Известия вузов. Математика
2024, № 12, с. 71–84
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Н. СЕСЕКИН, А.Д. КАНДРИНА, Н.В. ГРЕДАСОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ХАЙЕРСУ–УЛАМУ–РАССИАСУ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Для линейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, подверженных обобщенному воздействию, предложена формализация понятия устойчивости по Хайерсу–Уламу–Рассиасу. Рассмотрены случаи, когда система имеет единственную реакцию на обобщенное воздействие и когда реакция системы не единственна. Установлены достаточные условия такой устойчивости для рассматриваемых систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: устойчивость по Хайерсу–Уламу–Рассиасу, обобщенное воздействие, запаздывание, линейная система.

УДК: 517.929

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-71-84

Введение

Понятие Улам-устойчивости восходит в выступлению С.М. Улама в 1940 г. в Университете Висконсина, поставившему вопрос: когда существует аддитивное отображение вблизи приближенного аддитивного отображения. Эти рассуждения приведены в шестой главе [1], посвященной понятию устойчивости. В 1941 г. Д.Х. Хайерс опубликовал работу [2], в которой дал ответ на вопрос С.М. Улама для аддитивных функций, определенных на банаховых пространствах. В результате появилось понятие устойчивости по Хайерсу–Уламу для функциональных уравнений. В работе [3] впервые были проведены исследования понятия устойчивости по Хайерсу–Уламу для дифференциальных уравнений. Т.М. Рассиас в [4] расширил понятие устойчивости по Хайерсу–Уламу, которое в последствии стало называться устойчивостью по Хайерсу–Уламу–Рассиасу. Различные варианты определения понятия Улам-устойчивости для дифференциальных уравнений можно посмотреть в [5]. Здесь имеется библиография статей, в которых рассматриваются различные классы дифференциальных уравнений, где рассматривается свойство Улам-устойчивости. Исследования Улам-устойчивости для задач о неподвижных точках и о точках совпадений многозначных отображений рассматривались в [6], [7]. Настоящая работа посвящена изучению свойства устойчивости по Хайерсу–Уламу–Рассиасу линейных систем дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием — обобщенной производной функции ограниченной

Поступила в редакцию 08.01.2024, после доработки 08.01.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00714.

вариации в правой части системы — и запаздыванием. Вопрос об устойчивости дифференциальных уравнений по Хайерсу–Уламу–Рассиасу с абсолютно непрерывными траекториями и с запаздыванием рассматривались, например, в [8]. Особенностью данной работы является то, что правая часть дифференциального уравнения содержит обобщенные воздействия — обобщенные производные функций ограниченной вариации. Понятие решения строится с помощью замыкания множества гладких аппроксимаций решений в пространстве функций ограниченной вариации [9], [10]. Свойство устойчивости по Хайерсу–Уламу для линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка и нелинейных систем без запаздывания в уравнении рассматривались в [11]–[13]. В этой статье обобщаются результаты работы [14] на линейные системы дифференциальных уравнений. Для формализации импульсных систем, предложенной А.М. Самойленко и Н.А. Перестюком (см. [15]), устойчивость систем по Хайерсу–Уламу рассматривалась в [16].

Для дифференциальных уравнений с запаздыванием понятие устойчивости по Хайерсу–Уламу–Рассиасу определяется следующим образом (см., например, [8]).

Определение 1. Уравнение
$$\dot{x}\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right),x(t-\tau)\right) \tag{1}$$
устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу на $[t_0-\tau,\vartheta]$ относительно неубывающей положительной функции $\varphi(t)$, если существует число $c_f>0$ такое, что $\forall\ \varepsilon>0$ и для каждого решения неравенства
$$\left|y^{'}(t)-f\left(t,y\left(t\right),y(t-\tau)\right)\right|\leq\varepsilon\varphi(t),\quad t\in[t_0,\vartheta],$$
существует решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенству
$$|y\left(t\right)-x(t)|\leq c_f\varepsilon\varphi(t),\quad t\in[t_0-\tau,\vartheta],$$
$x(t)=\omega(t)$ для $t\in[t_0-\tau,t_0]$, т. е. $\omega(t)$ — начальная функция для уравнения (1).

Заметим, что в связи с тем, что у рассматриваемой в этой статье системы дифференциальных уравнений правая часть является неограниченной, то такое определение не применимо и его следует корректировать.

1. Устойчивость по Хайерсу–Уламу–Рассиасу линейных систем в случае единственности реакции на обобщенное воздействие

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:
$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_\tau(t)x(t-\tau)+B\dot{v}(t), \tag{2}$$
где $x(t)$, $v(t)$ — соответственно n- и m-мерные функции времени, $A(t)$, $A_\tau(t)$ и — непрерывные $n\times n$ матрицы-функции, $x(t)=\omega(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0]$, $\omega(t)$ есть начальная n-мерная функция ограниченной вариации, порождающая решение задачи Коши уравнения (2), $v(t)$ — m-мерная функция, B — постоянная $n\times m$-матрица. Решение уравнения рассматривается на отрезке $[t_0,\vartheta]$. Если функция $v(t)$ является абсолютно непрерывной, то при сделанных предположениях существует единственное решение уравнения (2) на отрезке $[t_0,\ \ \vartheta]$.

