

Краткое сообщение

Д.В. МАКЛАКОВ, Р.В. КАЗАНЦЕВ

**АНАЛИЗ ФОРМИРОВАНИЯ ВНУТРЕННЕГО РЕШЕНИЯ ВБЛИЗИ  
ГРЕБНЯ КРУТЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН БЕСКОНЕЧНОЙ  
ГЛУБИНЫ**

*Аннотация.* Исследуются поверхностные периодические волны бесконечной глубины. Краевая задача формулируется в параметрической плоскости относительно функции Жуковского. С использованием дискретного преобразования Фурье задача сводится к конечной системе нелинейных трансцендентных уравнений. Показано, что с увеличением крутизны волн при соответствующем масштабировании искомой функции формируется внутреннее решение вблизи гребня, независимое от крутизны. Показано, что численное воспроизведение этого решения является ключевым фактором для точных расчетов почти предельных гравитационных волн.

*Ключевые слова:* поверхностная волна, потенциальное течение, внутреннее решение.

УДК: 532.595

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-94-100

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим периодическую систему волн, перемещающуюся справа налево с фазовой скоростью  $c$  под действием силы тяжести  $g$ . Жидкость считаем идеальной и несжимаемой. Будем изучать волны в системе координат, движущейся со скоростью  $c$  в сторону их распространения. Течение жидкости в этой системе предполагаем установившимся и безвихревым. Капиллярными силами пренебрегаем. Периодическая волна называется предельной, если ее гребень лежит на уровне нулевой скорости по уравнению Бернулли. Как было показано Г.Г. Стоксом [1], такие волны имеют угол  $120^\circ$  при вершине. Введем параметр  $A = \ln(v_t/v_c)$ , где  $v_c$  и  $v_t$  — скорости на гребнях и впадинах волн соответственно. Для предельных волн  $A = \infty$ . Наибольшие вычислительные трудности возникают при расчетах почти предельных волн, для которых  $A \gg 1$ . Связаны эти трудности с нетривиальным предельным переходом на гребне от  $\theta = 0$  для всех волн, кроме предельных, до  $\theta = \pm\pi/6$  для предельных волн, где  $\theta$  — угол наклона вектора скорости в точках свободной поверхности.

Теория перехода от почти предельных волн к предельным была разработана в статьях М.С. Лонгет-Хиггинса и М. Фокса [2], [3]. Согласно этой теории гидродинамические характеристики, например, такие, как фазовая скорость, потенциальная и кинетическая энергии,

---

Поступила в редакцию 23.09.2024, после доработки 23.09.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00066.

импульс, при  $A \rightarrow \infty$  осциллируют. Впервые прямое численное подтверждение осцилляций было дано в работе Д.В. Маклакова [4]. В данной статье на основе анализа работ М.С. Лонгет-Хиггинса и М. Фокса было установлено, что через параметр  $A$  осцилляции выражаются законом

$$F(A) = F_{\text{lim}} [1 + a_M e^{-3A} \cos(kA - b_M)] + O(e^{-rA}), \quad r \geq 5, \quad (1)$$

где  $F$  — осциллирующая характеристика,  $F_{\text{lim}}$  — ее предельное значение при  $A \rightarrow \infty$ ,  $a_M, b_M$  зависят от выбранной характеристики,  $k = 2.14201\dots$  — корень трансцендентного уравнения

$$\frac{k\pi}{6} \tanh \frac{k\pi}{6} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

В настоящей работе мы анализируем формирование внутреннего решения вблизи гребня, выбирая в качестве искомой функцию Жуковского [5]. Как показано в [2] и [3], формирование этого решения является основной причиной осцилляций гидродинамических характеристик. В статье мы доказываем, что численное воспроизведение этого решения является ключевым фактором для точных расчетов почти предельных гравитационных волн.

