Известия вузов. Математика
2024, №12, с. 85–93

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р. ШАХ, Н. ИРШАД

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ХАЙЕРСА–УЛАМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Аннотация. Цель — представить результаты по устойчивости Хайерса–Улама–Рассиаса и устойчивости Хайерса–Улама для дифференциального уравнения Бернулли. Аргументация основывается на подходе с использованием неподвижной точки. Приводятся несколько примеров для иллюстрации основных результатов.

Ключевые слова: устойчивость Улама–Хайерса, дифференциальное уравнение Бернулли, подход с использованием неподвижной точки, обобщенное полное метрическое пространство, условие Липшица.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-85-93

Введение

За последние несколько лет тема исследования производных и дифференциальных уравнений получила широкое распространение благодаря их применению в различных областях чистой и прикладной математики. Стандарты дифференциальных уравнений бесконечны и предоставляют физические модели множества явлений в различных областях (см. [1]). Одни из первых результатов по устойчивости Хайерса–Улама для дифференциальных уравнений были получены М. Обложей [2], [3] и К. Алсиной и Р. Гером [4]. В работе [4] была доказана устойчивость Хайерса–Улама для дифференциального уравнения $\acute{y}(x) = y(x)$.

Устойчивость Хайерса–Улама является фундаментальной концепцией в изучении обыкновенных дифференциальных уравнений. Она гарантирует, что небольшие возмущения начальных условий или параметров не приведут к значительным изменениям решений с течением времени. Поэтому эта концепция особенно важна для исследования численных и приближенных решений, а также для реальных приложений дифференциальных уравнений. Устойчивость Хайерса–Улама предоставляет основу для анализа устойчивости множества функциональных уравнений, включая уравнения в различных областях математики, таких как функциональный анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел. Это находит применение в биологии, оптимизации и экономике (например, в случаях, когда получение точного решения достаточно затруднительно). Устойчивость Хайерса–Улама для дифференциальных уравнений первого порядка была исследована в нескольких работах С.М. Чжуна [5]–[7]. Устойчивость Хайерса–Улама для дифференциальных уравнений второго и третьего порядков также изучалась рядом математиков [8]–[12]. Некоторые недавние результаты по устойчивости Хайерса–Улама для дифференциальных уравнений были сформулированы и доказаны в работах [13]–[19].

Поступила в редакцию 31.12.2023, после доработки 24.03.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Вдохновленные интересными и значительными результатами, представленными в вышеупомянутом обзоре литературы, мы в данной работе уделили основное внимание изучению устойчивости типа Улама для дифференциального уравнения Бернулли. Пусть $(\mathbb{B}, |.|)$ — (вещественное или комплексное) банахово пространство, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p, q \in C([a, b], \mathbb{B})$ и $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

В данной работе мы будем исследовать дифференциальное уравнение Бернулли

$$y'(x) = q(x)y^n(x) - p(x)y(x) \text{ для всех } x \in I = [a, b]. \tag{1}$$

1. Предварительные результаты

В этом разделе кратко обсуждаются некоторые основные концепции, представленные в литературе. Для непустого множества X введем следующее

Определение 1 ([20]). Отображение $d : X \times X \to [0, \infty]$ называется обобщенной метрикой на множестве X тогда и только тогда, когда для d выполняются следующие свойства:
(C_1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
(C_2) $d(x, y) = d(y, x)$ для всех $x, y \in X$;
(C_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$.

Для доказательства наших основных результатов нам понадобится

Теорема 1 ([21]). *Пусть (X, d) — обобщенное полное метрическое пространство. Предположим, что $T : X \to X$ является строго сжимающим оператором с липшицевой константой $L < 1$. Если существует неотрицательное целое число k такое, что*

$$d(T^{k+1}x, T^k x) < \infty$$

для некоторого $x \in X$, то выполняются следующие утверждения:
a) *последовательность $T^n x$ сходится к неподвижной точке x^* оператора T*;
b) *x^* является единственной неподвижной точкой оператора T в*

$$X^* = \Big\{ y \in X \mid d\big(T^k x, y\big) < \infty \Big\};$$

c) *для $y \in X^*$*

$$d(y, x^*) \leq \frac{1}{1 - L}\, d(Ty, y).$$

Приведем теперь определения устойчивости Хайерса–Улама–Рассиаса и Хайерса–Улама для дифференциального уравнения Бернулли (1).