Под решением уравнения (2) в случае, когда $v(t)$ будет функцией ограниченной вариации, будем понимать решение интегрального уравнения
$$x(t)=\omega(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(A(\xi)x(\xi)+A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\right)d\xi+Bv(t). \tag{3}$$
Для определенности будем считать, что $v(t_0)=0$.

Определение 2. Уравнение (2) устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу относительно неубывающей непрерывной функции $\varphi(t)$ на отрезке $[t_0-\tau,\vartheta]$, если существует число $c_f>0$ такое, что $\forall\ \varepsilon>0$ и для каждого решения неравенства

$$\left|y(t)-y(t_0)-\int_{t_0}^{t}A(\xi)y(\xi)\,d\xi-\int_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)y(\xi-\tau)\,d\xi-Bv(t)\right|\le\varepsilon\varphi(t),\ \ t\in[t_0,\vartheta] \tag{4}$$

(вектор-функция $y(t)$ определена на $[t_0-\tau,\vartheta]$), найдется решение $x(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее неравенству

$$|y(t)-x(t)|\le c_f\varepsilon\varphi(t),\quad t\in[t_0-\tau,\ \vartheta],$$

где $x(t)=\omega(t)$ для $t\in[t_0-\tau,t_0]$, $\omega(t)$ — начальная функция для уравнения (3).

Справедлива

Теорема 1. *При сделанных предположениях дифференциальное уравнение* (2) *устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу.*

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение неравенства (4) и $x(t)$ — решение уравнения (3). Рассмотрим разность

$$|y(t)-x(t)|=\left|y(t)-\omega(t_0)-\int_{t_0}^{t}A(\xi)x(\xi)\,d\xi-\int_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\,d\xi-Bv(t)\right|.$$

Добавляя и вычитая в правой части выражение

$$y(t_0)+\int_{t_0}^{t}A(\xi)y(\xi)\,d\xi+\int_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)y(\xi-\tau)\,d\xi+Bv(t),$$

после группировки и применения неравенства треугольника получим

$$|y(t)-x(t)|\le\left|y(t)-y(t_0)+\int_{t_0}^{t}A(\xi)y(\xi)\,d\xi+\int_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)y(\xi-\tau)\,d\xi-Bv(t)\right|+$$

$$+\left|\int_{t_0}^{t}A(\xi)(y(\xi)-x(\xi))\,d\xi\right|+\left|\int_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)(y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau))\,d\xi\right|+|y(t_0)-\omega(t_0)|.$$

Принимая во внимание (4), из последнего неравенства имеем

$$|y(t)-x(t)|\le\varepsilon\varphi(t)+\int_{t_0}^{t}||A(\xi)||\cdot|y(\xi)-x(\xi)|\,d\xi+$$

$$+\int_{t_0}^{t}||A_\tau(\xi)||\cdot|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\,d\xi+|y(t_0)-\omega(t_0)|.$$

Теперь увеличим правую часть неравенства, заменяя $||A(t)||$ и $||A_\tau(t)||$, соответственно, на $\max_{[t_0,t]}||A(\cdot)||$ и $\max_{[t_0,t]}||A_\tau(\cdot)||$, и вынесем их из под интеграла. Выберем в качестве начальной функции для $x(t)$

$$\omega(t)=y(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0]. \tag{5}$$

Тогда

$$|y(t)-x(t)|\le\varepsilon\varphi(t)+\max_{[t_0,\vartheta]}||A(\cdot)||\int_{t_0}^{t}|y(\xi)-x(\xi)|\,d\xi+\max_{[t_0,\vartheta]}||A_\tau(\cdot)||\int_{t_0}^{t}|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\,d\xi. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\mu(t)=\sup_{\xi\in[t_0,t]}|y(\xi)-x(\xi)|. \tag{7}$$

Используемый ниже прием получения оценки на решение уравнения с запаздыванием использовался ранее в [17]. Пусть $\sup_{\xi\in[t_0,t]}|y(\xi)-x(\xi)|$ на отрезке $[t_0,t]$ достигается в точке t^*. Поэтому

$$\mu(t)=\sup_{\xi\in[t_0,t]}|y(\xi)-x(\xi)|=\max\{|y(t^*-0)-x(t^*-0)|;|y(t^*)-x(t^*)|;|y(t^*+0)-x(t^*+0)|\}.$$

Тогда из (6) с учетом введенного обозначения (7) имеем

$$\mu(t^*)\le\varepsilon\varphi(t^*)+\max_{[t_0,\vartheta]}||A(\cdot)||\int_{t_0}^{t^*}|y(\xi)-x(\xi)|\,ds+\max_{[t_0,\vartheta]}||A_\tau(\cdot)||\int_{t_0}^{t^*}|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\,d\xi.$$

Принимая во внимание, что правая часть неравенства — непрерывная неубывающая функция, получаем

$$\mu(t)\le\varepsilon\varphi(t)+\max_{[t_0,\vartheta]}||A(\cdot)||\int_{t_0}^{t}|y(\xi)-x(\xi)|\,d\xi+\max_{[t_0,\vartheta]}||A_\tau(\cdot)||\int_{t_0}^{t}|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\,d\xi. \quad (8)$$