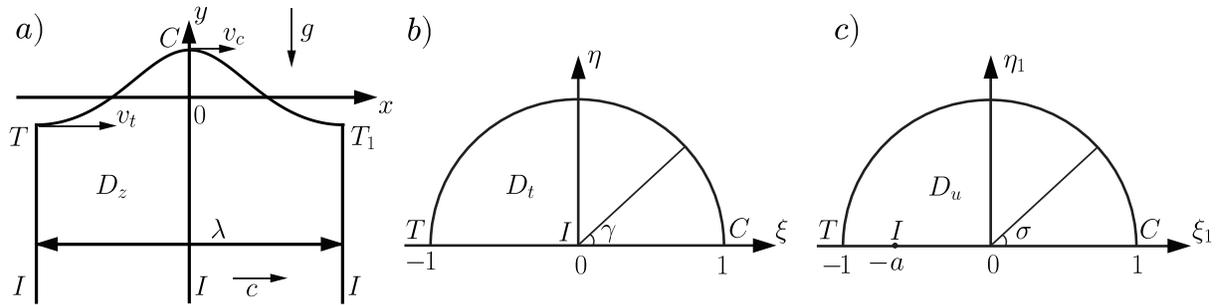


Рис. 1. а) Один период волн в физической плоскости  $z = x + iy$ . б) Параметрическая плоскость  $t = \xi + i\eta$ . в) Параметрическая плоскость  $u = \xi_1 + i\eta_1$

### 1. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФУНКЦИИ ЖУКОВСКОГО И СИСТЕМА ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

На рис. 1, а) изображен один период волн в физической плоскости  $z = x + iy$ . Волны длины  $\lambda$  предполагаются симметричными относительно вертикальных осей, проходящих через гребни и впадины. Ось ординат на периоде проходит через гребень волн, ось абсцисс проведена по средней линии волн. Буквой  $C$  обозначен гребень волны, буквами  $T$  и  $T_1$  — впадины;  $I$  — бесконечно удаленная точка течения,  $D_z$  — левая половина области течения. В выбранной системе координат скорость жидкости в бесконечно удаленной точке равна  $c$ .

Пусть  $w = w(z)$  — комплексный потенциал течения,  $z = z(t)$  — функция, конформно отображающая область  $D_t$  на  $D_z$ , где  $D_t$  — верхний полукруг в параметрической плоскости  $t = \xi + i\eta$  (рис. 1, б)). Вертикальные прямые  $TI$  и  $CI$  являются эквипотенциалами, поэтому область изменения комплексного потенциала для левой половины течения представляет собой нижнюю половину вертикальной полосы ширины  $\lambda c/2$ . Следовательно,

$$w(t) = -\frac{c\lambda}{2\pi i} \ln t, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{c\lambda}{2\pi i} \frac{1}{t}.$$

Введем функцию Жуковского [5]:

$$\chi(t) = \ln \frac{v_c dz}{dw} = \ln \frac{v_c}{v} + i\theta \implies \frac{dw}{dz} = v_c e^{-\chi(t)}, \quad (2)$$

где  $v$  и  $v_c$  — модули вектора скорости в точках области  $D_z$  и точке  $C$  соответственно,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ .

Обозначим  $\chi(e^{i\gamma}) = \mu(\gamma) + i\tau(\gamma)$ . Тогда

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw} \frac{dw}{dt} = -\frac{c\lambda}{2\pi i v_c} \frac{e^{\chi(t)}}{t}, \quad \frac{dz}{d\gamma} = -\frac{c\lambda}{2\pi v_c} e^{\mu(\gamma) + i\tau(\gamma)}, \quad (3)$$

где во второй формуле считаем, что  $z = z(e^{i\gamma})$ .

Следуя работе Леви-Чивиты [6] и считая, что параметр  $A = \ln(v_t/v_c)$  задан, сформулируем краевую задачу для определения аналитической в верхнем полукруге функции  $\chi(t)$ . Из формул (2), (3) и соотношения  $v^2 + 2gy = \text{const}$ , которое вытекает из уравнения Бернулли и условия постоянства давления на свободной поверхности, получаем, что на параметрической полуокружности

$$\Lambda(\gamma) = -E e^{3\mu(\gamma)} \sin \tau(\gamma), \quad \text{где } \Lambda(\gamma) = \mu'(\gamma), \quad E = \frac{c\lambda g}{2\pi v_c^3}, \quad \gamma \in [0, \pi]. \quad (4)$$