Определение 2. Если для любой непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$\big| y'(x) - q(x)y^n(x) + p(x)y(x) \big| \leq \phi(x)$$

для некоторых $\phi : I \to (0, \infty)$ и $p, q \in C([a, b], \mathbb{B})$, существуют решение $y_0(x)$ дифференциального уравнения Бернулли (1) и константа $K > 0$ такие, что

$$\big| y(x) - y_0(x) \big| \leq K\phi(x)$$

для всех $x \in I$, где K не зависит от $y(x)$ и $y_0(x)$, то говорят, что дифференциальное уравнение Бернулли (1) обладает устойчивостью Хайерса–Улама–Рассиаса. Если же $\phi(x)$ является постоянной функцией в вышеуказанных неравенствах, то говорят, что дифференциальное уравнение Бернулли (1) обладает устойчивостью Хайерса–Улама.

В данной работе, используя идею Л. Кадариу и В. Раду [22], мы изучаем результаты по устойчивости типа Улама для дифференциального уравнения Бернулли (1).

2. Результаты по устойчивости дифференциального уравнения Бернулли

В этом разделе, используя идею Кадариу и Раду [22], мы докажем устойчивость Хайерса–Улама и Хайерса–Улама–Рассиаса для дифференциального уравнения Бернулли (1).

2.1. **Устойчивость Хайерса–Улама–Рассиаса.** Докажем устойчивость Хайерса–Улама–Рассиаса для дифференциального уравнения Бернулли (1).

Теорема 2. *Для данных вещественных чисел a и b, $a < b$, пусть $I = [a, b]$ — замкнутый интервал, выберем в нем точку $c \in I$. Пусть K и L — положительные константы такие, что $0 < KL < 1$. Пусть $p, q \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ — непрерывные функции, удовлетворяющие следующему условию Липшица:*

$$\big|[q(x)y^n(x) - p(x)y(x)] - [q(x)z^n(x) - p(x)z(x)]\big| \leq L\big|y(x) - z(x)\big| \tag{2}$$

для любых $x \in I$ и $y, z \in \mathbb{R}$.
Если непрерывно дифференцируемая функция $y : I \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\big|y'(x) - q(x)y^n(x) + p(x)y(x)\big| \leq \phi(x) \tag{3}$$

для всех $x \in I$, где $\phi : I \to (0, \infty)$ — непрерывная функция такая, что

$$\left|\int_c^x \phi(\tau)d(\tau)\right| \leq K\phi(x) \tag{4}$$

для всех $x \in I$, то существует единственная непрерывная функция $y_0 : I \to \mathbb{R}$ такая, что

$$y_0(x) = y(c) + \int_c^x (q(\tau)y_0^n(\tau) - p(\tau)y_0(\tau))d\tau \tag{5}$$

(*следовательно, y_0 является решением* (1)) *и*

$$\big|y(x) - y_0(x)\big| \leq \frac{K}{1 - KL}\phi(x) \tag{6}$$

для всех $x \in I$.

Доказательство. Определим X как множество всех непрерывных функций $f : I \to \mathbb{R}$ формулой

$$X = \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ — непрерывная функция}\} \tag{7}$$

и введем на X обобщенную метрику следующим образом:

$$d(f, g) = \inf\{C \in [0, \infty], |f(x) - g(x)| \leq C\phi(x) \, \text{для всех} \, x \in I\}. \tag{8}$$

(Приведем здесь доказательство неравенства треугольника. Пусть $d(f, g) > d(f, h) + d(h, g)$ выполняется для некоторых $f, g, h \in X$. Тогда должен существовать $x_0 \in I$ такой, что

$$|f(x_0) - g(x_0)| > \{d(f, h) + d(h, g)\}\phi(x_0) = d(f, h)\phi(x_0) + d(h, g)\phi(x_0).$$

Ввиду равенства (8) это дает нам неравенство

$$\big|f(x_0) - g(x_0)\big| > \big|f(x_0) - h(x_0)\big| + \big|h(x_0) - g(x_0)\big|,$$

получаем противоречие.)

