

Краткое сообщение

М.Д. МИССАРОВ, Д.А. ХАЙРУЛЛИН

**НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В ОБОБЩЕННОЙ ФЕРМИОННОЙ
ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Аннотация. Рассматривается двумерная иерархическая решетка, в которой элементарная ячейка представлена вершинами квадрата. В обобщенной иерархической модели расстояние между противоположными вершинами квадрата отличается от расстояния между соседними вершинами и является параметром новой модели. В каждой вершине решетки поле задается набором из четырех компонент, являющихся образующими алгебры Грассмана. Гамильтониан поля описывается взаимодействием 4-й степени. Преобразование ренормализационной группы в пространстве коэффициентов связи, задающих это взаимодействие, определяется как нелинейное отображение. Описываются все ветви неподвижных точек этого отображения.

Ключевые слова: ренормализационная группа, иерархическая решетка, обобщенная фермионная модель, неподвижные точки.

УДК: 517.538

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-101-108

ВВЕДЕНИЕ

Иерархическая фермионная модель может рассматриваться как фермионный (антикоммутативный) аналог бозонной иерархической модели [1], [2]. Ренормализационная группа в бозонных евклидовых моделях описывается только в рамках теории возмущений в окрестности гауссовской точки. Отображение ренормализационной группы в фермионной иерархической модели вычисляется явно, и эта модель является единственной точно решаемой моделью ренормгруппы. Модели на иерархической решетке в частных случаях могут рассматриваться как дискретные версии p -адических моделей теории поля [3]. В [4] предложена обобщенная фермионная модель на иерархической решетке. В [5] найдены явные формулы для преобразования ренормализационной группы в пространстве констант связи обобщенной модели.

Пусть $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $V_k^s = \{j \in T : k \cdot 2^s \leq j < (k+1) \cdot 2^s\}$, где $k \in T$, $s \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Иерархическое расстояние $d_2(i, j)$, $i, j \in T$, $i \neq j$ определено, как $d_2(i, j) = 2^{s(i,j)}$, где

$$s(i, j) = \min\{s : \text{есть } k \in T \text{ такое, что } i, j \in V_k^s\}.$$

Поступила в редакцию 25.09.2024, после доработки 25.09.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (ПРИОРИТЕТ-2030).

Пусть $T^2 = T \times T$, $k = (k_1, k_2) \in T^2$,

$$V_k^s = \{(j_1, j_2) \in T^2 : k_1 \cdot 2^s \leq j_1 < (k_1 + 1) \cdot 2^s, k_2 \cdot 2^s \leq j_2 < (k_2 + 1) \cdot 2^s\}.$$

Для любого $k = (k_1, k_2) \in T^2$, $l = (l_1, l_2) \in T^2$, $k \neq l$, определено $s(k, l) = \max(s(k_1, l_1), s(k_2, l_2))$. Иерархическое расстояние на T^2 определено, как $d_2(k, l) = 2^{s(k, l)}$. Рассмотрим 4-компонентное фермионное поле

$$\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i)), \quad i \in T^2,$$

все компоненты которого, являются образующими алгебры Грассмана. Переобозначим V_0^N через Λ_N . Пусть Γ_N — подалгебра Грассмана, порожденная $4 \cdot 4^N$ образующими

$$\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i), \quad i \in \Lambda_N.$$

Действие ренормализационной группы $r(\alpha)$ на ψ^* определяется формулой

$$\psi^{*'}(i) \equiv (r(\alpha)\psi^*)(i) = 2^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_i^1} \psi^*(j), \quad (1)$$

где $\alpha \in R^1$ — параметр ренормализационной группы.