Диаметр полукруга  $TIC$  соответствует осям симметрии течения, на которых  $\theta = 0$ . Кроме того,  $\chi(1) = 0$ ,  $\chi(-1) = -A$ . Следовательно,

$$\text{Im } \chi(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad \mu(0) = 0, \quad \mu(\pi) = -A. \quad (5)$$

В краевой задаче (4), (5) неизвестными являются аналитическая в полукруге  $D_t$  функция  $\chi(t)$  и параметр  $E$ . В линейной теории волн фазовая скорость перемещения волны определяется хорошо известной формулой  $c = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}$ . В нелинейной теории скорость принято обезразмеривать по отношению к этой величине. Безразмерную фазовую скорость обозначим через  $c_*$ . Легко показать, что  $c_*^2$  выражается через параметр  $E$  и функцию  $\chi(t)$  следующим образом:

$$c_*^2 = \frac{2\pi c^2}{g\lambda} = \frac{e^{-3\chi(0)}}{E}.$$

Функцию  $\chi(t)$  будем искать в виде

$$\chi(t) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n t^n, \quad (6)$$

где  $c_n$  ( $n = \overline{0, N}$ ) — действительные коэффициенты,  $N$  — число членов, удерживаемых в степенном ряде. Тогда

$$\mu(\gamma) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \cos n\gamma, \quad \tau(\gamma) = \sum_{n=1}^N c_n \sin n\gamma, \quad \Lambda(\gamma) = -\sum_{n=1}^N n c_n \sin n\gamma. \quad (7)$$

Очевидно,  $\chi(0) = c_0$ , и в силу второго условия в (5)  $c_0 = -\sum_{n=1}^N c_n$ . Укажем, что функция  $\chi(t)$  в виде (6) автоматически удовлетворяет первому из условий (5). Кроме того, из (7) следует, что условие (4) будет выполняться при  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$ .

На отрезок  $[0, \pi]$  нанесем сетку узлов  $\gamma_i = \pi i/(N+1)$ ,  $i = \overline{0, N+1}$ . Тогда  $\gamma_0 = 0$ , а  $\gamma_{N+1} = \pi$ . Обозначим  $\mu_i = \mu(\gamma_i)$ ,  $\tau_i = \tau(\gamma_i)$ ,  $\Lambda_i = \Lambda(\gamma_i)$ . Ясно, что  $\Lambda_0 = \Lambda_{N+1} = \tau_0 = \tau_{N+1} = 0$ . Предположим, что значения  $\Lambda_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , заданы. С помощью дискретного преобразования

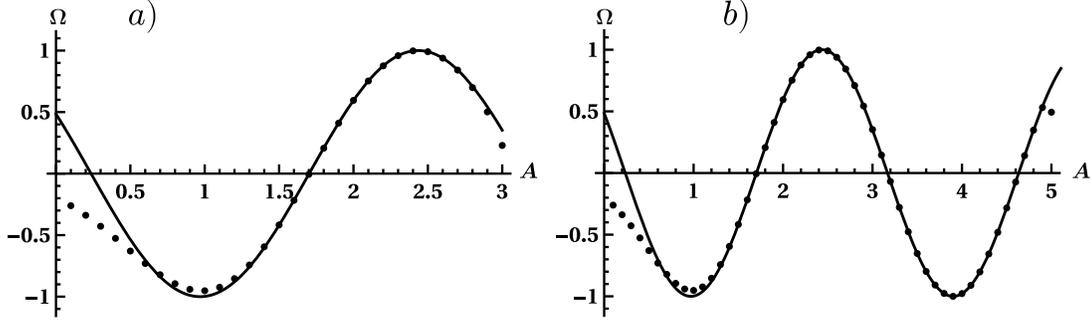


Рис. 2. а) Асимптотическая косинусоида и расчетные точки зависимости  $\Omega(A)$  при отыскании функции  $\chi(t)$ . б) То же самое, но при отыскании функции  $\hat{\chi}(u)$

