

Р.ГУЕФАЙФИЯ, Т.БОУАЛИ, С.Х.РАСОУЛИ

НОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КЛАССА ДРОБНЫХ СИСТЕМ ТИПА КИРХГОФА С НЕСКОЛЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация. Статья посвящена вопросу о существовании положительных слабых решений для класса дробных систем типа Кирхгофа с несколькими параметрами. С помощью метода под- и надрешений и некоторых аналитических техник мы доказываем новый результат о существовании. Насколько нам известно, наши результаты являются новыми в исследовании дробных систем типа Кирхгофа.

Ключевые слова: дробная система типа Кирхгофа, положительное решение, под- и надрешения, несколько параметров.

УДК: 517.927

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-1-15-27

ВВЕДЕНИЕ

Исследуем дробные системы типа Кирхгофа вида

$$\begin{aligned} A \left(\|\xi\|^2 \right) (-\Delta)^s \xi &= \lambda_1 \alpha(x) f(\eta) + \mu_1 \beta(x) h(\xi) \quad \text{в } \Omega, \\ B \left(\|\eta\|^2 \right) (-\Delta)^s \eta &= \lambda_2 \gamma(x) g(\xi) + \mu_2 \zeta(x) k(\eta) \quad \text{в } \Omega, \\ \xi = \eta &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\|\xi\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\xi(x) - \xi(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ — положительные параметры и $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{1,1}$ для $N \geq 2$. Здесь $A, B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ являются непрерывными функциями с дополнительными условиями, которые будут заданы позже, и $\alpha, \beta, \gamma, \zeta \in C(\bar{\Omega})$. Для заданного $s \in (0, 1)$ через $(-\Delta)^s$ обозначим оператор дробного лапласиана, заданный формулой

$$(-\Delta)^s \xi(x) := C_{N,s} \, P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\xi(x) - \xi(y)}{|x - y|^{N+2s}} dy,$$

где $C_{N,s} := s 2^{2s} \pi^{-\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N+2s}{2}\right) / \Gamma(1-s)$ — положительная нормализующая константа, Γ — стандартная гамма-функция, а $P.V.$ обозначает главное значение по Коши для сингулярного интеграла. Нелинейности f, g, h и $k : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функции Каратеодори. Поскольку

Поступила в редакцию 21.01.2024, после доработки 14.02.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

первое уравнение в (1) при $s = 1$ содержит интеграл по области Ω , оно больше не является тождеством в каждой точке; поэтому его часто называют нелокальной задачей. Эта задача моделирует несколько физических и биологических систем, где ξ описывает процесс, зависящий от своего собственного среднего (например, плотность населения), [1]. Более того, задача (1) связана со стационарной версией уравнения Кирхгофа

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

представленного Г.Р. Кирхгофом в 1883 г. [2]. Это уравнение является расширением классического волнового уравнения Даламбера с учетом влияния изменений длины струны во время колебаний. Параметры в (2) имеют следующие значения: L — длина струны, h — площадь поперечного сечения, E — модуль Юнга материала, ρ — плотность массы, а P_0 — начальное натяжение.

В последние годы большое внимание уделяется исследованию задач, связанных с дробными и нелокальными операторами эллиптического типа. Эта категория операторов возникает весьма естественным образом во многих различных приложениях, таких как явления фазового перехода, механика сплошных сред, популяционная динамика, минимальные поверхности и теория игр, так как они являются типичным результатом стохастической стабилизации процессов Леви [3], [4]. Более того, исследование дробных систем типа Кирхгофа представляет собой перспективную область исследований, в которую внесли свой вклад многие математики. Кроме того, такого рода задачи возникают во многих физических явлениях, таких как законы сохранения, ультраматериалы и волны в воде, оптимизация, популяционная динамика, мягкие тонкие пленки, финансовая математика, фазовые переходы, стратифицированные материалы, аномальная диффузия, дислокации в кристаллах, полупроницаемые мембраны, распространение пламени, ультра-релятивистские пределы квантовой механики.

В литературе уже изучалась локальная версия системы (1) без весовых функций, а именно, когда $A, B \equiv 1$, $s = 1$ и $\alpha, \beta, \gamma, \zeta \equiv 1$, заданная следующим образом:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \alpha_1 f(v) + \beta_1 h(u), & x \in \Omega; \\ -\Delta v &= \alpha_2 g(u) + \beta_2 k(v), & x \in \Omega; \\ u &= v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

В частности, ссылаемся на работы [5], [6], где авторы доказали существование положительных решений в случае, когда оператор Лапласа заменяется на p -лапласиан. В [7], [8] это исследование было расширено на классы систем с гораздо более сильной связью вида

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u, v), & x \in \Omega; \\ -\Delta_q v &= \lambda g(u, v), & x \in \Omega; \\ u &= v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Через некоторое время результаты из [7] были улучшены в [9] для следующей системы типа Кирхгофа:

$$\begin{aligned} -M_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right) \Delta_p u &= \lambda a(x) f(u, v), & x \in \Omega; \\ -M_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^q dx \right) \Delta_q v &= \lambda b(x) g(u, v), & x \in \Omega; \\ u &= v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Методом под- и надрешений Н.Т. Чунг [9] доказал существование большого положительного решения для большого λ . В недавней работе [10] автор расширил результаты [5], [6] на

эллиптические системы с несколькими параметрами и нелинейными краевыми условиями. В работе [11] исследования [7], [8] были расширены на обобщенные эллиптические системы, включающие $(p_1, \dots, p_m)$ -лапласиан с нулевым условием Дирихле на ограниченной области.

