method, Riemann matrix, Riemann–Hadamard method, Riemann–Hadamard matrix, characteristics.

Alexei Nikolaevich Mironov

*Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia;
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100 Russia,*

e-mail: lbmironova@yandex.ru

Evdokia Fanilevna Kos'kova

*Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia,*

e-mail: evochka02202@gmail.com