Фурье по синусам и косинусам легко представить величины  $\mu_i$ ,  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ) и  $c_0$ ,  $\mu(\pi) = \mu_{N+1}$  в виде операций умножения матриц и скалярных произведений векторов:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} \Lambda_j, \quad \tau_i = \sum_{j=1}^N T_{ij} \Lambda_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad \text{и} \quad c_0 = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j, \quad \mu_{N+1} = \mu(\pi) = \sum_{j=1}^N \beta_j \Lambda_j,$$

где коэффициенты  $M_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  зависят только от выбранного значения  $N$ . С точки зрения эффективности дискретного преобразования Фурье значение  $N + 1$  выгодно выбирать в виде произведения небольшого числа простых чисел. В наших расчетах мы полагали  $N = 2^{13} - 1 = 8191$ . Теперь краевая задача (4), (5) сводится к конечной системе трансцендентных нелинейных уравнений

$$\Lambda_i = -E \exp \left( 3 \sum_{j=1}^N M_{ij} \Lambda_j \right) \sin \left( \sum_{j=1}^N T_{ij} \Lambda_j \right), \quad i = \overline{1, N}, \quad \sum_{j=1}^N \beta_j \Lambda_j = -A. \quad (8)$$

Неизвестными в этой системе являются величины  $\Lambda_i$  и параметр  $E$ . Система (8) решалась численно методом Ньютона. При малых значениях параметра  $A$  путем линеаризации граничного условия (4) устанавливаем, что в нулевом приближении  $\Lambda(\gamma) = -A/2 \sin \gamma$ ,  $E = 1$ .

## 2. ФОРМИРОВАНИЕ ВНУТРЕННЕГО РЕШЕНИЯ

В работе [4] для квадрата безразмерной фазовой скорости  $c_*^2$  численно были получены параметры асимптотической формулы (1):  $c_{*\text{lim}}^2 = 1.19308662739$ ,  $a_M = 0.82698$ ,  $b_m = -1.06488$ . Введем функцию

$$\Omega(A) = \left[ \frac{c_*^2(A)}{c_{*\text{lim}}^2} - 1 \right] \frac{\exp(3A)}{a_M}.$$

Согласно (1) при  $A \gg 1$  эта функция должна быть близка к косинусоиде  $\cos(kA - b_M)$ . Косинусоида и расчетные точки приведены на рис. 2, а). Из графика видно, что сход расчетных точек с асимптотической кривой начинается при  $A > 2.8$ . Отметим, что расчет функции  $\Omega(A)$  проводился от  $A = 0.1$  до  $A = 7.5$  с шагом по  $A$  равным 0.1, и во всем этом диапазоне  $A$  метод Ньютона сходился. Чтобы выяснить причину падения точности вычислений был проведен анализ поведения функции  $\Lambda(\gamma)$ .

Численно было установлено, что для  $\forall A > 0$  функция  $\Lambda(\gamma)$  является унимодальной на отрезке  $\gamma \in [0, \pi]$ , причем положение точки минимума  $\gamma_{\min}$  зависит от  $A$  так, что  $\gamma_{\min} \rightarrow 0$

