

М.Х. РУЗИЕВ, Н.Т. ЮЛДАШЕВА

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Аннотация. Изучена задача с условиями Бицадзе–Самарского и Франкля для уравнения смешанного типа в области, эллиптической частью которой является первый квадрант плоскости, а гиперболической частью — характеристический треугольник. Доказана корректность сформулированной задачи.

Ключевые слова: принцип экстремума, единственность решения, существование решения, сингулярное интегральное уравнение, уравнение Винера–Хопфа, индекс уравнения.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-57-70

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача Трикоми для уравнений смешанного типа в неограниченных различных областях изучена в [1], [2]. Существование и единственность решения задачи Франкля для ряда уравнений смешанного типа доказаны А.В. Бицадзе [3], Ю.В. Девингталем [4], Н.М. Флайшером [5], Н.Ю. Капустиным и К.Б. Сабитовым [6], Р.С. Хайруллиным [7] и др.

Ряд существенных и интересных результатов, посвященных исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, было получено в [8]–[11]. В работе [12] изучена задача Франкля со смещением для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. В [13] исследована нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках, одна из которых лежит внутри характеристического треугольника.

Данная работа посвящена исследованию задачи с условием Бицадзе–Самарского и Франкля для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области.

Рассмотрим уравнение

$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ — первый квадрант плоскости, D^- — конечная область четвертого квадранта плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1), выходящими из точек $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$.

В уравнение (1) m , β_0 — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $I_0 = \{(x, y) : 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$, C_0 и C_1 — соответственно точки пересечения OC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I$ — произвольное фиксированное число.

Пусть $p(x) \in C^1[0, c]$ — диффеоморфизм множества точек отрезка $[0, c]$ в множества точек отрезка $[c, 1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(0) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = 1 - kx$, где $k = \frac{1-c}{c}$.

Задача БС. Найти в области D функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$, где $\overline{D} = D^+ \cup \overline{D}^- \cup \overline{I_0} \cup \overline{I_1}$;
- 2) $u(x, y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 3) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [14] в области D^- ;
- 4) выполняются равенства

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \quad x > 0, \quad y > 0; \quad (2)$$

- 5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad y \geq 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad x \in \overline{I_1}, \quad (4)$$

$$D_{0,x}^\beta x^{2\beta-1} u[\Theta_0(x)] = a(x)u(x, 0) + b(x), \quad x \in (0, c), \quad (5)$$

$$u(p(x), 0) = \mu u(x, 0) + f(x), \quad 0 \leq x \leq c, \quad (6)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in I \setminus \{c\}, \quad (7)$$

причем эти приделы при $x = 0$, $x = 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $\mu = \text{const}$, $D_{0,x}^\beta$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [14], $a(x)$, $b(x)$, $f(x) \in C[0, c] \cap C^{1,\delta}(0, c)$, $b(0) = 0$, $b(c) = 0$, $f(c) = 0$, $a(c) = 0$, $a(x)$ — неположительная невозрастающая функция, $\tau_1(x) \in C(\overline{I_1})$, причем функция $\tau_1(x) = (1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x) \in C(\overline{I_1})$ и при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)| \leq \frac{M}{x^\varepsilon}$, ε , M — положительные константы, $\tau_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на любом отрезке $[1, N]$, $N > 1$, $\varphi(y) \in C(\overline{I_0})$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi(y) \in L(0, \infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гёльдера на любом отрезке $[0, N]$, $N > 0$, $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\Theta_0(x)$ — координаты точки пересечения характеристики OC_0 с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0, 0)$, $x_0 \in (0, c)$,

$$\Theta_0(x_0) = \left(\frac{x_0}{2}; - \left(\frac{(m+2)x_0}{4} \right)^{\frac{2}{m+2}} \right).$$

Отметим, что условие (6) является внутренне краевым условием локального смещения на отрезке линии параболического вырождения [15]–[18].

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\varphi(y) \equiv 0$, $b(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $\tau_1(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$. Тогда задача БС имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство. Известно [14], что решение видоизмененной задачи Коши $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$, $\lim_{y \rightarrow 0} (-y)^{\beta_0} u_y = \nu(x)$, $x \in I$, имеет вид

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau \left(x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right) t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt - \\ - \gamma_2 (-y)^{1-\beta_0} \int_0^1 \nu \left(x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt, \quad (8)$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$, $\gamma_2 = \frac{2}{(m+2)} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

В силу формулы (8) из краевого условия (5) после несложных вычислений получим

$$\nu(x) = \gamma D_{0,x}^{1-2\beta} a_1(x) \tau(x) + b_1(x), \quad x \in (o, c), \quad (9)$$

где

$$\gamma = \frac{2\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2\beta}, \quad a_1(x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)} - x^{1-\beta} a(x), \quad b_1(x) = -\gamma D_{0,x}^{1-2\beta} x^{1-\beta} b(x).$$

Равенство (9) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенным на интервал $(0, c)$ оси $y = 0$ из гиперболической части D^- смешанной области D .