Далее будем использовать обозначение

$$M=\max\Big\{\max_{[t_0,\vartheta]}||A(\cdot)||;\max_{[t_0,\vartheta]}||A_\tau(\cdot)|\Big\}. \quad (9)$$

Заметим, принимая во внимание (5), что

$$|y(\xi)-x(\xi)|\le\mu(\xi)\ \text{ и }\ |y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\le\mu(\xi) \quad (10)$$

для $\xi\in[t_0,\vartheta]$. С учетом обозначения (9) и неравенства (10) правую часть неравенства (8) можно увеличить, в результате получим неравенство

$$\mu(t)\le\varepsilon\varphi(t)+2M\int_{t_0}^{t}\mu(s)\,ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла к последнему неравенству, имеем

$$\mu(t)\le\varepsilon\varphi(t)e^{2M(t-t_0)},$$

что и доказывает теорему $\big(c_f=e^{2M(\vartheta-t_0)}\big)$. □

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot x(t)=\bar A(t)x(t)+A_\tau(t)x(t-\tau)+f(t). \quad (11)$$

Здесь

$$\bar A(t)=A(t)+\sum_{j=1}^{m}D_j(t)\dot v_i(t),$$

$A(t)$, A_τ, $D_j(t)$ $(j\in\overline{1,m})$ — непрерывные $n\times n$ матрицы-функции, $f(t)$ — интегрируемая функция, $v_i(t)$ — компоненты вектор-функции ограниченной вариации $v(t)=(v_1(t),v_2(t),\dots,v_m(t))^T$, $\tau>0$ — постоянное запаздывание, $\omega(t)$ — начальная функция, определенная на $[t_0-\tau,\,t_0]$.

Если вектор-функция $v(t)$ является функцией ограниченной вариации и производные понимаются в обобщенном смысле, то первое слагаемое в правой части этой системы будет содержать некорректную с точки зрения теории обобщенных функций операцию умножения разрывной функции на обобщенную функцию. Под решением, как и в [9], [10], в этом случае будем понимать поточечный предел последовательности $x_k(t)$, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$ при $k\to\infty$ поточечно сходящейся к $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности. Согласно

[10] при условии, что матрицы $D_i(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, взаимно коммутативны, так определенное решение будет удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi)x(\xi)d\xi + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} D_j(\xi)x(\xi)\, dv_j^c(\xi) + \int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\, d\xi+$$

$$+ \sum_{t_i \le t,\, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t,\, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)) + \int_{t_0}^{t} f(\xi)\, d\xi, \quad (12)$$

где

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - z(0), \quad (13)$$

$$\dot z(\xi) = \sum_{j=1}^{m} D_j(t)z(\xi)\, \Delta v_i(t), \quad z(0) = x, \quad (14)$$

W_- и W_+ — соответственно точки левого и правого разрывов вектор-функции $v(t)$, $v_i^c(t)$ — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v_i(t)$, $\Delta v(t-0) = v(t)-v(t-0)$ и $\Delta v(t+0) = v(t+0) - v(t)$.

Определение 3. Уравнение (11) устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу относительно неубывающей непрерывной функции $\varphi(t)$, если существует число $c_f > 0$ такое, что $\forall\ \varepsilon > 0$ и для каждого решения неравенства

$$\Bigg| y(t) - y(t_0) - \int_{t_0}^{t} A(\xi)y(\xi)\, d\xi - \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} D_j(\xi)y(\xi)\, dv_j^c(\xi) - \int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)y(\xi-\tau)\, d\xi-$$

$$- \sum_{t_i \le t,\, t_i \in W_-} S(t_i, y(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) - \sum_{t_i < t,\, t_i \in W_+} S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i + 0)) - \int_{t_0}^{t} f(\xi)\, d\xi \Bigg| \le \varepsilon\varphi(t) \quad (15)$$

(здесь $t \in [t_0, \vartheta]$) существует решение уравнения (12), для которого справедливо неравенство

$$|y(t) - x(t)| \le c_f \varepsilon \varphi(t)$$

для любого $t \in [t_0 - \tau, \vartheta]$.

Теорема 2. *Пусть матрицы* $D_j(t)$, $j \in \overline{1, m}$, *взаимно коммутативны и удовлетворяют неравенствам*

$$||D_j(t)|| \le L_D, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (16)$$

Тогда дифференциальное уравнение (11) *устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу.*

Доказательство. Согласно (12)

$$|y(t)-x(t)| = \Bigg| y(t) - \omega(t_0) - \int_{t_0}^{t} A(\xi)x(\xi)d\xi - \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} D_j(\xi)x(\xi)\, dv_j^c(\xi) - \int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\, d\xi-$$

$$- \sum_{t_i \le t,\, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) - \sum_{t_i < t,\, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)) - \int_{t_0}^{t} f(\xi)\, d\xi \Bigg|.$$

Добавим и вычтем в правой части последнего равенства выражение

$$y(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi)y(\xi)\, d\xi + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} D_j(\xi)y(\xi)\, dv_j^c(\xi) + \int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)y(\xi-\tau)\, d\xi+$$

$$+\sum_{t_i\le t,\, t_i\in W_-} S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0)) + \sum_{t_i<t,\, t_i\in W_+} S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i+0)).$$