Как хорошо известно, метод под- и надрешений является очень эффективным инструментом для решения вопросов существования решений нелинейных задач [6], [11]–[14]. Однако существует мало результатов по краевым задачам для проблем с дробным лапласианом с использованием метода под- и надрешений, и нет работы, посвященной результатам существования положительных решений дробных систем типа Кирхгофа с помощью метода под- и надрешений. В [15], используя метод под- и надрешений, авторы рассмотрели существование положительных слабых решений для класса нелинейных проблем с дробным лапласианом, удовлетворяющих однородному условию Дирихле вне ограниченной области. Они также предоставили численные диаграммы бифуркаций и профиль положительных решений, соответствующие теоретическим результатам, используя метод конечных элементов в одном измерении. Полагаясь на работы [9], [15], продолжаем исследование существования положительных решений системы (1) с использованием метода под- и надрешений и заполняем соответствующий пробел в литературе.

В разделе 1 вспомним некоторые свойства дробных пространств Соболева, а в разделе 2 сформулируем и докажем наши результаты.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Сначала рассмотрим некоторые свойства дробных соболевских пространств [16], [17]. Пусть

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ \xi \in L^2(\mathbb{R}^N) : \|\xi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} < +\infty \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} &:= \left(\|\xi\|_{L^s(\mathbb{R}^N)}^2 + [\xi]_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 \right), \\ [\xi]_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 &:= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\xi(x) - \xi(y)|}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

— полунорма Гальярдо элемента ξ . Дробное соболевское пространство $H^s(\mathbb{R}^N)$ является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению

$$\langle \xi, \eta \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} \xi \eta dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\xi(x) - \xi(y))(\eta(x) - \eta(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy. \quad (3)$$

Кроме того, дробное соболевское пространство

$$H_0^s(\Omega) := \left\{ \xi \in H^s(\mathbb{R}^N) : \xi = 0 \text{ п. в. в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\}$$

является гильбертовым пространством также по отношению к скалярному произведению

$$\langle \xi, \eta \rangle_{H_0^s(\Omega)} := \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\xi(x) - \xi(y))(\eta(x) - \eta(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \quad (4)$$

с соответствующей нормой

$$\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\xi(x) - \xi(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} := \left\| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \xi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Нормы, порожденные (3) и (4), эквивалентны в $H_0^s(\Omega)$. Это следует из ([16], леммы 1.28, 1.29) для $N \geq 2$ и из ([16], лемма 8.1) для $N = 1$, $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Используем этот важный факт в нашем анализе. Для упрощения записи будем использовать обозначение

$$\mathcal{L}(\psi, \varphi) := \frac{C_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\psi(x) - \psi(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+2s}} dx dy.$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ

Лемма 1. Пусть $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — непрерывная и невозрастающая функция, удовлетворяющая условию

$$M(s) > t_0 \text{ для всех } s \geq s_0,$$

где t_0 — положительная константа. Пусть также ξ, η — две неотрицательные функции такие, что

$$M(\|\xi\|^2) (-\Delta)^s \xi \leq M(\|\eta\|^2) (-\Delta)^s \eta \text{ в } \Omega,$$

$$\xi = \eta = 0 \text{ в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega.$$

Тогда $\xi \leq \eta$ п. в. в Ω .

Доказательство. Предположим, что функция $H(t) = tM(t^2)$, $t \geq 0$, возрастает на $\mathbb{R}^+$.

Умножая обе части неравенства на ξ и η и интегрируя, получаем

$$M(\|\xi\|^2) \|\xi\|^2 \leq M(\|\eta\|^2) \langle \eta, \xi \rangle_{H_0^s(\Omega)},$$

$$M(\|\xi\|^2) \langle \eta, \xi \rangle_{H_0^s(\Omega)} \leq M(\|\eta\|^2) \|\eta\|^2.$$

Из этих неравенств имеем

$$\frac{M(\|\xi\|^2) \|\xi\|^2}{M(\|\eta\|^2)} \leq \frac{M(\|\eta\|^2) \|\eta\|^2}{M(\|\xi\|^2)},$$

откуда

$$M(\|\xi\|^2) \|\xi\| \leq M(\|\eta\|^2) \|\eta\|,$$

т. е.

$$H(\|\xi\|^2) \geq H(\|\eta\|^2).$$

Поскольку H возрастает, $\|\xi\| \leq \|\eta\|$, то

$$M(\|\xi\|^2) \leq M(\|\eta\|^2).$$

С другой стороны, применяя принцип максимума, получаем

$$M(\|\xi\|^2) \xi \leq M(\|\eta\|^2) \eta.$$

Откуда $\xi \leq \eta$. □

Лемма 2. Для любого $\nu \in [1, 2_s^*]$ вложение $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^\nu(\Omega)$ является непрерывным, и для всех $\xi \in H_0^s(\Omega)$ имеем

$$\|\xi\|_\nu \leq S(N, s) |\Omega|^{\frac{2_s^* - \nu}{2_s^* \cdot \nu}} \|\xi\|,$$

$$\text{где } 2_s^* = \frac{2N}{N-2s},$$

$$S(N, s) := \max_{\xi \in H^s(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\|\xi\|_{2_s^*}}{[\xi]} := \frac{s^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{N-2s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(N)^{\frac{s}{N}}}{2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{N+2s}{4}} \Gamma(1-2s)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{s}{N}}}.$$