Теперь докажем, что если $\varphi(y) \equiv 0$, $b(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $\tau_1(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$, то решение задачи БС в области $D^+ \cup \bar{I}_0 \cup \bar{I} \cup \bar{I}_1$ в силу (2) тождественно равно нулю.

Пусть D_R^+ — конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой $A_R B_R$ нормальной кривой $x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = R^2$, $0 \leq x \leq R$, $0 \leq y \leq \left(\frac{m+2}{2} R \right)^{2/(m+2)}$, где A_R и B_R — точки с координатами $\left(0, \left(\frac{m+2}{2} R \right)^{2/(m+2)} \right)$ и $(R, 0)$ соответственно.

В силу (2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R_0 = R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|u(x, y)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in A_R B_R. \quad (10)$$

Пусть (x_0, y_0) — точка положительного максимума функции $u(x, y)$ в области $\bar{D}_R^+$. В силу обозначения $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$, условие (6) перепишем в виде

$$\tau(p(x)) = \mu \tau(x) + f(x), \quad x \in [0, c]. \quad (11)$$

Отсюда при $x = c$ (где $f(x) = 0$) имеем $\tau(p(c)) = \mu \tau(c)$. Тогда согласно $p(c) = c$ следует $\tau(c)(1 - \mu) = 0$, т. е. $\tau(c) = 0$.

По принципу Хопфа [19], функция $u(x, y)$ своего положительного максимума и отрицательного минимума во внутренних точках области $\bar{D}_R^+$ не достигает.

Пусть $(x_0, 0)$ (где $x_0 \in (0, c)$) — точка положительного максимума (отрицательного минимума) функции $u(x, 0) = \tau(x)$. Тогда в этой точке в случае положительного максимума (отрицательного минимума) [15]

$$\nu(x_0) < 0 \quad (\nu(x_0) > 0). \quad (12)$$

Ввиду того, что дробные производные $D_{0,x}^{1-2\beta} a_1(x) \tau(x)$ в точке положительного максимума (отрицательного минимума) строго положительны (строго отрицательны), из (9) (где $b_1(x) \equiv 0$) получаем

$$\begin{aligned} \nu(x_0) &= \gamma D_{0,x}^{1-2\beta} a_1(x) \tau(x)|_{x=x_0} > 0 \\ \left(\nu(x_0) &= \gamma D_{0,x}^{1-2\beta} a_1(x) \tau(x)|_{x=x_0} < 0 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Неравенства (12) и (13) противоречат условию сопряжения (7), отсюда $x_0 \notin (0, c)$.

В силу $0 < \mu < 1$ из (11) (где $f(x) \equiv 0$) следует, что их также нет и в интервале $(c, 1)$ оси $y = 0$. Значит, точки положительного максимума (отрицательного минимума) функции $u(x, y)$ нет на интервале OB . Пусть $R > R_0$. Из принципа Хопфа и предыдущих рассуждений получаем, что если $(x_0, y_0) \in A_R B_R$, то в силу (10) $|u(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Следовательно, $|u(x, y)| < \varepsilon$ для любых $(x, y) \in \bar{D}_R^+$. Отсюда в силу произвольности ε при $R \rightarrow +\infty$ заключаем, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $D^+ \cup \bar{I}_0 \cup \bar{I} \cup \bar{I}_1$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = 0, \quad x \in \bar{I}, \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = 0, \quad x \in I. \quad (14)$$

Согласно (14), непрерывности решения в области $\bar{D}_R^+$ и условию сопряжения (7), восстанавливая искомую функцию $u(x, y)$ в области D^- как решение видоизмененной задачи Коши с однородными данными, получим $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{D}^-$. $\square$

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теорема 2. Пусть выполнены условия $\mu k^{\frac{1}{2}-\alpha} \sin(\alpha\pi) < 1$, где $\alpha = (1-2\beta)/4$, $p(x) = 1-kx$. Тогда решение задачи БС существует.