После группировки получим

$$|y(t)-x(t)| = \Bigg| y(t)-y(t_0) - \int_{t_0}^{t} A(\xi)y(\xi)\,d\xi - \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t} D_j(\xi)y(\xi)\,dv_j^c(\xi) - \int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)y(\xi-\tau)\,d\xi -$$

$$-\sum_{t_i\le t,\, t_i\in W_-} S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0)) - \sum_{t_i<t,\, t_i\in W_+} S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i+0)) - \int_{t_0}^{t} f(\xi)\,d\xi +$$

$$+y(t_0)-\omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi)(y(\xi)-x(\xi))\,d\xi + \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t} D_j(\xi)(y(\xi)-x(\xi))\,dv_j^c(\xi) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)(y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau))\,d\xi + \sum_{t_i<t,\, t_i\in W_-}(S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0)) - S(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i-0))) +$$

$$+\sum_{t_i\le t,\, t_i\in W_+}(S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i-0)) - S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i-0)))\Bigg|.$$

Оценивая правую часть этого выражения, разбивая модуль на сумму модулей и выполняя очевидные оценки с учетом (15), получаем

$$|y(t)-x(t)| \le \varepsilon\varphi(t) + \max_{[t_0,\vartheta]}||A(\cdot)||\int_{t_0}^{t}|y(\xi)-x(\xi)|\,d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\max_{[t_0,\vartheta]}||D_j(\cdot)||\int_{t_0}^{t}|y(\xi)-x(\xi)|\,d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) + \max_{[t_0,\vartheta]}||A_1(\cdot)||\int_{t_0}^{t}|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\,d\xi +$$

$$+|y(t_0)-\omega(t_0)| + \sum_{t_i<t,\, t_i\in W_-}|S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0)) - S(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i-0))| +$$

$$+\sum_{t_i\le t,\, t_i\in W_+}|S(t_i, y(t_i), \Delta v(t_i-0)) - S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i-0))|. \qquad (17)$$

Согласно определению функции $S(t,y,\Delta v)$, (13), (14) справедливо равенство

$$|S(t_i, y(t_i-0), \Delta v(t_i-0)) - S(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i-0))| = |z_y(1)-y(t_i-0)-(z_x(1)-x(t_i-0))| =$$

$$= \left|\int_0^1 \sum_{j=1}^{m} D_j(t_i)(z_y(s)-z_x(s))\Delta v(t_i-0)\,ds\right|. \qquad (18)$$

Добавляя и вычитая под интегралом в круглых скобках $y(t_i-0)-x(t_i-0)$, внося модуль под знак интеграла и затем применяя неравенство треугольника по отношению к модулю, стоящему под интегралом, с учетом (14) имеем

$$|z_y(1)-y(t_i-0)-(z_x(1)-x(t_i-0))| \le$$

$$\le L_D||\Delta v(t_i-0)||\cdot|y(t_i-0)-x(t_i-0)| + \int_0^1 L_D||\Delta v(t_i-0)||\cdot|z_y(s)-y(t_i-0)-(z_x(s)-x(t_i-0))|\,ds. \qquad (19)$$

Применяя в (19) лемму Гронуолла, получаем

$$|z_y(1)-y(t_i-0)-(z_x(1)-x(t_i-0))| \le L_D||\Delta v(t_i-0)||\cdot|y(t_i-0)-x(t_i-0)|e^{L_D||\Delta v(t_i-0)||}. \qquad (20)$$

В правой части (20) воспользуемся неравенством $ae^a \le e^{ae} - 1$, где $a > 0$. Справедливость этого неравенства несложно установить, используя разложение в ряд Тейлора левой и правой частей неравенства и применяя оценку $\dfrac{a^n}{(n-1)!} \le \dfrac{a^n e^n}{n!}$. Последнее неравенство следует из неравенства $\dfrac{e^n}{n} \ge 1$, справедливого для всех $n \ge 1$. В результате получим

$$|z_y(1) - y(t_i - 0) - (z_x(1) - x(t_i - 0))| \le |y(t_i - 0) - x(t_i - 0)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i-0)||} - 1\big). \tag{21}$$

Очевидно, что подобное неравенство можно получить и для точки $t_i + 0$.

Учитывая в (17) неравенство (21), имеем

$$\begin{gathered}|y(t) - x(t)| \le \varepsilon\varphi(t) + \max_{[t_0,\vartheta]}||A(\cdot)|| \int_{t_0}^t |y(\xi) - x(\xi)|\, d\xi + \\ + \sum_{j=1}^m \max_{[t_0,\vartheta]}||D_j(\cdot)|| \int_{t_0}^t |y(\xi) - x(\xi)|\, d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) + \max_{[t_0,\vartheta]}||A_1(\cdot)|| \int_{t_0}^t |y(s-\tau) - x(s-\tau)|\, ds + \\ + |y(t_0) - \omega(t_0)| + \sum_{t_i<t,\, t_i\in W_-} |y(t_i - 0) - x(t_i - 0)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i-0)||} - 1\big) + \\ + \sum_{t_i\le t,\, t_i\in W_+} |y(t_i) - x(t_i)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i+0)||} - 1\big).\end{gathered} \tag{22}$$