В данной статье мы делаем следующие предположения:

(H1) $A, B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — две непрерывные и возрастающие функции, и существуют $a_i, b_i > 0$, $i = 1, 2$, такие, что

$$a_1 \leq A(t) \leq a_2, \quad b_1 \leq B(t) \leq b_2 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}^+;$$

(H2) $\alpha, \beta, \gamma, \zeta \in C(\overline{\Omega})$ и

$$\alpha(x) \geq \alpha_0, \quad \beta(x) \geq \beta_0, \quad \gamma(x) \geq \gamma_0, \quad \zeta(x) \geq \zeta_0 > 0;$$

(H3) f, g, h и k — непрерывные на $[0, +\infty[$ и возрастающие функции такие, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = +\infty;$$

(H4)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(K(g(t)))}{t} = 0 \quad \text{для всех } K > 0;$$

(H5)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k(t)}{t} = 0.$$

Определение 1. Скажем, что $(\xi, \eta) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$ — слабое решение системы (1), если оно удовлетворяет условиям

$$A\left(\|\xi\|^2\right) \mathcal{L}(\xi, \varphi) = \lambda_1 \int_{\Omega} \alpha(x) f(\eta) \varphi dx + \mu_1 \int_{\Omega} \beta(x) h(\xi) \varphi dx \quad \text{в } \Omega,$$

$$B\left(\|\eta\|^2\right) \mathcal{L}(\eta, \psi) = \lambda_2 \int_{\Omega} \gamma(x) g(\xi) \psi dx + \mu_2 \int_{\Omega} \zeta(x) k(\eta) \psi dx \quad \text{в } \Omega$$

для всех $(\varphi, \psi) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$.

Определение 2. Скажем, что $(\xi, \eta) \in (H^s(\mathbb{R}^N) \times H^s(\mathbb{R}^N))$ — слабое подрешение системы (1), если оно удовлетворяет условиям

$$A\left(\|\underline{\xi}\|^2\right) \mathcal{L}(\underline{\xi}, \varphi) \leq \lambda_1 \int_{\Omega} \alpha(x) f(\eta) \varphi dx + \mu_1 \int_{\Omega} \beta(x) h(\xi) \varphi dx \quad \text{в } \Omega,$$

$$B\left(\|\underline{\eta}\|^2\right) \mathcal{L}(\underline{\eta}, \psi) \leq \lambda_2 \int_{\Omega} \gamma(x) g(\xi) \psi dx + \mu_2 \int_{\Omega} \zeta(x) k(\eta) \psi dx \quad \text{в } \Omega$$

для всех $(\varphi, \psi) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$.

Определение 3. Скажем, что $(\xi, \eta) \in (H^s(\mathbb{R}^N) \times H^s(\mathbb{R}^N))$ — слабое надрешение системы (1), если оно удовлетворяет условиям

$$A \left(\|\bar{\xi}\|^2 \right) \mathcal{L}(\bar{\xi}, \varphi) \geq \lambda_1 \int_{\Omega} \alpha(x) f(\eta) \varphi dx + \mu_1 \int_{\Omega} \beta(x) h(\xi) \varphi dx \quad \text{в } \Omega,$$

$$B \left(\|\bar{\eta}\|^2 \right) \mathcal{L}(\bar{\eta}, \psi) \geq \lambda_2 \int_{\Omega} \gamma(x) g(\xi) \psi dx + \mu_2 \int_{\Omega} \zeta(x) k(\eta) \psi dx \quad \text{в } \Omega$$

для всех $(\varphi, \psi) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$.

Теперь сформулируем общий результат о под- и надрешениях без предположения монотонности для задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s \xi &= g(x, \xi) \quad \text{в } \Omega, \\ \xi &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, удовлетворяющая следующим предположениям:

(h1) для любого $r > 0$ существует элемент $a_r \in L^\infty(\Omega)$ такой, что $|g(x, t)| \leq a_r$ для всех $|t| \leq r$ и для п. в. $x \in \Omega$;

(h2) для любого $r > 0$ существует непрерывная и неубывающая функция b_r такая, что $b_r(0) = 0$ и $|g(x, t_1) - g(x, t_2)| \leq b_r |t_1 - t_2|$ для всех $|t_1|, |t_2| \leq r$ и для п. в. $x \in \Omega$.

Теорема 1 ([15]). *Предположим, что выполнены условия (h1) и (h2). Пусть $\underline{\xi}$ и $\bar{\xi} \in H^s(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega)$ — соответственно слабое подрешение и слабое надрешение задачи (5), удовлетворяющие неравенству $\underline{\xi} \leq \bar{\xi}$ для п. в. $x \in \Omega$. Тогда существует слабое решение задачи (5), удовлетворяющее условию $\underline{\xi} \leq \xi \leq \bar{\xi}$ для п. в. $x \in \Omega$.*

Для системы (1) верно следующее: если существуют подрешения $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ и надрешения $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ такие, что $(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \leq (\bar{\xi}, \bar{\eta})$ на Ω , то эта система имеет, по крайней мере, одно решение (ξ, η) , удовлетворяющее условию $(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \leq (\xi, \eta) \leq (\bar{\xi}, \bar{\eta})$ на Ω .