Мы предполагаем, что (X, d) — полное метрическое пространство. Пусть $\{h_n\}$ — фундаментальная последовательность в (X, d). Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует целое число $N_\epsilon > 0$ такое, что $d(h_m, h_n) \leq \epsilon$ для всех $m, n \geq N_\epsilon$.
В силу (8) имеем

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in N \quad \forall m, n \geq N_\epsilon, \quad \forall x \in I : |h_m(x) - h_n(x)| \leq \epsilon\phi(x). \tag{9}$$

Если x зафиксирован, то из формулы (9) вытекает, что $\{h_n(x)\}$ является фундаментальной последовательностью в $\mathbb{R}$. Поскольку $\mathbb{R}$ является полным, $\{h_n(x)\}$ сходится для любого $x \in I$. Таким образом, можно определить функцию $h : I \to \mathbb{R}$ формулой

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

Если позволить m возрастать до бесконечности, то из формулы (9) будет следовать, что

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in N \quad \forall n \geq N_\in, \quad \forall x \in I : |h(x) - h_n(x)| \leq \epsilon\phi(x), \tag{10}$$

т. е. поскольку ϕ ограничена на I, то $\{h_n\}$ сходится равномерно к h. Значит, h является непрерывной и $h \in X$.

Далее, рассматривая (8) и (10), получаем

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in N \quad \forall n \geq N_\epsilon : d(h, h_n) \leq \epsilon.$$

Это означает, что фундаментальная последовательность $\{h_n\}$ сходится к h в (X, d). Следовательно, (X, d) является обобщенным полным метрическим пространством.

Определим теперь оператор $T : X \to X$ формулой

$$(Tf)(x) = y(c) + \int_c^x (q(\tau)f^n(\tau) - p(\tau)f(\tau))d\tau \tag{11}$$

для всех $f \in X$ и $x \in I$. Действительно, согласно фундаментальной теореме математического анализа Tf непрерывно дифференцируема на I, поскольку p, q и f — непрерывные функции. Таким образом, Tf принадлежит X. Покажем далее, что оператор является строго сжимающим на множестве X. Предположим, что $f, g \in X$, и пусть $C_{fg} \in [0, \infty]$ — константа такая, что $d(f, g) \leq C_{fg}$ для всех $f, g \in X$.

Учитывая формулу (8), можем записать для всех $x \in I$

$$\big|f(x) - g(x)\big| \leq C_{fg}\phi(x). \tag{12}$$

Тогда из (2), (4), (8), (11) и (12) следует

$$\begin{gathered}
|(Tf)(x) - (Tg)(x)| = \bigg|y(c) + \int_c^x \big(q(\tau)f^n(\tau) - p(\tau)f(\tau)\big)d\tau - \\
-y(c) - \int_c^x \big(q(\tau)g^n(\tau) - p(\tau)g(\tau)\big)d\tau\bigg| \leq \\
\leq \left|\int_c^x \Big|\big(q(\tau)f^n(\tau) - p(\tau)f(\tau)\big) - \big(q(\tau)g^n(\tau) + p(\tau)g(\tau)\big)\Big|d\tau\right| \leq \\
\leq \left|\int_c^x L|f(\tau) - g(\tau)|d\tau\right| \leq LC_{fg}\left|\int_c^x \phi(\tau)d\tau\right| = KLC_{fg}\phi(x).
\end{gathered}$$

Отсюда

$$\Big|(Tf)(x) - (Tg)(x)\Big| \leq KLC_{fg}\phi(x)$$

для всех $x \in I$, т. е.

$$d(Tf, Tg) \leq KLC_{fg}.$$

Таким образом, можно заключить, что $d(Tf, Tg) \leq KLd(f, g)$ для любых $f, g \in X$, где $0 < KL < 1$. Пусть задана функция $g_0 \in X$ (произвольно). Согласно формулам (7) и (11) существует константа $0 < C < \infty$ такая, что

$$|Tg_0(x) - g_0(x)| = \left|y(c) + \int_c^x \big(q(\tau)g_0^n(\tau) - p(\tau)g_0(\tau)\big)d\tau - g_0(x)\right| \quad \forall x \in I,$$

поскольку $q(x)g_0^n(x) - p(x)g_0(x)$ и $g_0(x)$ ограничены на I и $\min_{x\in I}\phi(x) > 0$. Таким образом, согласно (8)

$$d(Tg_0, g_0) < \infty.$$

Тогда ввиду утверждения a) теоремы 1 существует непрерывная функция $y_0 : I \to \mathbb{R}$ такая, что $T^n g_0 \to y_0$ в (X, d) и $Ty_0 = y_0$, т. е. y_0 удовлетворяет уравнению (5) для всех $x \in I$.