Пусть, как в теореме 1, M определяется равенством (9). Тогда из (22) с учетом (16) следует

$$\begin{gathered}|y(t) - x(t)| \le \varepsilon\varphi(t) + M \int_{t_0}^t |y(\xi) - x(\xi)|\, d\xi + \\ + L_D \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t |y(\xi) - x(\xi)|\, d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) + M \int_{t_0}^t |y(\xi-\tau) - x(\xi-\tau)|\, d\xi + \\ + |y(t_0) - \omega(t_0)| + \sum_{t_i<t,\, t_i\in W_-} |y(t_i - 0) - x(t_i - 0)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i-0)||} - 1\big) + \\ + \sum_{t_i\le t,\, t_i\in W_+} |y(t_i) - x(t_i)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i+0)||} - 1\big).\end{gathered} \tag{23}$$

Далее воспользуемся обозначением (7). Пусть $\sup \mu(t)$ достигается на отрезке $[t_0, t]$ в точке t^*. Кроме того, будем предполагать выполнение условия (5). Тогда из (23) следует

$$\begin{gathered}\mu(t^*) \le \varepsilon\varphi(t^*) + M \int_{t_0}^{t^*} |y(\xi) - x(\xi)|\, d\xi + L_D \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t^*} |y(\xi) - x(\xi)|\, d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) + \\ + M \int_{t_0}^{t^*} |y(\xi-\tau) - x(\xi-\tau)|\, ds + \\ + \sum_{t_i<t^*,\, t_i\in W_-} |y(t_i-0) - x(t_i-0)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i-0)||} - 1\big) + \sum_{t_i\le t^*,\, t_i\in W_+} |y(t_i) - x(t_i)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i+0)||} - 1\big).\end{gathered}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, в силу неубывания правой части на $[t^*, t]$ последнее неравенство можно переписать в виде

$$\mu(t^*) \le \varepsilon\varphi(t) + M \int_{t_0}^t |y(\xi) - x(\xi)|\, d\xi + L_D \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t |y(\xi) - x(\xi)|\, d\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot) +$$

$$+M\int_{t_0}^{t}|y(\xi-\tau)-x(\xi-\tau)|\,ds+$$

$$+\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_-}|y(t_i-0)-x(t_i-0)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i-0)||}-1\big)+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W_+}|y(t_i)-x(t_i)|\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i+0)||}-1\big).$$

Затем, учитывая определение (7) и свойство (10), получаем

$$\mu(t)\le\varepsilon\varphi(t)+2M\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d\xi+L_D\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}}v_j^c(\cdot)+$$

$$+\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_-}\mu(t_i-0)\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i-0)||}-1\big)+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W_+}\mu(t_i)\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i+0)||}-1\big).$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\mu(t)\le\varepsilon\varphi(t)+2M\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d\xi+L_D\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d\sum_{j=1}^{m}\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}}v_j^c(\cdot)+$$

$$+\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_-}\mu(t_i-0)\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i-0)||}-1\big)+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W_+}\mu(t_i)\big(e^{eL_D||\Delta v(t_i+0)||}-1\big).$$

Из этого неравенства, учитывая, что $\sum\limits_{j=1}^{m}\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}}v_j^c(\cdot)=\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}}v^c(\cdot)$, и вводя обозначение

$$Q=\max\{2M,eL_D\},\tag{24}$$

получаем

$$\mu(t)\le\varepsilon\varphi(t)+Q\int_{t_0}^{t}\mu(\xi)\,d(\xi+\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}}v^c(\cdot))+$$

$$+\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_-}\mu(t_i-0)\big(e^{Q||\Delta v(t_i-0)||}-1\big)+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W_+}\mu(t_i)\big(e^{Q||\Delta v(t_i+0)||}-1\big).$$

Применяя к последнему неравенству оценку из ([9], лемма 5.4.3, с. 192), получаем

$$\mu(t)\le\left[\varepsilon\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-Q\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}}v(\cdot)}\,d\varepsilon\varphi(\xi)\right]e^{Q\underset{[t_0,\,t]}{\operatorname{var}}v(\cdot)}.\tag{25}$$

Учитывая неравенство $e^{-Q\underset{[t_0,\,\xi]}{\operatorname{var}}v(\cdot)}\le 1$, из (25) имеем

$$\mu(t)\le\varepsilon\varphi(t)e^{Q\underset{[t_0,\,t]}{\operatorname{var}}v(\cdot)}.$$

В предположении ограниченности вариации функции $v(t)$ на $[t_0,\vartheta]$ убеждаемся в справедливости теоремы. □

2. Устойчивость по Хайерсу–Уламу–Рассиасу линейных систем в случае неединственности реакции на обобщенное воздействие

Рассмотрим уравнение (11) в предположении, что матрицы $D_j(t)$, $j \in \overline{1, m}$, не являются взаимно коммутативными. Это приводит к не единственности реакции системы на обобщенное воздействие.

В этом случае в качестве решений предлагается брать все частичные поточечные пределы такой последовательности. Как и в [9], будем говорить, что последовательность $v_k(t)$ V-сходится к $v(t)$, если $v_k(t)$ поточечно сходится к $v(t)$ и $\operatorname*{var}_{[t_0,\,t]} v_k(\cdot)$ поточечно сходится к $V(t) \in BV[t_0, \vartheta]$. Данную сходимость будем обозначать $v_k(t) \xrightarrow{V} v(t)$.