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия (H1)–(H5). Тогда для больших $\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0$ и $\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0$ задача (1) имеет положительное слабое решение.*

Доказательство. Пусть σ_1 — первое собственное значение оператора $(-\Delta)^s$ в Ω и $\varphi_1 > 0$ — соответствующая собственная функция [16], т. е.

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s \phi_1 &= \sigma_1 \phi_1 \quad \text{в } \Omega, \\ \phi_1 &> 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \phi_1 &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{aligned}$$

Вариационная характеристика σ_1 задается формулой

$$\sigma_1 := \inf_{u \in H_0^s(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \left| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \phi \right|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}.$$

Более того, из [18] следует, что существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$0 < c_1 \delta^s < \phi_1(x) < c_2 \delta^s.$$

Также из [19] следует, что существует положительная константа ν такая, что $\nu < l(x) < +\infty$ для всех $x \in \Omega$, где

$$l(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi_1(x) - \phi_1(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dy.$$

Несложными вычислениями [19] можно получить, что

$$(-\Delta)^s \phi_1^2(x) = 2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x) \text{ в } \Omega,$$

существуют $m, \mu > 0$ такие, что

$$m < l(x) - 2\sigma_1 \phi_1^2(x) \text{ в } \Omega_\rho,$$

$$\mu \leq \phi_1 \leq 1 \text{ в } \Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho,$$

где

$$\overline{\Omega}_\rho = \{x \in \Omega : \delta(x) = d(x, \partial\Omega) \leq \rho\}.$$

Так как f, g, h и k непрерывны на $[0, +\infty[$ и удовлетворяют предположениям (H3)–(H4), то существует число $\theta_0 > 0$ такое, что

$$f(s) \geq -\theta_0, \quad g(s) \geq -\theta_0, \quad h(s) \geq -\theta_0, \quad k(s) \geq -\theta_0 \text{ для всех } s \geq 0. \quad (6)$$

Определим

$$\underline{\xi} = \left[\frac{(\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \theta_0}{ma_1} \right] \phi_1^2, \quad \underline{\eta} = \left[\frac{(\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0) \theta_0}{mb_1} \right] \phi_1^2,$$

где a_1, b_1 заданы условием (H1). Тогда $(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \in (H^s(\mathbb{R}^N) \times H^s(\mathbb{R}^N))$.

Проверим, что $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ — подрешение задачи (1) для достаточно больших $\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0$ и $\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0$. Действительно, пусть $\varphi \in (H_0^s(\Omega))$, $\varphi \geq 0$ в Ω , тогда простыми вычислениями можно показать, что

$$\begin{aligned} A(\|\underline{\xi}\|^2) \mathcal{L}(\underline{\xi}, \varphi) &= A(\|\underline{\xi}\|^2) \frac{(\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \theta_0}{ma_1} \mathcal{L}(\phi_1^2, \varphi) = \\ &= \frac{(\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \theta_0}{ma_1} A(\|\underline{\xi}\|^2) \int_{\Omega} \{2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x)\} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} B(\|\underline{\eta}\|^2) \mathcal{L}(\underline{\eta}, \psi) &= B(\|\underline{\eta}\|^2) \frac{(\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0) \theta_0}{mb_1} \mathcal{L}(\phi_1^2, \psi) = \\ &= \frac{(\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0) \theta_0}{mb_1} B(\|\underline{\eta}\|^2) \int_{\Omega} \{2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x)\} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ — слабое подрешение задачи (1), если

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \theta_0}{ma_1} A(\|\underline{\xi}\|^2) \int_{\Omega} \{2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x)\} \varphi(x) dx \leq \\ &\leq \lambda_1 \alpha_0 \int_{\Omega} f(\underline{\eta}) \varphi(x) dx + \mu_1 \beta_0 \int_{\Omega} h(\underline{\xi}) \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0) \theta_0}{mb_1} B(\|\underline{\eta}\|^2) \int_{\Omega} \{2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x)\} \psi(x) dx \leq \\ &\leq \lambda_2 \gamma_0 \int_{\Omega} g(\underline{\xi}) \psi(x) dx + \mu_2 \zeta_0 \int_{\Omega} k(\underline{\eta}) \psi(x) dx \end{aligned} \quad (8)$$

для всех $(\varphi, \psi) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$ таких, что $(0, 0) < (\varphi, \psi)$ в Ω . Разобьем доказательство на два случая: $x \in \Omega_\rho$ и $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho$. Если $x \in \Omega_\rho$, то из (7), (8) следует

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \theta_0}{ma_1} A \left(\int_{\Omega_\rho} \int_{\Omega_\rho} \frac{|\underline{\xi}(x) - \underline{\xi}(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right) \int_{\Omega_\rho} \{2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x)\} \varphi(x) dx = \\ & = - \frac{(\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \theta_0}{ma_1} A \left(\int_{\Omega_\rho} \int_{\Omega_\rho} \frac{|\underline{\xi}(x) - \underline{\xi}(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right) \int_{\Omega_\rho} \{l(x) - 2\sigma_1 \phi_1^2(x)\} \varphi(x) dx < \quad (9) \\ & < (\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \int_{\Omega_\rho} -\theta_0 \varphi(x) dx \leq \lambda_1 \int_{\Omega_\rho} \alpha(x) f(\underline{\eta}) \varphi(x) dx + \mu_1 \int_{\Omega_\rho} \beta(x) h(\underline{\xi}) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

для всех $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ таких, что $\varphi \geq 0$ в Ω .