Теперь покажем, что $\{g \in X | d(g_0, g) < \infty\} = X$. Для любой $g \in X$, поскольку g и g_0 ограничены на I и $\min_{x\in I}\phi(x) > 0$, существует константа $0 < C_g < \infty$ такая, что

$$|g_0(x) - g(x)| \le C_g \phi(x)$$

для всех $x \in I$. Таким образом, мы можем записать $d(g_0, g) < \infty$ для всех $g \in X$. Следовательно, получаем $\{g \in X | d(g_0, g) < \infty\} = X$. Из утверждения b) теоремы 1 вытекает, что функция y_0, заданная уравнением (5), является единственной непрерывной функцией.

С другой стороны, в силу (3)

$$-\phi(x) \le y'(x) - q(x)y^n(x) + p(x)y(x) \le \phi(x)$$

для всех $x \in I$. Если проинтегрировать каждое слагаемое в неравенстве выше от c до x, затем использовать (4) и (11), то мы получим

$$\big|y(x) - (Ty)(x)\big| \le \left|\int_c^x \phi(\tau)d(\tau)\right| \le K\phi(x)$$

для всех $x \in I$, откуда следует

$$d(y, Ty) \le K. \tag{13}$$

Наконец, ввиду утверждения c) теоремы 1 и неравенства (13) получаем

$$d(y, y_0) \le \frac{1}{1-KL} d(Ty, y) \le \frac{K}{1-KL},$$

что означает верность неравенства (6) для всех $x \in I$. □

2.2. **Устойчивость Хайерса–Улама.** С использованием идеи Кадариу и Раду [22] мы докажем устойчивость Хайерса–Улама для дифференциального уравнения Бернулли (1).

Теорема 3. *Для заданных $c \in \mathbb{R}$ и $r > 0$ определим I как замкнутый шар радиуса r с центром в c, т. е. $I = \{x \in \mathbb{R} | c - r \le x \le c + r\}$, и пусть $p, q \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условию Липшица (2) для всех $x \in I$ и $y, z \in \mathbb{R}$, где L — константа, причем $0 < Lr < 1$. Если непрерывно дифференцируемая функция $y : I \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству*

$$\big|y'(x) - q(x)y^n(x) + p(x)y(x)\big| \le \epsilon \tag{14}$$

для всех $x \in I$ и для некоторого $\epsilon \ge 0$, то существует единственная непрерывная функция $y_0 : I \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению (5) (y_0 является решением (1)), причем

$$\big|y(x) - y_0(x)\big| \le \frac{r}{1 - Lr}\,\epsilon \tag{15}$$

для всех $x \in I$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$X = \{f : I \to \mathbb{R} |\, f \text{ — непрерывная функция}\}$$

и введем на нем обобщенную метрику следующим образом:

$$d(f, g) = \inf\{C \in [0, \infty], |f(x) - g(x)| \le C \text{ для всех } x \in I\}.$$

Очевидно, (X, d) является обобщенным полным метрическим пространством (см. доказательство теоремы 2). Рассмотрим оператор $T : X \to X$, заданный формулой

$$(Tf)(x) = y(c) + \int_c^x \big(q(\tau)f^n(\tau) - p(\tau)f(\tau)\big)d\tau \tag{16}$$

для всех $f \in X$ и $x \in I$. Таким образом, получаем $Tf \in X$.

Проверим теперь, что оператор T является строго сжимающим на множестве X. Предположим, что $C_{fg} \in [0, \infty]$ — константа, для которой $d(f, g) \le C_{fg}$ при любых $f, g \in X$. Имеем

$$\big|f(x) - g(x)\big| \le C_{fg} \quad \text{для всех} \quad x \in I. \tag{17}$$

Более того, из (2), (16) и (17) следует

$$\big|(Tf)(x) - (Tg)(x)\big| \le LrC_{fg}$$

для всех $x \in I$, т. е. $d(Tf, g) \le LrC_{fg}$. Значит, $d(Tf, Tg) \le Lrd(f, g)$ для всех $f, g \in X$, где $0 < Lr < 1$.

Используя те же выкладки, что и в теореме 2, мы можем выбрать такую функцию $g_0 \in X$, что $d(Tg_0, g_0) < \infty$. Следовательно, из утверждения a) теоремы 1 получаем существование непрерывной функции, скажем, $y_0 : I \to \mathbb{R}$ такой, что $T^n g_0 \to y_0$ в (X, d) при $n \to \infty$, и такой, что $y_0 = Ty_0$, т. е. y_0 удовлетворяет уравнению (5) для любого $x \in I$.