Определение 4 ([9], [10])**.** Всякий частичный поточечный предел последовательности $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, порожденной произвольной V-сходящейся последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, будем называть V-решением системы (11), удовлетворяющим начальному условию $x(t) = \omega(t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0]$.

Пусть $z(0) = x(\bar{t})$, $\nu(0) = v(\bar{t})$ являются начальными условиями системы

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{i=1}^{m} D_i(\bar{t}) z(\xi) \eta_i(\xi), \quad \dot{\nu}(\xi) = \eta(\xi). \tag{26}$$

Согласно [10] все V-решения уравнения (11) будут удовлетворять следующему интегральному включению:

$$\begin{aligned} x(t) \in \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi)x(\xi)\,d\xi + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} D_j(\xi)x(\xi)\,dv_i^c(\xi) + \int_{t_0}^{t} A_\tau(\xi)x(\xi - \tau)\,d\xi + \\ + \int_{t_0}^{t} f(\xi)\,d\xi + \sum_{t_i \le t,\, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), V(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)) + \\ + \sum_{t_i < t,\, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0), V(t_i), \Delta V(t_i + 0)), \end{aligned} \tag{27}$$

где $v^c(t)$ — непрерывная составляющая вектор функции ограниченной вариации $v(t)$, Ω_- и Ω_+, соответственно, точки левого и правого разрывов функции $V(t)$.

Множество $S(\bar{t}, x(\bar{t}), \Delta v(\bar{t}), V(\bar{t}), \Delta V(\bar{t}))$ (где $\bar{t} = t_i - 0$, $t_i \in \Omega_-$ и $\bar{t} = t_i$, если $t_i \in \Omega_+$) в (27) определяется как сдвиг сечения ($\nu(\Delta V(\bar{t})) = v(t_i)$, если $\bar{t}_i \in \Omega_-$, и $\nu(\Delta V(\bar{t})) = v(t_i + 0)$, если $\bar{t}_i \in \Omega_+$) множества достижимости системы (26) на величину $-x(t)$ в момент $\xi = \Delta V(\bar{t})$, где управление $\eta(\xi)$ удовлетворяет ограничению $\|\eta(\xi)\| \le 1, \|\eta(\xi)\| = \sum_{i=1}^{m} |\eta_i(\xi)|$. Содержательно множество $S(\bar{t}, x(\bar{t}), \Delta v(\bar{t}), V(\bar{t}), \Delta V(\bar{t}))$ описывает все возможные скачки траектории в момент $\bar{t}$ из точки $x(\bar{t})$ при заданных $\Delta v(\bar{t})$ и $\Delta V(\bar{t})$.

Таким образом, каждой точке разрыва (левого или правого) функции $v(t)$ и каждому возможному скачку траектории системы (27) в этот момент $\bar{t}$ будет поставлена в соответствие функция $\eta^{(\bar{t})}(\xi)$, определенная на отрезке $[0, \Delta V(\bar{t})]$, которая с помощью решения системы уравнений (26) определит величину скачка $\Delta x(\bar{t})$ траектории в момент $\bar{t}$.

Пусть $\bar{x}(t)$ есть некоторая функция ограниченной вариации, точки разрыва которой совпадают с точками разрыва функции $V(t)$. При этом разрывы функции $\bar{x}(t)$ являются допустимыми для интегрального включения (27). Это означает, что для каждой точки разрыва функции $\bar{x}(t)$ существует допустимое решение системы (26), с помощью которых описываются скачки функции $\bar{x}(t)$. Здесь $\eta_{t_i-0}(\cdot)$, $\eta_{t_i+0}(\cdot)$ — соответствующие допустимые управления вспомогательной системы (26). Тогда

$$\Delta\bar{x}(t_i-0)=s(t_i,\bar{x}(t_i-0),\Delta v(t_i-0),\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0})=z(\Delta V(t_i-0))-\bar{x}(t_i-0),$$
$$\Delta\bar{x}(t_i+0)=s(t_i,\bar{x}(t_i),\Delta v(t_i+0),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}=z(\Delta V(t_i+0))-\bar{x}(t_i),$$

где z — решение системы (26). Предположим, что $\bar{x}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered}\Bigg|\bar{x}(t)-\omega(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t}A(\xi)\bar{x}(\xi)\,d\xi-\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t}D_j(\xi)\bar{x}(\xi)\,dv_i^c(\xi)-\int\limits_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\,d\xi-\\ -\int\limits_{t_0}^{t}f(\xi)\,d\xi-\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_-}s(t_i,\bar{x}(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))-\\ -\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+}s(t_i,\bar{x}(t_i),\Delta v(t_i),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot))\Bigg|\le\varepsilon\varphi(t).\end{gathered}\tag{28}$$

Заметим, что каждая функция ограниченной вариации, являющаяся решением интегрального включения (27), является решением интегрального уравнения

$$\begin{gathered}x(t)=\omega(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}A(\xi)x(\xi)\,d\xi+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t}D_j(\xi)x(\xi)\,dv_i^c(\xi)+\int\limits_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\,d\xi+\\ +\int\limits_{t_0}^{t}f(\xi)\,d\xi+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in\Omega_-}s(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))+\\ +\sum_{t_i<t,\,t_i\in\Omega_+}s(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot)).\end{gathered}\tag{29}$$

Для различных решений интегрального включения (27) эти уравнения отличаются набором вспомогательных управлений, с помощью которых описываются скачки траекторий. Содержательно неравенство (28) означает, что $\bar{x}$ является приближенным решением для дифференциального уравнения (14) (воронки разрывных решений интегрального включения (27)).