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0) \theta_0}{mb_1} B \left(\|\underline{\eta}\|^2 \right) \int_{\Omega_\rho} \{2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x)\} \psi(x) dx \leq \\ & \leq \lambda_2 \int_{\Omega_\rho} \gamma(x) g(\underline{\xi}) \psi(x) dx + \mu_2 \int_{\Omega_\rho} \zeta(x) k(\underline{\eta}) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Теперь пусть $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho$. Тогда с учетом (6) из предположений (H3)–(H4) следует, что $\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0 \gg 1$ и $\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \zeta_0 \gg 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 \theta_0}{m} & \leq f(\underline{\eta}), \quad \frac{\sigma_1 \theta_0}{m} \leq h(\underline{\xi}), \\ \frac{\sigma_1 \theta_0}{m} & \leq g(\underline{\xi}), \quad \frac{\sigma_1 \theta_0}{m} \leq k(\underline{\eta}). \end{aligned}$$

Тогда из условия $l(x) > \nu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \alpha(x) f(\underline{\eta}) \varphi(x) dx + \mu_1 \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \beta(x) h(\underline{\xi}) \varphi(x) dx \geq \\ & \geq (\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \frac{\theta_0 a_2}{ma_1} \sigma_1 \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \varphi(x) dx \geq \\ & \geq (\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \frac{\theta_0}{ma_1} A \left(\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \frac{|\underline{\xi}(x) - \underline{\xi}(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right) \sigma_1 \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \varphi(x) dx \geq \\ & \geq (\lambda_1 \alpha_0 + \mu_1 \beta_0) \frac{\theta_0}{ma_1} A \left(\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \frac{|\underline{\xi}(x) - \underline{\xi}(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right) \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \{2\sigma_1 \phi_1^2(x) - l(x)\} \varphi(x) dx = \\ & = A \left(\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\rho} \frac{|\underline{\xi}(x) - \underline{\xi}(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dx dy \right) \mathcal{L}(\underline{\xi}, \varphi) = A \left(\|\underline{\xi}\|^2 \right) \mathcal{L}(\underline{\xi}, \varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

для всех $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ таких, что $\phi \geq 0$ в Ω . Объединяя (9), (10), получаем (7).

Аналогично,

$$\begin{aligned} B \left(\|\underline{\eta}\|^2 \right) \mathcal{L}(\underline{\eta}, \psi) & = \frac{(\lambda_2 \gamma_0 + \mu_2 \eta_0) b_2 \theta_0}{mb_1} B \left(\|\underline{\eta}\|^2 \right) \int_{\Omega} \{2\sigma_1 \varphi_1^2(x) - l(x)\} \phi(x) dx \leq \\ & \leq \lambda_2 \int_{\Omega} \gamma(x) g(\underline{u}) \psi(x) dx + \mu_2 \int_{\Omega} \eta(x) k(\underline{v}) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ — положительное слабое подрешение задачи (1).

Построим теперь надрешение задачи (1). Пусть e — решение задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s e &= 1 \text{ в } \Omega, \\ e &= 0 \text{ в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Из [16] следует, что существуют положительные константы $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2$ такие, что

$$0 < \widehat{c}_1 \delta^s < e(x) < \widehat{c}_2 \delta^s \text{ п. в. в } \Omega.$$

Пусть

$$(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \left(Ke, \left(\frac{\lambda_2 \|\gamma\|_\infty + \mu_2 \|\zeta\|_\infty}{b_1} \right) [g(K\|e\|_\infty)]e \right),$$

где $K > 0$ — большое положительное вещественное число, которое мы выберем позже. Нужно проверить, что $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ является надрешением задачи (1).

Ввиду предположений (H3)–(H5) мы можем выбрать такое достаточно большое K , что

$$a_1 K \geq \lambda_1 \|\alpha\|_\infty f \left[\left(\frac{\lambda_2 \|\gamma\|_\infty + \mu_2 \|\zeta\|_\infty}{b_1} \right) g(K\|e\|_\infty) \|e\|_\infty \right] + \mu_1 \|\beta\|_\infty h(K\|e\|_\infty).$$

Пусть $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ такая, что $\varphi \geq 0$ в Ω . Из (11) получаем $\bar{\xi} = Ke \in H_0^s(\Omega)$ и

$$\begin{aligned} A(\|\bar{\xi}\|^2) \mathcal{L}(\bar{\xi}, \varphi) &= A(\|\bar{\xi}\|^2) K \mathcal{L}(e, \varphi) \geq a_1 K \int_\Omega \varphi(x) dx \geq \\ &\geq \left\{ \lambda_1 \|\alpha\|_\infty f \left[\left(\frac{\lambda_2 \|\gamma\|_\infty + \mu_2 \|\zeta\|_\infty}{b_1} \right) g(K\|e\|_\infty) \|e\|_\infty \right] + \mu_1 \|\beta\|_\infty h(K\|e\|_\infty) \right\} \int_\Omega \varphi(x) dx \geq \\ &\geq \lambda_1 \|\alpha\|_\infty \int_\Omega f(\bar{\eta}) \varphi(x) dx + \mu_1 \|\beta\|_\infty \int_\Omega h(\bar{\xi}) \varphi(x) dx \geq \\ &\geq \lambda_1 \int_\Omega \alpha(x) f(\bar{\eta}) \varphi(x) dx + \mu_1 \int_\Omega \beta(x) h(\bar{\xi}) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Также имеем