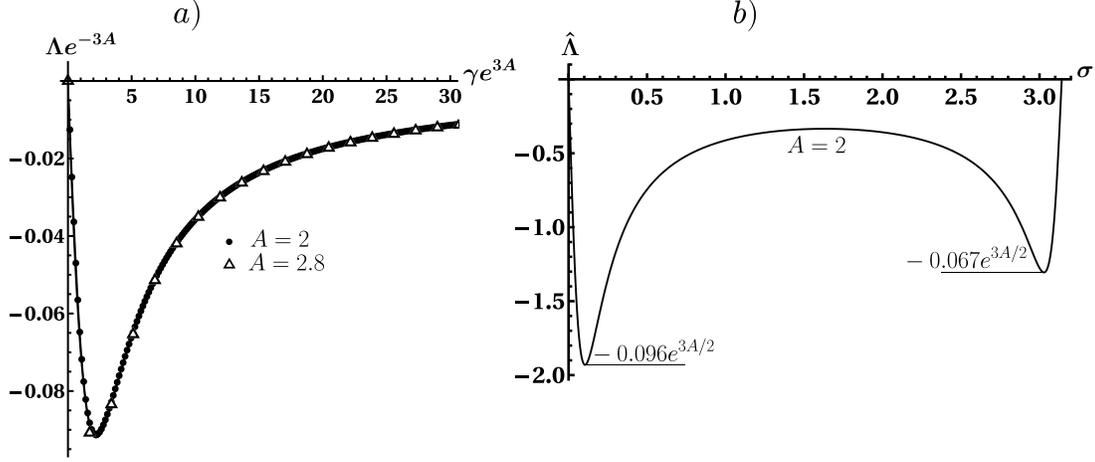


Рис. 3. а) Функции  $\bar{\Lambda}(\bar{\gamma})$  при  $A \geq 2$ , где  $\bar{\Lambda} = \Lambda e^{-3A}$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma e^{3A}$ . Маркерами обозначены расчетные точки. Диски нанесены при  $A = 2$ , треугольники — при  $A = 2.8$ . б) Функция  $\hat{\Lambda}(\sigma)$  при  $A = 2$ ,  $\varepsilon = 0.052$

при  $A \rightarrow \infty$ . Характер этого предельного перехода раскрывают графики на рис. 3, а). На этом рисунке изображены зависимости значений  $\bar{\Lambda} = \Lambda e^{-3A}$  от  $\bar{\gamma} = \gamma e^{3A}$  при  $A \geq 2$ . Маркерами обозначены расчетные точки. Графики имеют ярко выраженную точку минимума при  $\bar{\gamma} \approx 2.2$ , а сам минимум  $\bar{\Lambda} \approx -0.092$ . Таким образом, функция  $\bar{\Lambda}(\bar{\gamma})$  при  $A \geq 2$  перестает зависеть от  $A$ . Эта функция описывает локальное внутреннее решение вблизи гребня волны, близкой к предельной. Впервые течение, соответствующее этому решению, было исследовано в работе М.С. Лонгет-Хиггинса и М. Фокса [2].

Обозначим через  $\Lambda_{\min}$  значение функции  $\Lambda(\gamma)$  в точке  $\gamma = \gamma_{\min}$ . Тогда

$$\gamma_{\min} \approx 2.2e^{-3A}, \quad \Lambda_{\min} \approx -0.092e^{3A}. \quad (9)$$

Для того чтобы численное решение улавливало минимум, необходимо, чтобы в промежутке  $[0, \gamma_{\min}]$  помещалось несколько шагов сетки. Пусть  $m$  — число уместившихся шагов сетки. Поскольку шаг сетки  $h = \pi/(N+1)$ , получаем  $m = \lceil \gamma_{\min}/h \rceil = \lceil (N+1)\gamma_{\min}/\pi \rceil$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Из этой формулы выводим при  $N = 2^{13} - 1$ , что при  $A = 2$ ,  $m = 14$ , при  $A = 2.8$ ,  $m = 1$ , но при  $A = 2.9$ ,  $m = 0$  и численное решение перестает улавливать минимум. Этим объясняется сход рассчитанных значений  $c_*^2$  с асимптотической косинусоиды при  $A = 2.9$  на рис. 2, а).

### 3. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ НА СЕБЯ

Попытаемся улучшить ситуацию с точностью вычислений, для чего отобразим параметрический полукруг  $D_t$  на полукруг  $D_u$  с помощью дробно-линейной функции  $u = (t-a)/(1-at)$ , где  $0 < a < 1$  — неизвестный параметр. Такое отображение смещает образ бесконечно удаленной точки  $I$  течения с  $t = 0$  в плоскости  $t$  в  $u = -a$  в плоскости  $u$ , оставляя неподвижными образы точек  $C$  и  $T$  (см. рис. 1, с)). Обратное отображение  $t = (u+a)/(1+au)$ . Обозначим через  $\sigma$  полярный угол на полуокружности в области  $D_u$ . Связь между полярными углами  $\gamma$  и  $\sigma$  дается формулами

$$\sigma = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right], \quad \gamma = 2 \operatorname{arctg} \left[ \varepsilon \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \right], \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1-a}{1+a}. \quad (10)$$