Определение 5. Будем говорить, что дифференциальное уравнение (14) (интегральная воронка решений интегрального включения (27)) будет устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу относительно неубывающей непрерывной функции $\varphi(t)$ $[t_0-\tau,\vartheta]$, если для любого $\varepsilon>0$ и любой функции, удовлетворяющей неравенству (28), существует такое число $c_f>0$, что будет выполняться неравенство

$$\rho(\bar{x}(t),X(t,t_0,x_0,v,V))\le c_f\varepsilon\varphi(t),$$

где $\rho(a,A)$ — хаусдорфово расстояние от точки a до множества A, $X(t,t_0,x_0,v,V)$ — интегральная воронка разрывных решений интегрального включения (27).

Теорема 3. *Пусть функция $\bar{x}(t)$ удовлетворяет неравенству* (28). *Тогда существует такое $c_f>0$ и такое решение уравнения* (29), *что будет выполняться неравенство*

$$|\bar{x}(t)-x(t)|\le c_f\varepsilon\varphi(t).\tag{30}$$

Доказательство. В связи с тем, что доказательство этой теоремы в значительной степени повторяет доказательство теоремы 2, здесь оно приводится в сокращенном виде. Согласно (29)

$$\bar{x}(t)-x(t)=\bar{x}(t)-\omega(t_0)-\int\limits_{t_0}^{t}A(\xi)x(\xi)\,d\xi-\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t}D_j(\xi)x(\xi)\,dv_i^c(\xi)-\int\limits_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)x(\xi-\tau)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}f(\xi)\,d\xi-\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W-}s(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))- \tag{31}$$

$$-\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_+}s(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot)).$$

Добавляя и вычитая в правой части (31) выражение

$$\omega(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}A(\xi)\bar{x}(\xi)\,d\xi+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t}D_j(\xi)\bar{x}(\xi)\,dv_i^c(\xi)+\int\limits_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)\bar{x}(\xi-\tau)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}f(\xi)\,d\xi+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W_-}s(t_i,\bar{x}(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))+$$

$$+\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_+}s(t_i,\bar{x}(t_i),\Delta v(t_i),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot)),$$

вычисляя модуль левой и правой части, проводя соответствующую группировку и учитывая неравенство (28), получаем

$$|\bar{x}(t)-x(t)|\le\varepsilon\varphi(t)+\Bigg|\bar{x}(t_0)-\omega(t_0)+\int_{t_0}^{t}A(\xi)(\bar{x}(\xi)-x(\xi))\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}D_j(\xi)(\bar{x}(\xi)-x(\xi))\,dv_j^c(\xi)+\int_{t_0}^{t}A_\tau(\xi)(\bar{x}(\xi-\tau)-x(\xi-\tau))\,d\xi+ \tag{32}$$

$$+\sum_{t_i<t,\,t_i\in W_-}(s(t_i,\bar{x}(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))-s(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i-0),\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot)))+$$

$$+\sum_{t_i\le t,\,t_i\in W_+}(s(t_i,\bar{x}(t_i),\Delta v(t_i+0)\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot))-s(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i+0),\Delta V(t_i+0),\eta_{t_i+0}(\cdot)))\Bigg|.$$

Подобно тому, как делалась оценка на величину $|S(t_i,y(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-S(t_i,x(t_i-0),\Delta v(t_i-0))|$ (см. (18)–(21)) в предыдущей теореме, можно получить неравенство

$$|s(t_i,\bar{x}(t_i-0),\Delta v(t_i-0)\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))-s(t_i,x(t_i),\Delta v(t_i-0),\Delta V(t_i-0),\eta_{t_i-0}(\cdot))|\le$$

$$\le|\bar{x}(t_i-0)-x(t_i-0)|e^{eL||\Delta V(t_i-0)||}.$$

Аналогичным образом и для t_i+0 можно получить подобное неравенство. Затем для оценки правой части неравенства (32) в силу предположений (16), используя обозначение (9) и вычисляя $\sup_{s\in[t_0,t]}|\bar{x}(s)-x(s)|$, который ранее обозначался как $\mu(t)$, полагая $\omega(t)=\bar{x}(t)$ на

$[t_0-\tau, t_0]$, с учетом (29)и неравенства $\sum\limits_{j=1}^{m} \operatorname*{var}\limits_{[t_0,\,\xi]} v_i^c(\cdot) \le V^c(\xi)$ ($V^c(\xi)$ — непрерывная составляющая функции $V(\xi)$) получаем

$$\mu(t) \le \varepsilon\varphi(t) + Q\int_{t_0}^{t} \mu(\xi)\, d(\xi + V^c) +$$
$$+\sum_{t_i<t,\, t_i\in W_-} \mu(t_i-0)\bigl(e^{Q||\Delta V(t_i-0)||}-1\bigr) + \sum_{t_i\le t,\, t_i\in W_+} \mu(t_i)\bigl(e^{Q||\Delta V(t_i+0)||}-1\bigr), \qquad (33)$$