$$\begin{aligned} B(\|\bar{\eta}\|^2) \mathcal{L}(\bar{\eta}, \psi) &\geq (\lambda_2 \|\gamma\|_\infty + \mu_2 \|\eta\|_\infty) [g(K\|e\|_\infty)] e \mathcal{L}(e, \psi) = \\ &= (\lambda_2 \|\gamma\|_\infty + \mu_2 \|\eta\|_\infty) \int_\Omega g(K\|e\|_\infty) \psi(x) dx \geq \\ &\geq \lambda_2 \int_\Omega \gamma(x) g(\bar{\xi}) \psi(x) dx + \mu_2 \int_\Omega \zeta(x) g(K\|e\|_\infty) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Снова ввиду (H4) и (H5) для достаточно больших K получаем

$$g(K\|e\|_\infty) \geq k \left(\left(\frac{\lambda_2 \|\gamma\|_\infty + \mu_2 \|\eta\|_\infty}{b_1} \right) (g(K\|e\|_\infty)) \|e\|_\infty \right) \geq k(\bar{\eta}).$$

Откуда

$$B(\|\bar{\eta}\|^2) \mathcal{L}(\bar{\eta}, \phi) \geq \lambda_2 \int_\Omega \gamma(x) g(\bar{\xi}) \psi(x) dx + \mu_2 \int_\Omega \zeta(x) k(\bar{\eta}) \psi(x) dx. \quad (13)$$

Объединим (12), (13), тогда $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ — надрешение задачи (1) такое, что $\underline{\xi} \leq \bar{\xi}$ и $\underline{\eta} \leq \bar{\eta}$ для достаточно большого K .

Для получения слабого решения задачи (1) будем использовать подход, предложенный Н. Аззузом и А. Бенседиком [20] (заметим, что f, g, h и k не зависят от x). Для этой цели

определяем последовательность $\{(\xi_n, \eta_n)\} \subset (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$ следующим образом: $\xi_0 := \bar{\xi}, \eta_0 = \bar{\eta}$ и (ξ_n, η_n) — единственное решение системы

$$\begin{aligned} A\left(\|\xi_n\|^2\right)(-\Delta)^s \xi_n &= \lambda_1 \alpha(x) f(\eta_{n-1}) + \mu_1 \beta(x) h(\xi_{n-1}) \text{ в } \Omega, \\ B\left(\|\eta_n\|^2\right)(-\Delta)^s \eta_n &= \lambda_2 \gamma(x) g(\xi_{n-1}) + \mu_2 \zeta(x) \tau(\eta_{n-1}) \text{ в } \Omega, \\ \xi_n &= \eta_n = 0 \text{ в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Задача (14) является (A, B) -линейной в том смысле, что если $(\xi_{n-1}, \eta_{n-1}) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$ заданы, то правые части системы (14) не зависят от ξ_n, η_n .

Положим $A(t) = tA(t^2)$, $B(t) = tB(t^2)$. Тогда поскольку $A(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $B(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(\eta_{n-1}), h(\xi_{n-1}), g(\xi_{n-1})$ и $k(\eta_{n-1}) \in L^2(\Omega)$ (в x), то из результата в [20] можно вывести, что система (14) имеет единственное решение $(\xi_n, \eta_n) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega))$.

Используя (14) и тот факт, что (ξ_0, η_0) является надрешением (1), получаем

$$\begin{aligned} A\left(\|\xi_0\|^2\right)(-\Delta)^s \xi_0 &\geq \lambda_1 \alpha(x) f(\eta_0) + \mu_1 \beta(x) h(\xi_0) = A\left(\|\xi_1\|^2\right)(-\Delta)^s \xi_1, \\ B\left(\|\eta_0\|^2\right)(-\Delta)^s \eta_0 &\geq \lambda_2 \gamma(x) g(\xi_0) + \mu_2 \zeta(x) k(\eta_0) = B\left(\|\eta_1\|^2\right)(-\Delta)^s \eta_1. \end{aligned}$$

По лемме 1 $\xi_0 \geq \xi_1$ и $\eta_0 \geq \eta_1$. Тогда ввиду монотонности f, h, g и k имеем

$$\begin{aligned} A\left(\|\xi_1\|^2\right)(-\Delta)^s \xi_1 &= \lambda_1 \alpha(x) f(\eta_0) + \mu_1 \beta(x) h(\xi_0) \geq \\ &\geq \lambda_1 \alpha(x) f(\underline{\eta}) + \mu_1 \beta(x) h(\underline{\xi}) \geq A\left(\|\underline{\xi}\|^2\right)(-\Delta)^s \underline{\xi}, \\ B\left(\|\eta_1\|^2\right)(-\Delta)^s \eta_1 &= \lambda_2 \gamma(x) g(\xi_0) + \mu_2 \zeta(x) k(\eta_0) \geq \\ &\geq \lambda_2 \gamma(x) g(\underline{\xi}) + \mu_2 \zeta(x) k(\underline{\eta}) \geq B\left(\|\underline{\eta}\|^2\right)(-\Delta)^s \underline{\eta}, \end{aligned}$$