Гауссовское фермионное поле с нулевым средним и бинарной корреляционной функцией

$$\langle \psi_n(k) \bar{\psi}_m(l) \rangle = \delta_{n,m} b(k, l), \quad n, m = 1, 2, \quad k, l \in T^2,$$

определяется на всей решетке как квазисостояние (математическое ожидание) $\langle \cdot \rangle$ на алгебре всех мономов такое, что $\langle F \rangle$ для монома четной степени F рассчитывается по правилам Вика и $\langle F \rangle = 0$ для любого монома нечетной степени, $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Определим следующие функции на T^2 :

$$d(k, l; \lambda) = d_2(k, l), \quad \text{если } s(k_1, l_1) \neq s(k_2, l_2), \quad d(k, l; \lambda) = \lambda d_2(k, l), \quad \text{если } s(k_1, l_1) = s(k_2, l_2),$$

$$f(k, l; \lambda; \alpha) = d^\alpha(k, l; \lambda), \quad \text{если } k \neq l, \quad f(k, k; \lambda; \alpha) = \frac{2 + \lambda^\alpha}{4(1 - 2^{-(2+\alpha)})},$$

λ — действительный параметр, $\lambda > 0$. Пусть $b(k, l; \lambda; \alpha) = f(k, l; \lambda; \alpha - 4)$. В работе [4] показано, что гауссовское фермионное поле с нулевым средним и бинарной корреляционной функцией

$$\langle \psi_n(k) \bar{\psi}_m(l) \rangle = \delta_{n,m} b(k, l; \lambda; \alpha), \quad n, m = 1, 2, \quad k, l \in T^2,$$

инвариантно относительно преобразования ренормгруппы с параметром α (1).

Рассмотрим ограничение этого гауссовского поля ψ^* на объем Λ_N . В [4] описывается представление этого ограничения в гиббсовской форме с помощью квадратичного гамильтониана $H_{0,N}(\psi^*; \lambda, \alpha)$. Негауссовское фермионное поле описывается как состояние (математическое ожидание) $\rho_N(\lambda; \alpha, u)$ на алгебре Γ_N вида

$$\rho_N(\lambda; \alpha; u)(F) = Z_N^{-1}(\lambda; \alpha; u) \int F \exp\{-H_{0,N}(\psi^*; \lambda; \alpha)\} \prod_{i \in \Lambda_N} u(\psi^*(i)) d\psi^*,$$

$$Z_N(\lambda; \alpha; u) = \int \exp\{-H_{0,N}(\psi^*; \lambda; \alpha)\} \prod_{i \in \Lambda_N} u(\psi^*(i)) d\psi^*,$$

где $F(\psi^*)$ — произвольный моном из Γ_N , а интегрирование производится по правилам суперанализа. Плотность «свободной меры» $u(\psi^*; r, g)$ задается с помощью локального потенциала (самодействия)

$$L(\psi^*(i); r, g) = r(\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)) + g\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i)\bar{\psi}_2(i)\psi_2(i),$$

$$u(\psi^*(i)) = \exp\{-L(\psi^*(i); r, g)\}, \quad i \in \Lambda_N,$$

где r, g — вещественные константы связи. Другое (более общее) представление использует грассманово-значные плотности общего вида

$$u(\psi^*(i)) = c_0 + c_1 (\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)) + c_2 \bar{\psi}_1(i)\psi_1(i)\bar{\psi}_2(i)\psi_2(i), \quad i \in \Lambda_N.$$

Здесь c_0, c_1, c_2 — вещественные числа такие, что $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 > 0$. Поскольку плотность «свободной меры» в силу нормализующего фактора $Z_N(\lambda; \alpha; u)$ определена с точностью до ненулевого константного множителя, мы можем трактовать точки $c = (c_0, c_1, c_2)$ как точки двумерного проективного пространства. Если $c_0 \neq 0$, то мы можем записать плотность в экспоненциальной форме

$$u(\psi^*(i), c) = c_0 \exp\{-L(\psi^*(i); r(c), g(c))\}, \quad (2)$$

$$\text{где } r(c) = -\frac{c_1}{c_0}, \quad g(c) = \frac{c_1^2 - c_0 c_2}{c_0^2}.$$