где Q определяется выражением (24). Ввиду ([9], лемма 5.4.3, с. 192) получим оценку на решение неравенства (33):

$$\mu(t) \le \varepsilon\varphi e^{Q(t-t_0+V(t))}.$$

Полагая $c_f = e^{Q(\vartheta-t_0+V(\vartheta))}$, получаем оценку (30). □

Простым следствием теоремы 3 является

Теорема 4. *Дифференциальное уравнение* (11) *устойчиво по Хайерсу–Уламу–Рассиасу.*

Заключение

Проведена формализация понятия устойчивости по Хайерсу–Уламу–Рассиасу для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенными воздействиями в уравнении и с запаздыванием. Установлен факт устойчивости по Хайерсу–Уламу–Рассиасу для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в случаях, когда обобщенное воздействие входит аддитивно и в случае, когда обобщенное воздействие умножается на фазовую координату.

Литература

[1] Улам С. *Нерешенные математические задачи* (Наука, Москва, 1964).

[2] Hyers D.H. *On the Stability of the Linear Functional Equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. **27** (4), 222–224 (1941).

[3] Alsina C., Ger R. *On some Inequalities and Stability Results Related to the Exponential Function*, J. Inequal. Appl. **2** (4), 373–380 (1998).

[4] Rassias Th.M. *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (2), 297–300 (1978).

[5] Rus I.A. *Ulam stability of ordinary differential equations*, Studia Uinv. “BABES–BOLYAI”, Math. **LIV** (4), 125–133 (2009).

[6] Rus I.A. *Remarks on Ulam stability of the operatorial equations*, Fixed Point Theory **10** (2), 305–320 (2009).

[7] Арутюнов А.В. *Задача о точках совпадения многозначных отображений и устойчивость по Уламу–Хайерсу*, Докл. Акад. наук **455** (4), 379–383 (2014).

[8] Zada A., Pervaiz B., Alzabut J., Shah S.O. *Further results on Ulam stability for a system of first-order nonsingular delay differential equations*, Demonstratio Math. **53** (1), 225–235 (2020).

[9] Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications* (Kluwer Academic Publ., Dolrbrecht, 1997).

[10] Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В. *Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации*, Тр. ин-та Матем. и механ. УрО РАН **15** (4), 226–233 (2009).

[11] Зайнуллина Э.З., Павленко В.С., Сесекин А.Н., Гредасова Н.В. *Об устойчивости по Уламу–Хайерсу решений дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенным воздействием*, Матер. Воронеж. межд. весенней матем. школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXII» Воронеж, 3–9 мая 2021 г. Ч. 2, Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз., **209**, 25–32 (ВИНИТИ РАН, Москва, 2022).

[12] Pavlenko V., Sesekin A. *Ulam–Hyers Stability of First and Second Order DifferentialEquations with Discontinuous Trajectories*, 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conf., STAB 2022) V.N. Tkhai (ed.) IEEE Xplore, 2022).

[13] Sesekin A.N., Kandrina A.D. *Hyers–Ulam–Rassias stability of nonlinear differential equations with a generalized actions on the right-hand side*, Ural Math. J. **9** (1), 147–152 (2023).
[14] Гредасова Н.В., Павленко В., Сесекин А.Н., Шуляева К.С. *Об устойчивости по Хайерсу–Уламу–Рассиасу линейных дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в правой части и с запаздыванием*, Матер. VIII межд. конф. «Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'23)», 72–74 (Изд-во ВСГУТУ, Улан-Удэ, 2023).
[15] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием* (Вища шк., Киев, 1987).
[16] Wang G., Zhou M., Sun L. *Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order*, Appl. Math. Let. **21** (10), 1024–1028 (2008).
[17] Лукоянов Н.Ю. *Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией* (УрФУ, Екатеринбург, 2011).

Александр Николаевич Сесекин

Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: sesekin@list.ru

Анна Дмитриевна Кандрина

Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: anna-kandrina@mail.ru

Надежда Викторовна Гредасова

Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: gredasovan@mail.ru

A.N. Sesekin, A.D. Kandrina, and N.V. Gredasova

Hayers–Ulam–Rassias stability of linear systems of differential equations with generalized action and delay

Abstract. For linear systems of differential equations with delay subject to generalized influence, a formalization of the concept of Highers–Ulam–Rassias stability is proposed. The cases are considered when the system has a single reaction to a generalized impact and when the system's reaction is not unique. Sufficient conditions for such stability are established for the systems of differential equations under consideration.

Keywords: Hyers–Ulam–Rassias stability, generalized action, delay, linear system.

Alexander Nikolaevich Sesekin

Ural Federal University,
19 Mira str., Yekaterinburg, 620002 Russia,

e-mail: sesekin@list.ru

Anna Dmitrievna Kandrina

Ural Federal University,
19 Mira str., Yekaterinburg, 620002 Russia,

e-mail: anna-kandrina@mail.ru

Nadezhda Viktorovna Gredasova

Ural Federal University,
19 Mira str., Yekaterinburg, 620002 Russia,

`e-mail:` gredasovan@mail.ru