Доказательство. Решение задачи Дирихле в области D^+ , удовлетворяющее условиям (2)–(4) и условию $u(x, 0) = \tau(x)$, $x \in \bar{I}$, представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= k_2 y^{1-\beta_0} \int_0^1 \tau(t) \left(\left((t-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} - \left((t+x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} \right) dt + \\ &+ k_2 y^{1-\beta_0} \int_1^\infty \tau_1(t) \left(\left((t-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} - \left((t+x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} \right) dt + \\ &+ \frac{2}{m+2} y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} \varphi(t) dt \int_0^\infty s e^{-sx} J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) ds, \end{aligned} \quad (15)$$

где $k_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)(1-\beta_0)}{\Gamma(2-2\beta)}$, $\beta = \frac{2\beta_0+m}{2(m+2)}$, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Дифференцируя равенство (15) по y , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= k_2 \int_0^1 \tau(t) \frac{\partial}{\partial y} y^{1-\beta_0} \left(\left((t-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} - \right. \\ &- \left. \left((t+x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} \right) dt + \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$F_1(x, y) = k_2 \int_1^\infty \tau_1(t) y^{1-\beta_0} \left(\left((t-x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} - \left((t+x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right)^{\beta-1} \right) dt,$$

$$F_2(x, y) = \frac{2}{m+2} y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} \varphi(t) dt \int_0^\infty s e^{-sx} J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) ds.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} y^{1-\beta_0} \left(\left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} - \left[(x+t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right) &= \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \frac{\partial}{\partial t} \times \\ &\times \left((x-t) \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} + (x+t) \left[(x+t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

В силу (17) из (16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= k_2 \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \int_0^1 \tau(t) \frac{\partial}{\partial t} \left((x-t) \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} + \right. \\ &\left. + (x+t) \left[(x+t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right) dt + \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y). \end{aligned} \quad (18)$$

В интеграле правой части равенства (18), выполняя операцию интегрирования по частям, с учетом $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 0$ после несложных вычислений имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -k_2 \frac{m+2}{2} y^{-\beta_0} \int_0^1 \tau'(t) \left((x-t) \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} + \right. \\ &\left. + (x+t) \left[(x+t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right) dt + \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y). \end{aligned} \quad (19)$$

Умножая обе части равенства (19) на y^{β_0} , затем переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, получаем

$$\nu(x) = -k_2 \frac{m+2}{2} \int_0^1 \tau'(t) \left[(x-t) |x-t|^{2\beta-2} + (t+x)^{2\beta-1} \right] dt + \Phi_0(x), \quad x \in (0, 1), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial}{\partial y} (F_1(x, y) + F_2(x, y)) = k_2 (1 - \beta_0) \int_0^\infty \tau_1(t) \left[(t-x)^{2\beta-2} - (t+x)^{2\beta-2} \right] dt + \\ &+ \frac{2}{(m+2)^{\frac{1-2\beta}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right)} \int_0^\infty \varphi(t) t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} dt \int_0^\infty s^{\frac{3-2\beta}{2}} e^{-sx} J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) ds. \end{aligned}$$

Это и есть второе функциональное соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на I из эллиптической части D^+ смешанной области D .

Заметим, что соотношение (20) справедливо для всего промежутка I . Далее промежуток интегрирования $(0, 1)$ разбивая на промежутки $(0, c)$ и $(c, 1)$, а затем в интегралах с пределом $(c, 1)$ сделав замену переменного интегрирования на $t = p(s) = 1 - ks$, учитывая равенство (11), соотношение (20) приведем к виду

$$\begin{aligned} \nu(x) = & -k_2 \frac{m+2}{2} \left(\int_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt - \int_x^c \tau'(t)(t-x)^{2\beta-1} dt \right) - k_2 \frac{m+2}{2} \times \\ & \times \left(\int_0^c \tau'(t)(t+x)^{2\beta-1} dt + \mu \int_0^c \tau'(s) \left[(p(s)-x)^{2\beta-1} - (p(s)+x)^{2\beta-1} \right] ds \right) + \Phi_1(x), \quad x \in (0, c), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\Phi_1(x) = -k_2 \frac{m+2}{2} \int_0^c f'(s) \left[(p(s)-x)^{2\beta-1} - (p(s)+x)^{2\beta-1} \right] ds + \Phi_0(x).$$

В силу (7), исключая функцию $\nu(x)$ из (9) и (21), получаем

$$\begin{aligned} \gamma D_{0,x}^{1-2\beta} a_1(x) \tau(x) + b_1(x) = & -k_2 \frac{m+2}{2} \left(\int_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt - \int_x^c \tau'(t)(t-x)^{2\beta-1} dt \right) - \\ & - k_2 \frac{m+2}{2} \left(\int_0^c \tau'(t)(t+x)^{2\beta-1} dt + \mu \int_0^c \tau'(s) \left((p(s)-x)^{2\beta-1} - (p(s)+x)^{2\beta-1} \right) ds \right) + \\ & + \Phi_1(x), \quad x \in (0, c). \end{aligned} \quad (22)$$