Если ρ — состояние на Γ_N , то ренормализованное состояние ρ' определено на Γ_{N-1} по формуле

$$\rho'(F(\psi^*)) = \rho(F(r(\alpha)\psi^*)).$$

Если плотность $u(\psi^*(i))$ задается в экспоненциальной форме (2), то обозначим состояние $\rho_N(\alpha; u)$ как $\rho_N(\alpha; r, g)$. Если же плотность $u(\psi^*(i))$ задается в общем виде с помощью набора констант $c = (c_0, c_1, c_2)$, то обозначим $\rho_N(\alpha; u)$ как $\rho_N(\alpha; c)$. В [4] показано, что ренормализованное состояние ρ' задается состоянием $\rho_{N-1}(\alpha; r', g')$ или $\rho_N(\alpha; c')$. Отображения $(r', g') = R(\alpha)(r, g)$ и $c' = R(\alpha)c$ не зависят от N и называются отображениями ренормализационной группы в пространстве констант связи. В [5] найдены явные представления для этих отображений. Целью данной работы является описание неподвижных точек отображения $R(\alpha)$. Эти неподвижные точки описывают негауссовские фермионные поля, инвариантные относительно преобразования ренормализационной группы.

1. Ветви неподвижных точек ренормализационной группы

В [5] доказано, что преобразование ренормгруппы $R(\alpha)$ в плоскости констант связи (r, g) имеет вид

$$r' = 2^{\alpha-2} \frac{r_1(r, g; \delta)}{r_2(r, g; \delta)}, \quad g' = \frac{2^{2(\alpha-2)}}{4} g \left(\frac{r_3(r, g; \delta)}{r_2(r, g; \delta)} \right)^2, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2(-2^{\alpha+2}\lambda^4 + 4^\alpha\lambda^4 + 16\lambda^\alpha - 13(2\lambda)^\alpha)}{2^{2\alpha+1}\lambda^4 - 2^{2\alpha}\lambda^\alpha - 12\lambda^4 2^\alpha - 5\lambda^\alpha 2^\alpha + 16\lambda^4}, \\ r_1(r, g; \delta) &= -g^3 r - g^3 \left(\frac{\delta}{4} + \frac{1}{4} \right) + 3g^2 r^3 - g^2 r^2 \left(-\frac{5\delta}{2} - \frac{5}{2} \right) - g^2 r \left(-\frac{\delta^2}{2} - 2\delta \right) - \\ &- g^2 \left(-\frac{\delta^2}{4} - \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \right) - 3gr^5 - gr^4 \left(\frac{17\delta}{4} + \frac{17}{4} \right) - gr^3 \left(\frac{3\delta^2}{2} + 8\delta - 1 \right) - gr^2 \left(\frac{7\delta^2}{2} + \frac{5\delta}{2} - \frac{5}{2} \right) - \\ &- gr \left(\frac{5\delta^2}{2} - 2\delta \right) - g \left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{3\delta}{4} + \frac{1}{4} \right) + r^7 - r^6(-2\delta - 2) - r^5(-\delta^2 - 6\delta + 1) - r^4(-4\delta^2 - 4\delta + 4) - \\ &- r^3(-6\delta^2 + 4\delta + 1) - r^2(-4\delta^2 + 6\delta - 2) + r(\delta - 1)^2, \\ r_2(r, g; \delta) &= -\frac{g^3}{4} + \frac{3g^2 r^2}{2} + g^2 r(\delta + 1) + g^2 \left(\frac{\delta^2}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{9gr^4}{4} + gr^3(-3\delta - 3) + gr^2 \left(-\delta^2 - 5\delta + \frac{1}{2} \right) + \\ &+ gr(-2\delta^2 - \delta + 1) + g \left(-\delta^2 + \delta - \frac{1}{4} \right) + r^6 + r^5(2\delta + 2) + r^4(\delta^2 + 6\delta - 1) + r^3(4\delta^2 + 4\delta - 4) + \end{aligned}$$

$$+r^2(6\delta^2 - 4\delta - 1) + r(4\delta^2 - 6\delta + 2) + (\delta - 1)^2,$$

$$r_3(r, g; \delta) = (-g + (r + 1)^2)(-\delta^2 g - 4\delta gr + 4\delta r^3 + 2g^2 - 4gr^2 + 2r^4 + r^2(2\delta^2 + 4\delta - 4) + \\ + r(4\delta^2 - 4\delta) + 2(\delta - 1)^2).$$