Будем искать функцию  $\hat{\chi}(u) = \chi[(u+a)/(1+au)]$ . Обозначим  $\hat{\mu}(\sigma) = \text{Re } \hat{\chi}(e^{i\sigma})$ ,  $\hat{\tau}(\sigma) = \text{Im } \hat{\chi}(e^{i\sigma})$ ,  $\hat{\Lambda}(\sigma) = \hat{\mu}'(\sigma)$ . Краевые условия (5) для функции  $\hat{\chi}(u)$  остаются неизменными, а краевое условие (4) преобразуется к виду

$$\hat{\Lambda}(\sigma) = -Ef(\sigma)e^{3\hat{\mu}(\sigma)} \sin \hat{\tau}(\sigma), \quad \text{где } f(\sigma) = \frac{d\gamma}{d\sigma} = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \cos \sigma}. \quad (11)$$

Краевая задача (5), (11) для функции  $\hat{\chi}$  также сводится к системе трансцендентных уравнений (8). Необходимо лишь заменить  $\Lambda_i$  на  $\hat{\Lambda}_i$  и в первые  $N$  уравнений системы внести множители  $f_i = f(\sigma_i)$ ,  $\sigma_i = i\pi/(N+1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

На рис. 3, б) показана функция  $\hat{\Lambda}(\sigma)$  для значений  $A = 2$  и  $\varepsilon = 0.052$ . Из графика видно, что эта функция имеет два минимума. Пусть эти минимумы достигаются в точках  $\sigma_{1\min}$  и  $\sigma_{2\min}$ , а значения функции в этих точках  $\hat{\Lambda}_{1\min}$  и  $\hat{\Lambda}_{2\min}$ . Будем считать, что  $\varepsilon$  — малая величина. Замечаем, что на отрезке  $\gamma \in [\pi/4, \pi]$  при  $A \geq 2$  функция  $\Lambda(\gamma)$  хорошо аппроксимируется функцией  $\Lambda(\gamma) \approx -P \cot(\gamma/2)$ , где  $P = 0.14$ . Этот факт, формулы (9) и малость параметра  $\varepsilon$  позволяют провести асимптотический анализ и установить, что

$$\sigma_{1\min} \approx \frac{2.2}{\varepsilon} e^{-3A}, \quad \hat{\Lambda}_{1\min} \approx -0.092 \varepsilon e^{3A}, \quad \sigma_{2\min} \approx \pi - 2\varepsilon, \quad \hat{\Lambda}_{2\min} \approx -\frac{P}{2\varepsilon}. \quad (12)$$

В случае равномерной сетки наилучшее расположение минимумов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  достигается, когда они равноудалены от концов отрезка  $[0, \pi]$ . Отсюда и формул (12) выводим  $\varepsilon = 1.05e^{-3A/2}$ ,

$$\sigma_{1\min} \approx 2.1e^{-3A/2}, \quad \sigma_{2\min} \approx \pi - \sigma_{1\min}, \quad \hat{\Lambda}_{1\min} \approx -0.096e^{3A/2}, \quad \hat{\Lambda}_{2\min} \approx -0.067e^{3A/2}.$$

Величина  $\varepsilon = 0.052$  для рис. 3, б) получена по формуле  $\varepsilon = 1.05e^{-3A/2}$  при  $A = 2$ . Эта же формула использовалась и при других значениях  $A$ . На рис. 2, б) показана функция  $\Omega(A)$  при решении задачи в новой параметрической плоскости  $D_u$ . Здесь при определении значений  $c_*^2$  необходимо учитывать, что  $c_*^2 = \exp[-3\hat{\chi}(-a)]/E$ . Как видно из графика, результат улучшился по сравнению с графиком на рис. 2, а). Расчетные точки сходят с асимптотической косинусоиды при  $A > 4.9$ , а не при  $A > 2.8$ .