Равенство (22) запишем в виде

$$\begin{aligned} -\frac{2\gamma}{k_2(m+2)} D_{0,x}^{1-2\beta} a_1(x) \tau(x) + \Phi_2(x) = & \int_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt - \int_x^c \tau'(t)(t-x)^{2\beta-1} dt + \\ & + \int_0^c \tau'(t)(t+x)^{2\beta-1} dt + \mu \int_0^c \tau'(s) \left((p(s)-x)^{2\beta-1} + (p(s)+x)^{2\beta-1} \right) ds, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\Phi_2(x) = -\frac{2}{k_2(m+2)} (b_1(x) - \Phi_1(x)).$$

Применяя оператор $\Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1}$ к обеим частям равенства (23), имеем

$$\begin{aligned} -\frac{2\gamma\Gamma(1-2\beta)}{k_2(m+2)} a_1(x) \tau(x) + \Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1} \Phi_2(x) = & \Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1} \times \\ & \times \left(\int_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt - \int_x^c \tau'(t)(t-x)^{2\beta-1} dt \right) + \Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1} \times \\ & \times \left(\int_0^c \tau'(t)(t+x)^{2\beta-1} dt + \mu \int_0^c \tau'(s) \left((p(s)-x)^{2\beta-1} - (p(s)+x)^{2\beta-1} \right) ds \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Нетрудно показать, что

$$\Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1} \int_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt = \Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)\tau(x), \quad (25)$$

$$\Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1} \int_x^c \tau'(t)(t-x)^{2\beta-1} dt = \pi \operatorname{ctg}(2\beta\pi)\tau(x) + \int_0^c \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(t)dt}{t-x}, \quad (26)$$

$$\Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1} \int_0^c \tau'(t)(t+x)^{2\beta-1} dt = \int_0^c \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(t)dt}{t+x}, \quad (27)$$

$$\Gamma(1-2\beta)\mu D_{0,x}^{2\beta-1} \int_0^c \tau'(s)(p(s)-x)^{2\beta-1} ds = \mu \int_0^c \left(\frac{x}{p(s)}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x}, \quad (28)$$

$$\mu\Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1} \int_0^c \tau'(s)(p(s)+x)^{2\beta-1} ds = \mu \int_0^c \left(\frac{x}{p(s)}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)+x}. \quad (29)$$

В силу (25)–(29) равенство (24) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{2\gamma}{k_2(m+2)}\Gamma(1-2\beta)a_1(x)\tau(x) + \Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1}\Phi_2(x) = \\ & = \Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)\tau(x) - \pi \operatorname{ctg}(2\beta\pi)\tau(x) - \int_0^c \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(t)dt}{t-x} + \int_0^c \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(t)dt}{t+x} + \\ & + \mu \int_0^c \left(\frac{x}{p(s)}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x} - \mu \int_0^c \left(\frac{x}{p(s)}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)+x}, \quad x \in (0, c). \end{aligned} \quad (30)$$

После несложных вычислений уравнение (30) примет вид

$$A(x)\tau(x) - \lambda \int_0^c \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right) \tau(t)dt = -\lambda\mu \int_0^c \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x} + R[\tau] + \Phi_3(x), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\cos(\pi\beta)}{\pi} \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}, \quad A(x) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(1 + \sin(\pi\beta)) - x^{1-\beta}a(x), \\ R[\tau] &= \lambda\mu \int_0^c \left(\frac{x}{p(s)}\right)^{1-2\beta} \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)+x} - \lambda\mu \int_0^c \frac{\tau(s)p'(s)}{p(s)-x} \left(\left(\frac{x}{p(s)}\right)^{1-2\beta} - 1\right) ds, \\ \Phi_3(x) &= \lambda\Gamma(1-2\beta)D_{0,x}^{2\beta-1}\Phi_2(x). \end{aligned}$$

Первый интегральный оператор правой части (31) не является регулярным, так как подинтегральное выражение при $x = c$, $s = c$ имеет изолированную особенность первого порядка, поэтому это слагаемое в (31) выделено отдельно. Временно считая правую часть уравнения (31) известной функцией, запишем ее в виде

$$A(x)\tau(x) - \lambda \int_0^c \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right) \tau(t)dt = g(x), \quad x \in (0, c), \quad (32)$$

где

$$g(x) = -\lambda\mu \int_0^c \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x} + R[\tau] + \Phi_3(x). \quad (33)$$