Лемма 1. Пусть $v = r + 1$, $\tau = \delta - 2$, тогда

$$r_2(r, g; \delta) = s_2(v, g; \tau) = -\frac{g^3}{4} + g^2 \left(\frac{\tau^2}{4} + \tau v + \frac{3v^2}{2} \right) - \frac{gv^2(2\tau + 3v)^2}{4} + v^4(\tau + v)^2,$$

$$r_3(r, g; \delta) = s_3(v, g; \tau) = (-g + v^2) \left(g^2 - \frac{g(\tau + 2v)^2}{2} + v^2(\tau + v)^2 \right),$$

$$r_1(r, g; \delta) = s_1(v, g; \tau) = \frac{1}{4}g\tau(g - v^2)^2 - s_2(v, g; \tau) + s_3(v, g; \tau)v.$$

Доказательство леммы производится прямым вычислением.

Из формулы (3) следует, что формально преобразование $R(\alpha)$ не определено в точках, где $r_2(r, g; \delta) = 0$ в (r, g) -координатах или $s_2(v, g; \tau) = 0$ в (v, g) -координатах. Для того, чтобы доопределить отображение $R(\alpha)$ в этих точках, необходимо перейти к проективным координатам $c = (c_1, c_2, c_3)$, где $c_1 = -(v - 1)$, $c_2 = (v - 1)^2 - g$, и применить отображение $R(\alpha)$ в проективных координатах $c' = R(\alpha)c$. В проективных координатах отображение $R(\alpha)$ задается однородными полиномиальными отображениями 4-й степени [5]. Такое отображение корректно определено во всех точках, кроме сингулярных точек, т.е. точек, для которых $R(\alpha)c = 0$. Можно показать, что точки $c = (1, 1, 1)$ и $c = (1, \tau + 1, (\tau + 1)^2)$ являются сингулярными. В (v, g) -координатах они записываются как точки $(0, 0)$ и $(-\tau, 0)$. Пусть $c' = R(\alpha)c$, где $c = (1, -(v - 1), (v - 1)^2 - g)$.

Лемма 2. $s_2(v, g; \tau) = 0$ тогда и только тогда, когда $c'_0 = 0$.

Доказательство леммы производится прямым вычислением при переходе к проективным координатам.

Из леммы 2 следует, что если $s_2(v, g; \tau) = 0$, то в проективных координатах преобразование ренормализационной группы $R(\alpha)$ отображает точку $c = (1, -(v - 1), (v - 1)^2 - g)$ в нерегулярную область, в которой экспоненциальное представление плотности «свободной меры» невозможно. Но следующая итерация отображения $R(\alpha)$ возвращает эту точку в регулярную область.

Из явного вида отображения $R(\alpha)$ в проективных координатах [5] следует, что точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$ являются неподвижными точками отображения $R(\alpha)$ для всех λ и α . В (v, g) -координатах точка $(1, 0, 0)$ имеет вид $(1, 0)$ и называется гауссовской неподвижной точкой. Тогда $(0, 0, 1)$ не видна в координатах (v, g) и называется бесконечно-удаленной неподвижной точкой. Далее мы даем полное описание всех ветвей неподвижных точек в (v, g) -координатах.

Заметим, что параметры τ, γ зависят от α , но мы не будем явно обозначать эту зависимость.