Отметим, что впервые преобразование координат (10) было предложено в работе ([7], формула (6)). Однако авторы приходят к этому преобразованию не из анализа выявления внутреннего решения Лонгет-Хиггинса и Фокса [2] при расчетах, а в результате исследования положения особенностей, возникающих при аналитическом продолжении функции  $z(w)$  из нижней полуплоскости, являющейся областью изменения комплексного потенциала  $w$ , в верхнюю полуплоскость.

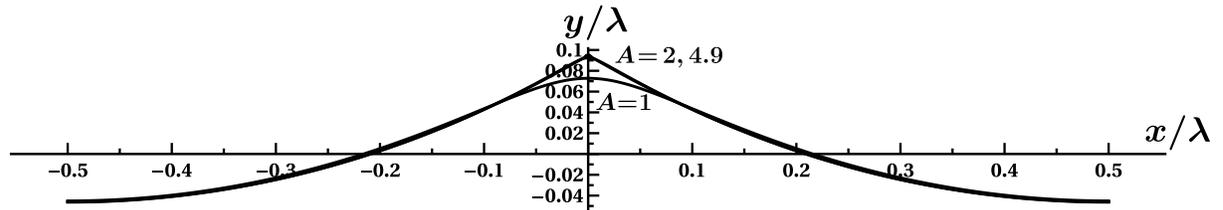


Рис. 4. Формы крутых волн при  $A = 1, 2, 4.9$

На рис. 4 показаны формы крутых волн. Ось абсцисс проведена по их средней линии. Как видно из рисунка, гладкость гребня волны невозможно увидеть в используемом масштабе уже при  $A = 2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Stokes G.G. *On the Theory of Oscillatory Waves*, Trans. Camb. Phil. Soc. **8**, 441–455 (1847).
- [2] Longuet-Higgins M.S., Fox M.J.H. *Theory of the almost-highest wave: the inner solution*, J. Fluid Mech. **80** (4), 721–741 (1977).
- [3] Longuet-Higgins M.S., Fox M.J.H. *Theory of the almost-highest wave, P. 2, Matching and analytical extension*, J. Fluid Mech. **85** (4), 769–786 (1978).
- [4] Maklakov D.V. *Almost-highest gravity waves on water of finite depth*, Euro. J. Appl. Math. **13** (1), 67–93 (2002).
- [5] Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости, 2-е изд.* (Наука, М., 1979).
- [6] Levi-Civita T. *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie*, Math. Ann. **93** (1), 264–314 (1925).
- [7] Lushnikov P.M., Dyachenko S.A., Silantyev D.A. *New conformal mapping for adaptive resolving of the complex singularities of Stokes wave*, Proc. R. Soc. Lond. A **473**, 20170198 (2017).

Дмитрий Владимирович Маклаков

Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,  
e-mail: dmaklak@kpfu.ru

Рамзан Валерьевич Казанцев

Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,  
e-mail: RamzVKazancev@kpfu.ru

*D.V. Maklakov and R.V. Kazantsev*

**Analysis of the formation of an inner solution near the crest of steep surface waves of infinite depth**

*Abstract.* Surface periodic waves of infinite depth are investigated. The boundary value problem is formulated in the parametric plane with respect to the Zhukovsky function. By making use of the discrete Fourier transform, the problem is reduced to a finite system of nonlinear transcendental equations. It is shown that with an increase in the steepness of the waves, an inner solution is formed near the crest, and under the corresponding scaling of the sought function this solution is independent of the steepness. It is shown that the numerical reproduction of the inner solution is a key factor for accurate calculations of the almost-highest gravity waves.

*Keywords:* surface wave, potential flow, inner solution.

*Dmitri Vladimirovich Maklakov*

*Kazan Federal University,*  
*18 Kremlyevskaya str., Kazan, 420008 Russia,*  
e-mail: dmaklak@kpfu.ru

*Ramzan Valeryevich Kazantsev*

*Kazan Federal University,*  
*18 Kremlyevskaya str., Kazan, 420008 Russia,*  
e-mail: RamzVKazancev@kpfu.ru