откуда по лемме 1 получаем $\xi_1 \geq \underline{\xi}$, $\eta_1 \geq \underline{\eta}$; для ξ_2, η_2 запишем

$$\begin{aligned} A\left(\|\xi_1\|^2\right)(-\Delta)^s \xi_1 &= \lambda_1 \alpha(x) f(\eta_0) + \mu_1 \beta(x) h(\xi_0) \geq \\ &\geq \lambda_1 \alpha(x) f(\eta_1) + \mu_1 \beta(x) h(\xi_0) = A\left(\|\xi_2\|^2\right)(-\Delta)^s \xi_2, \\ B\left(\|\eta_1\|^2\right)(-\Delta)^s \eta_1 &= \lambda_2 \gamma(x) g(\xi_0) + \mu_2 \zeta(x) k(\eta_0) \geq \\ &\geq \lambda_1 \alpha(x) g(\xi_1) + \mu_2 \zeta(x) k(\eta_1) = B\left(\|\eta_2\|^2\right)(-\Delta)^s \eta_2, \end{aligned}$$

тогда $\xi_1 \geq \xi_2$, $\eta_1 \geq \eta_2$. Аналогично, $\xi_2 \geq \underline{\xi}$ и $\eta_2 \geq \underline{\eta}$, так как

$$\begin{aligned} A\left(\|\xi_2\|^2\right)(-\Delta)^s \xi_2 &= \lambda_1 \alpha(x) f(\eta_1) + \mu_1 \beta(x) h(\xi_1) \geq \\ &\geq \lambda_1 \alpha(x) f(\underline{\eta}) + \mu_1 \beta(x) h(\underline{\xi}) \geq A\left(\|\underline{\xi}\|^2\right)(-\Delta)^s \underline{\xi}, \\ B\left(\|\eta_2\|^2\right)(-\Delta)^s \eta_2 &= \lambda_2 \gamma(x) g(\xi_1) + \mu_2 \zeta(x) k(\eta_1) \geq \\ &\geq \lambda_2 \gamma(x) g(\underline{\xi}) + \mu_2 \zeta(x) k(\underline{\eta}) \geq B\left(\|\underline{\eta}\|^2\right)(-\Delta)^s \underline{\eta}. \end{aligned}$$

Повторяя это рассуждение, получим ограниченную монотонную последовательность

$$(\xi_n, \eta_n) \in (H_0^s(\Omega) \times H_0^s(\Omega)),$$

удовлетворяющую условиям

$$\bar{\xi} = \xi_0 \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n \geq \dots \geq \underline{\xi} > 0,$$

$$\bar{\eta} = \eta_0 \geq \eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq \dots \geq \underline{\eta} > 0.$$

Используя непрерывность функций f, h, g и k и определение последовательностей $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$, получаем, что существуют константы $C_i > 0$, $i = 1, \dots, 5$, не зависящие от n и такие, что

$$|f(\eta_{n-1})| \leq C_1, \quad |h(\xi_{n-1})| \leq C_2, \quad |g(\xi_{n-1})| \leq C_3, \quad (15)$$

$$|k(\eta_{n-1})| \leq C_4 \text{ для всех } n.$$

Учитывая (15), умножая первое уравнение в (14) на ξ_n , интегрируя, используя неравенство Гёльдера и вложение Соболева, можно показать, что

$$\begin{aligned} a_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \xi_n \right|^2 dx &\leq A \left(\|\xi\|^2 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \left| (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \xi_n \right|^2 dx = \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} \alpha(x) f(\eta_{n-1}) u_n dx + \mu_1 \int_{\Omega} \beta(x) h(\xi_{n-1}) u_n dx \leq \\ &\leq \lambda_1 \|\alpha\|_{\infty} \int_{\Omega} |f(\eta_{n-1})| |u_n| dx + \mu_1 \|\beta\|_{\infty} \int_{\Omega} |h(\xi_{n-1})| |u_n| dx \leq \\ &\leq \lambda_1 S(N, s) |\Omega|^{\frac{2^*_s-2}{2^*_s \cdot 2}} \|\xi_n\| + \mu_1 S(N, s) |\Omega|^{\frac{2^*_s-2}{2^*_s \cdot 2}} \|\xi_n\| \leq C_5 \|\xi_n\|_{H_0^s(\Omega)} \end{aligned}$$