Теорема. Пусть $\alpha \neq 2$, преобразование ренормализационной группы на обобщенной иерархической модели в пространстве констант связи (v, g) имеет четыре ветви неподвижных точек: $(v_+^1, g_+^1), (v_-^1, g_-^1), (v_+^2, g_+^2), (v_-^2, g_-^2)$, где

$$v_{\pm}^1 = \gamma - 1 + \tau(\gamma - 2\beta_{\pm}^1), \quad g_{\pm}^1 = \frac{\beta_{\pm}^1 - 1}{\beta_{\pm}^1 - \frac{1}{2}} v_{\pm}^1{}^2, \quad \tau = \delta(\alpha, \lambda) - 2 = 2 \frac{(2^{2-\alpha} - 1)(\lambda^{\alpha-4} - 1)}{\lambda^{\alpha-4} + 2^{4-\alpha} - 2},$$

$$\beta_{\pm}^1 = \frac{3(\gamma(\tau + 1)^2 - 1) \pm \sqrt{(\gamma(\tau + 1)^2 - 1)^2 + 8(\tau + 1)^2(\gamma - 1)^2}}{4\tau(\tau + 2)},$$

$$v_{\pm}^2 = \frac{1-\gamma}{3} - \frac{\tau}{3}(\gamma + 2\beta_{\pm}^2), \quad g_{\pm}^2 = \frac{\beta_{\pm}^2 - 1}{\beta_{\pm}^2 - \frac{1}{2}} v_{\pm}^2{}^2, \quad \beta_{\pm}^2 = \frac{2\tau(3\tau\gamma + 5\gamma - \gamma^2 + 4) \pm \sqrt{\Delta(\tau, \gamma)}}{4\tau(-6\tau\gamma + (1 - \gamma)(\tau + 6))},$$

$$\Delta(\tau, \gamma) = 4\gamma^2\tau^4(14\gamma^2 + 68\gamma - 1) + 8\gamma\tau^3(-8\gamma^3 + 9\gamma^2 + 15\gamma - 16) + \\ + 36\tau^2(-\gamma^4 - 5\gamma^3 + 15\gamma^2 - 11\gamma + 2) + 36\gamma\tau(\gamma^3 - 3\gamma^2 + 3\gamma - 1) + 9(\gamma - 1)^4.$$

Схема доказательства. Заметим, что выражения $s_2(v, g; \tau), s_3(v, g; \tau)$ квадратично зависят от параметра τ . Разложим их по степеням τ :

$$s_2(v, g; \tau) = \tau^2 \left(v^4 - gv^2 + \frac{g^2}{4} \right) + 2v\tau \left(v^4 - \frac{3}{2}gv^2 + \frac{g^2}{2} \right) + v^6 - \frac{g}{4}gv^4 + \frac{3}{2}g^2v^2 - \frac{1}{4}g^3 = \\ = \tau^2 \left(v^2 - \frac{g}{2} \right)^2 + 2v\tau \left(v^2 - g \right) \left(v^2 - \frac{g}{2} \right) + (v^2 - g)^2 \left(v^2 - \frac{g}{4} \right) = (v^2 - g)^2 \left[\left(\frac{v^2 - \frac{g}{2}}{v^2 - g} \tau + v \right)^2 - \frac{1}{4}g \right], \\ s_3(v, g; \tau) = (v^2 - g) \left[\tau^2 \left(v^2 - \frac{1}{2}g \right) + 2\tau v (v^2 - g) + (v^2 - g)^2 \right] = \\ = \frac{(v^2 - g)^3}{v^2 - \frac{g}{2}} \left[\left(\frac{v^2 - \frac{g}{2}}{v^2 - g} \tau + v \right)^2 - \frac{1}{2}g \right].$$

Уравнение на неподвижные точки в (r, g) -координатах имеет вид

$$r = \gamma \frac{r_1(r, g; \delta)}{r_2(r, g; \delta)}, \quad g = \frac{\gamma^2}{4} g \left(\frac{r_3(r, g; \delta)}{r_2(r, g; \delta)} \right)^2,$$