Если $g \in X$, то g_0 и g — непрерывные функции, заданные на I. Значит, существует константа $C > 0$ такая, что

$$\big|g_0(x) - g(x)\big| \le C \ \ \forall\, x \in I.$$

Отсюда $d(g_0, g) < \infty$ для любой $g \in X$ или, эквивалентно, $X = \{g \in X | d(g_0, g) < \infty\}$. Следовательно, ввиду утверждения b) теоремы 1 функция y_0 является единственной непрерывной функцией со свойством (5). Более того, согласно (14)

$$-\epsilon \le y'(x) - q(x)y^n(x) + p(x)y(x) \le \epsilon \ \ \text{для всех}\, x \in I.$$

Если проинтегрировать каждое слагаемое в вышеприведенном неравенстве от c до x, получим

$$\big|(Ty)(x) - y(x)\big| \le \epsilon r \ \text{для всех}\, x \in I,$$

т. е. выполняется неравенство $d(Ty, y) \le \epsilon r$.

Теперь из утверждения c) теоремы 1 вытекает

$$d(y, y_0) \le \frac{1}{1 - Lr} d(Ty, y) \le \frac{r}{1 - Lr}\, \epsilon,$$

откуда следует верность (15) для всех $x \in I$. □

2.3. **Примеры.** Рассмотрим два примера, иллюстрирующие применение наших результатов к конкретным задачам.

Пример 1. Пусть $I = [0, 3K - \epsilon]$ — замкнутый интервал, где $0 < \epsilon < 3K$, и пусть K, L — положительные константы, $0 < KL < 1$. Рассмотрим дифференциальное уравнение Бернулли

$$y'(x) = y^2 - xy. \tag{18}$$

Имеем $p(x) = x$ и $q(x) = 1$. Для двух многочленов $p(x)$ и $q(x)$ предположим, что непрерывно дифференцируемая функция $y : I \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\big|y'(x) - y^2 + xy\big| \le x^2 + \epsilon \ \text{для всех}\, x \in I.$$

Если взять $q(x)y^n - p(x)y = y^2 - xy$ и $\phi(x) = x^2 + \epsilon$, то данное неравенство идентично неравенству (3). Более того, получаем

$$\left|\int_0^x \phi(\tau)d\tau\right| = \left|\int_0^x (\tau^2+\epsilon)d\tau\right| = \frac{x^3}{3} + \epsilon x \leq K\phi(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Поскольку $K\phi(x) - \dfrac{x^3}{3} - \epsilon x \geq 0$ для всех $x \in I$. Тогда по теореме (2) существует единственная непрерывная функция $y_0 : I \to \mathbb{R}$ такая, что

$$y_0(x) = y(0) + \int_0^x \big(y_0^2(\tau) - \tau y_0(\tau)\big)d\tau$$

и

$$\big|y(x) - y_0(x)\big| \leq \frac{K}{1-KL}(x^2+\epsilon)$$

для всех $x \in I$. Таким образом, дифференциальное уравнение Бернулли (18) устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу.

Пример 2. Пусть r и L — две положительные константы, $0 < Lr < 1$, определим замкнутый интервал $I = \{x \in \mathbb{R} : c - r \leq x \leq c + r\}$ для некоторого вещественного числа c. Предположим, что непрерывно дифференцируемая функция $y : I \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\big|y'(x) - y^2 + xy\big| \leq \epsilon$$

для всех $x \in I$ и некоторого $\epsilon \geq 0$. В свете теоремы 2 существует единственная непрерывная функция $y_0 : I \to \mathbb{R}$ такая, что

$$y_0(x) = y(c) + \int_c^x \big(y_0^2(\tau) - \tau y_0(\tau)\big)d\tau$$

и

$$\big|y(x) - y_0(x)\big| \leq \frac{r}{1-Lr}\epsilon \ \ \forall\, x \in I.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение Бернулли (18) устойчиво по Хайерсу–Уламу.

Заключение

Предложены новые типы концепций устойчивости типа Улама для дифференциального уравнения Бернулли. Используя подход с неподвижной точкой в обобщенном полном метрическом пространстве, мы доказали результаты об устойчивости на конечном интервале. Приведены примеры, демонстрирующие применимость полученных результатов.

Литература

[1] Momoniat E., Myers T.G., Banda M., Charpin J. *Differential Equation with Applications to Industry*, Int. J. Diff. Equat. Article ID 491874 (2012).

[2] Obloza M. *Hyers stability of the linear differential equation*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prac. Mat. (13), 259–270 (1993).