или

$$\|\xi_n\|_{H_0^s(\Omega)} \leq C_5 \quad \forall n, \quad (16)$$

где $C_5 > 0$ — константа, не зависящая от n . Аналогично, существует константа $C_6 > 0$, не зависящая от n , такая, что

$$\|\eta_n\|_{H_0^s(\Omega)} \leq C_6 \quad \forall n. \quad (17)$$

Из (16) и (17) получаем, что $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ обладает подпоследовательностью, слабо сходящейся в $H_0^s(\Omega, \mathbb{R}^2)$ к пределу (ξ, η) , причем $\xi \geq \underline{\xi} > 0$ и $\eta \geq \underline{\eta} > 0$. Используя монотонность и стандартное рассуждение о регулярности, имеем $\{(\xi_n, \eta_n)\}$ сама сходится к (ξ, η) . Полагая теперь $n \rightarrow +\infty$ в (14), отсюда выводим (ξ, η) — положительное решение системы (1). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chipot M., Lovat B. *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal. **30** (7), 4619–4627 (1997).
- [2] Kirchhoff G. *Mechanik* (Teubner, Leipzig, 1883).
- [3] Applebaum D. *Lévy processes — from probability to finance and quantum groups*, Not. Amer. Math. Soc. **51** (11), 1336–1347 (2004).
- [4] Laskin N. *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Phys. Lett. A. **268** (4–6), 298–305 (2000).
- [5] Ali J., Shivaji R. *Multiple positive solutions for a class of (p-q)-Laplacian systems with multiple parameters and combined nonlinear effects*, Diff. Int. Equat. **22** (7–8), 669–678 (2009).
- [6] Ali J., Shivaji R. *Positive solutions for a class of p-Laplacian systems with multiple parameters*, J. Math. Anal. Appl. **335** (2), 1013–1019 (2007).
- [7] Ali J., Shivaji R. *On positive solutions for classes of strongly coupled p-Laplacian systems*, Elect. J. Diff. Equat., Conf. (16), 29–34 (2007).

- [8] Ali J., Ramaswamy M., Shivaji R. *Multiple positive solutions for classes of elliptic systems with combined nonlinear effects*, Diff. Int. Equat. **19** (6), 669–680 (2006).
- [9] Chung N.T. *An existence result for a class of Kirchhoff type systems via sub and super solutions method*, Appl. Math. Lett. **35**, 95–101 (2014).
- [10] Rasouli S.H. *On a mathematical model of thermal explosion with multiple parameters and nonlinear boundary conditions*, Dynam. Contin., Discrete Impulsive Syst. Ser. A: Math. Anal. **28**, 145–152 (2021).
- [11] Guefaifia R., Boulaaras S. *Subsuper solutions method for elliptic systems involving $(p_1, \dots, p_m)$ Laplacian operator*, Math. Meth. Appl. Sci. **43** (7), 4191–4199 (2020).
- [12] Afrouzi G.A., Rasouli S.H. *On positive solutions for some nonlinear semipositone elliptic boundary value*, Nonl. Anal. Model. Contr. **11** (4), 323–329 (2006).
- [13] Haiour M., Boulaaras S., Bouizem Y., Guefaifia R. *Existence result for a Kirchhoff elliptic system with variable parameters and additive right-hand side via sub- and supersolution method*, Bound. Value. Probl. **134**, 1–9 (2020).
- [14] Hai D.D., Shivaji R. *An existence result on positive solutions for a class of p -Laplacian systems*, Nonlinear Anal. **56** (7), 1007–1010 (2004).
- [15] Chhetri M., Girg P., Hollifield E. *Existence of positive solutions for fractional laplacian equations: theory and numerical experiments*, Elect. J. Diff. Equat. **2020** (1–32) (2020).
- [16] Bisci G.M., Radulescu V.D., Servadei R. *Variational methods for nonlocal fractional problems*, Encyclopedia Math. Appl. **162** (Cambridge Univ. Press, 2016).
- [17] Nezza E.Di, Palatucci G., Valdinoci E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (5), 521–573 (2012).
- [18] Ros-Oton X. *Nonlocal elliptic equations in bounded domains: a survey*, Publ. Matem. **60** (1), 3–26 (2016).
- [19] Dhanya R., Tiwari S. *A multiparameter semipositone fractional Laplacian problem involving critical exponent*, arXiv:1905.10062 (2019).
- [20] Azouz N., Bensedik A. *Existence result for an elliptic equation of Kirchhoff-type with changing sign data*, Funkcial. Ekvac. **55** (1), 55–66 (2012).

Рафик Гуюефайфия

Университет Кассима,

Бурайда, 51452, Саудовская Аравия,

e-mail: r.guefaifia@qu.edu.sa

Тахар Боуали

Университет Ларби Тебесси,

г. Тебесса, 12002, Алжир,

e-mail: tahar.bouali@univ-tebessa.dz

Сайед Хасхем Расоули

Технологический университет Ноширвани,

Бабол, Иран,

e-mail: s.h.rasouli@nit.ac.ir

R. Guefaifia, T. Bouali, and S.H. Rasouli

A new result on the existence of positive solutions for a class of fractional Kirchhoff-type systems with multiple parameters

Abstract. This paper is devoted to the problem of existence of positive weak solutions for a class of fractional Kirchhoff-type systems with multiple parameters. By using the sub-supersolution method and some analysis techniques, we prove a new existence result. To the best of our knowledge, our results are new in the study of fractional Kirchhoff-type systems.

Keywords: fractional Kirchhoff-type system, positive solution, sub-supersolution, multiple parameters.

Rafik Guefaifia

*Qassim University,
Buraydah, 51452 Saudi Arabia,*

e-mail: r.guefaifia@qu.edu.sa

Tahar Bouali

*Echahid Cheikh Larbi Tebessi University,
Tebessa, 12002 Algeria,*

e-mail: tahar.bouali@univ-tebessa.dz

Sayyed Hashem Rasouli

*Noshirnani University of Technology,
Babol, Iran,*

e-mail: s.h.rasouli@nit.ac.ir