где $\gamma = 2^{\alpha-2}$. В (v, g) -координатах эти уравнения примут вид

$$v - 1 = \gamma \frac{s_1(v, g; \tau)}{s_2(v, g; \tau)}, \quad g = \frac{\gamma^2}{4} g \left(\frac{s_3(v, g; \tau)}{s_2(v, g; \tau)} \right)^2. \quad (4)$$

Рассмотрим второе уравнение из (4) для случая $g \neq 0$:

$$\frac{s_3(v, g; \tau)}{s_2(v, g; \tau)} = \frac{1}{\beta} \frac{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{2}}{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{4}} = c, \quad (5)$$

где c — некоторая константа, а $\beta = \frac{v^2 - \frac{g}{2}}{v^2 - g}$. Тогда

$$\frac{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{2}}{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{4}} = 1 - \frac{\frac{g}{4}}{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{4}} = \beta c.$$

Отсюда

$$\frac{\frac{g}{4}}{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{4}} = 1 - \beta c. \quad (6)$$

Из первого уравнения в (4) и (6) следует

$$\begin{aligned} v - 1 &= \gamma \left(\frac{-\frac{1}{4}\tau g(v^2 - g)^2 - s_2(v, g; \tau) + s_3(v, g; \tau)v}{s_2(v, g; \tau)} \right) = \\ &= \gamma \left(\frac{\frac{1}{4}\tau g}{(\beta\tau + v)^2 - \frac{g}{4}} - 1 + cv \right) = \gamma(-\tau(1 - \beta c) - 1 + cv). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $c = \frac{2}{\gamma}$. Тогда

$$v - 1 = \gamma \left(-\tau + \frac{2\tau\beta}{\gamma} - 1 + \frac{2}{\gamma}v \right) = -\gamma\tau + 2\tau\beta - \gamma + 2v$$

и, следовательно,

$$v = \gamma - 1 + \tau(\gamma - 2\beta). \quad (7)$$

Теперь вернемся ко второму уравнению в (4)

$$\frac{s_3(v, g; \tau)}{s_2(v, g; \tau)} = \frac{2}{\gamma}.$$

Получаем

$$\frac{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{2}}{(\tau\beta + v)^2 - \frac{g}{4}} = \frac{2\beta}{\gamma}.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{(\tau\beta + v)^2}{-\frac{g}{4}} = \frac{2\gamma - 2\beta}{2\beta - \gamma}. \quad (8)$$

В силу (8)

$$\tau\beta + v = -\tau(\beta - \gamma) - 1 + \gamma. \quad (9)$$

Заметим также, что

$$g = \frac{\beta - 1}{\beta - \frac{1}{2}}v^2. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получаем уравнение

$$\frac{(-\tau(\beta - \gamma) - 1 + \gamma)^2}{-\frac{\beta - 1}{4\left(\beta - \frac{1}{2}\right)}(\gamma - 1 + \tau(\gamma - 2\beta))^2} = \frac{2\gamma - 2\beta}{2\beta - \gamma}. \quad (11)$$

Уравнение (11) трансформируется в уравнение третьей степени

$$\beta P(\beta, \tau, \gamma) = 0, \quad (12)$$

где

$$P(\beta, \tau, \gamma) = 2\beta^2(\tau^2 + 2\tau) - 3\beta(\gamma\tau^2 + 2\gamma\tau + \gamma - 1) + \gamma^2(\tau + 1)^2 - 1.$$

Корень $\beta = 0$ уравнения (12) приводит к некорректному делению на ноль в формуле (5). Но из $\beta = 0$ следует условие $g = 2v^2$. Легко видеть, что в этом случае уравнения (4) не имеют решения.