[3] Obloza M. *Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prac. Mat. (14), 141–146 (1997).

[4] Alsina C., Ger R. *On Some Inequalities and Stability Results Related to the Exponential Function*, J. Inequal. Appl. **2** (4), 373–380 (1998).

[5] Jung S.-M. *Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order*, Appl. Math. Lett. **17** (10), 1135–1140 (2004).

[6] Jung S.M. *Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order,* III, J. Math. Anal. Appl. **311** (1), 139–146 (2005).

[7] Jung S.M. *Hyers–Ulam stability of linear differential equations of first order,* II, Appl. Math. Lett. **19** (9), 854–858 (2006).

[8] Abdollahpour M.R., Najati A. *Stability of linear differential equations of third order*, Appl. Math. Lett. **24** (11), 1827–1830 (2011).

[9] Abdollahpour M.R., Park C. *Hyers–Ulam stability of a class of differential equations of second order*, J. Comput. Anal. Appl. **18** (5), 899–903 (2015).

[10] Abdollahpour M.R., Najati A., Park C., Rassias T.M., Shin D.Y. *Approximate perfect differential equations of second order*, Adv. Diff. Equat. **2012** (225) (2012).

[11] Gordji M.E., Cho Y.J., Ghaemi M.B., Alizadeh B. *Stability of the exact second order partial differential equations*, J. Inequal. Appl. **2011** (8) (2011).

[12] Li Y., Shen Y. *Hyers–Ulam stability of linear differential equations of second order*, Appl. Math. Lett. **23** (3), 306–309 (2010).

[13] Lv J., Wang J., Liu R. *Hyers–Ulam stability of linear quaternion–valued differential equations*, Electronic J. Diff. Equat. (21), 1–15 (2023).

[14] Suo L., Feckan M., Wang J. *Controllability and observability for linear quaternion–valued impulsive differential equations*, Commun. Nonlinear Sci. and Numerical Simulation **124**, article 107276 (2023).

[15] Suo L., Wang J. *Stability of quaternion–valued impuslive differential equations*, Rocky Mountain J. Math. **53** (1), 209–240 (2023).

[16] Idriss E., Belaid B. *Ulam–Hyers stability of some linear differential equations of second order*, Examples and Counterexamples **3**, article 100110 (2023).

[17] Ciplea S.A., Lungu N., Marian D. *Hyers–Ulam stability of a general linear partial differential equation*, Aequat. Math. **97**, 649–657 (2023).

[18] Fakunle I., Arawomo P.O. *Hyers–Ulam–Rassias stability of some perturbed nonlinear second order ordinary differential equations*, Proyecciones J. Math. (Antofagasta) **42** (5), 1157–1175 (2023).

[19] Makhlouf A.B., El-hady E., Arfaoui H., Boulaaras S., and Mchiri L. *Stability of some generalized fractional differential equations in the sense of Ulam–Hyers–Rassias*, Bound Value Probl. **2023** (8) (2023).

[20] Luxemburg W.A.J. *On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations,* II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **20**, 540–546 (1958).

[21] Diaz J.B., Margolis B. *A fixed point theorem of the alternative, for contractions on a generalized complete metric space*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (2), 305–309 (1968).

[22] Cădariu L., Radu V. *On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed point approach*, Grazer Math. Ber. **346**, 43–52 (2004).

Рахим Шах

Университет Кохсар в Мурри,
Мурри, 25000, Пакистан,

e-mail: rahimshah@kum.edu.pk, shahraheem1987@gmail.com

Наташа Иршад

Университет Кохсар в Мурри,
Мурри, 25000, Пакистан,

e-mail: natashairshad24@gmail.com

R. Shah and N. Irshad

On the Hyers–Ulam stability of Bernoulli's differential equation

Abstract. The aim of this paper is to present the results on the Hyers–Ulam–Rassias stability and the Hyers–Ulam stability for Bernoulli's differential equation. The argument makes use of a fixed point approach. Some examples are given to illustrate the main results.

Keywords: Ulam–Hyers stability, Bernoulli's differential equation, fixed point approach, generalized complete metric space, Lipschitz condition.

Rahim Shah

Kohsar University Murree,
Murree, 25000 Pakistan,

`e-mail:` rahimshah@kum.edu.pk, shahraheem1987@gmail.com

Natasha Irshad

Kohsar University Murree,
Murree, 25000 Pakistan,

`e-mail:` natashairshad24@gmail.com