Уравнение $P(\beta, \tau, \gamma) = 0$ имеет решения

$$\beta_{\pm}^1 = \frac{3(\gamma(\tau + 1)^2 - 1) \pm \sqrt{(\gamma(\tau + 1)^2 - 1)^2 + 8(\tau + 1)^2(\gamma - 1)^2}}{4\tau(\tau + 2)}.$$

Отсюда получаем

$$v_{\pm}^1 = \gamma - 1 + \tau(\gamma - 2\beta_{\pm}^1), \quad g_{\pm}^1 = \frac{\beta_{\pm}^1 - 1}{\beta_{\pm}^1 - \frac{1}{2}} v_{\pm}^1{}^2.$$

Случай $c = -\frac{2}{\gamma}$ рассматривается аналогично. Соответствующие решения отмечаем верхним индексом 2:

$$\begin{aligned} \beta_{\pm}^2 &= \frac{2\tau(3\tau\gamma + 5\gamma - \gamma^2 + 4) \pm \sqrt{\Delta(\gamma, \tau)}}{4\tau(-6\tau\gamma + (1 - \gamma)(\tau + 6))}, \\ \Delta(\gamma, \tau) &= 4\gamma^2\tau^4(14\gamma^2 + 68\gamma - 1) + 8\gamma\tau^3(-8\gamma^3 + 9\gamma^2 + 15\gamma - 16) + \\ &+ 36\tau^2(-\gamma^4 - 5\gamma^3 + 15\gamma^2 - 11\gamma + 2) + 36\gamma\tau(\gamma^3 - 3\gamma^2 + 3\gamma - 1) + 9(\gamma - 1)^4, \\ v_{\pm}^2 &= \frac{1 - \gamma}{3} - \frac{\tau}{3}(\gamma + 2\beta_{\pm}^2), \quad g_{\pm}^2 = \frac{\beta_{\pm}^2 - 1}{\beta_{\pm}^2 - \frac{1}{2}} v_{\pm}^2{}^2. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dyson F.J. *Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet*, Commun. Math. Phys. **12**, 91–107 (1969).
- [2] Missarov M.D. *Renormalization Group Solution of Fermionic Dyson Model*, Asympt. Combinat. Appl. Math. Phys., V.A.Malyshev and A.M.Vershik (eds.) (Kluwer Acad. Publ., Printed in Netherlands), 151–166 (2002).
- [3] Dragovich B., Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V. and Volovich I.V. *On p-adic mathematical physics*, p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. and Appl. **1**, 1–17 (2009).
- [4] Missarov M.D. *New Variant of the Fermionic Model on the Hierarchical Two-Dimensional Lattice*, p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. and Appl. **12** (2), 163–170 (2020).
- [5] Миссаров М.Д., Хайруллин Д.А. *Преобразование ренормализационной группы в обобщенной фермионной иерархической модели*, Изв. РАН. Сер. матем. **87** (5), 164–176 (2023).

Мукадас Дмухтасибович Миссаров

*Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: mukadas.missarov@yandex.ru

Дмитрий Айратович Хайруллин

*Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: dimahajrullin@outlook.com

M.D. Missarov and D.A. Khajrullin

Fixed points of transformation of a renormalization group in a generalized fermionic hierarchical model

Abstract. A two-dimensional hierarchical lattice is considered, in which an elementary cell is represented by the vertices of a square. In the generalized hierarchical model, the distance between opposite vertices of a square differs from the distance between neighboring vertices and is a parameter of the new model. At each vertex of the lattice, the field is defined by a set of 4 generators of the Grassmann algebra. The Hamiltonian of the field is described by the interaction of the 4th degree. The transformation of the renormalization group in the space of coupling coefficients defining this interaction is defined as a nonlinear mapping. All branches of fixed points of this mapping are described.

Keywords: renormalization group, hierarchical lattice, general fermionic model, fixed points.

Mukadas Dmuhtasibovich Missarov

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: mukadas.missarov@yandex.ru

Dmitrij Airatovich Khajrullin

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: dimahajrullin@outlook.com