Полагая $x^{2-2\beta}\rho(x) = \tau(x)$, $x^{2-2\beta}g_1(x) = g(x)$ и учитывая

$$\left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right) = \left(\frac{x}{t}\right)^{2-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x}\right),$$

уравнение (32) перепишем в виде

$$A(x)\rho(x) - \lambda \int_0^c \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x}\right) \rho(t)dt = g_1(x), \quad x \in (0, c). \quad (34)$$

В (34) производя замену $t^2 = s$, $x^2 = \xi$, $\rho(x) = \rho(\sqrt{\xi}) = \rho_1(\xi)$, $g_1(x) = g_1(\sqrt{\xi}) = g_2(\xi)$, $A(x) = A(\sqrt{\xi}) = A_1(\xi)$, имеем

$$A_1(\xi)\rho_1(\xi) - \lambda \int_0^{c^2} \frac{\rho_1(s)ds}{s-\xi} = g_2(\xi), \quad \xi \in (0, c^2). \quad (35)$$

Решение уравнения (35) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на $(0, c^2)$ и ограниченных при $\varepsilon = 0$, а при $\varepsilon = c^2$ могущих обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$. В этом классе индекс данного уравнения равен нулю, а его решение записывается в явном виде

$$\rho_1(\xi) = A_1^*(\xi)g_2(\xi) + B^*(\xi) \int_0^{c^2} \frac{X^+(\xi)(A_1(\xi) + \lambda\pi i)g_2(s)}{X^+(t)(A_1(t) + \lambda\pi i)} \frac{ds}{s-\xi}, \quad (36)$$

где

$$A_1^*(\xi) = \frac{A_1(\xi)}{A_1^2(\xi) + \lambda^2\pi^2}, \quad B^*(\xi) = \frac{\lambda}{A_1^2(\xi) + \lambda^2\pi^2},$$

$$X^+(\xi) = \xi^{-\frac{1}{4}(1-2\beta)}(c^2 - \xi)^{\frac{1}{4}(1-2\beta)}\omega_1(\xi)e^{\alpha\pi i}, \quad \alpha = (1 - 2\beta)/4.$$

Возвращаясь к прежним переменным и функциям из (36), получаем

$$\tau(x) = A^*(x)g(x) + B^*(x) \int_0^c \left(\frac{(c-x)x^2}{(c-t)t^2}\right)^\alpha \left(\frac{c+x}{c+t}\right)^\alpha \frac{\omega(x)(A(x) - i\pi\lambda)}{\omega(t)(A(t) - i\pi\lambda)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right) g(t)dt. \quad (37)$$

Подставляя (33) в (37), имеем

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -\lambda\mu A^*(x) \int_0^c \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-x} - \lambda\mu B^*(x) \times \\ & \times \int_0^c \left(\frac{(c-x)x^2}{(c-t)t^2}\right)^\alpha \left(\frac{c+x}{c+t}\right)^\alpha \frac{\omega(x)(A(x) - i\pi\lambda)}{\omega(t)(A(t) - i\pi\lambda)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right) dt \int_0^c \frac{\tau(s)p'(s)ds}{p(s)-t} + R_1[\tau] + \Phi_4(x), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$R_1[\tau] = A^*(x)R[\tau] +$$

$$+B^*(x) \int_0^c \left(\frac{(c-x)x^2}{(c-t)t^2} \right)^\alpha \left(\frac{c+x}{c+t} \right)^\alpha \frac{\omega(x)(A(x)-i\pi\lambda)}{\omega(t)(A(t)-i\pi\lambda)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) R[\tau] dt$$

— регулярный оператор,

$$\begin{aligned} \Phi_4(x) &= A^*(x)\Phi_3(x) + \\ &+ B^*(x) \int_0^c \left(\frac{(c-x)x^2}{(c-t)t^2} \right)^\alpha \left(\frac{c+x}{c+t} \right)^\alpha \frac{\omega(x)(A(x)-i\pi\lambda)}{\omega(t)(A(t)-i\pi\lambda)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) \Phi_3(t) dt. \end{aligned}$$

Уравнение (38) в силу $p(x) = 1 - kx$, где $k = \frac{1-c}{c}$, запишем в виде

$$\begin{aligned} \tau(x) &= k\lambda\mu A^*(x) \int_0^c \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + \\ &+ k\lambda\mu B^*(x) \int_0^c \tau(s)ds \int_0^c \left(\frac{(c-x)x^2}{(c-t)t^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) \frac{dt}{1-ks-t} + R_2[\tau] + \Phi_4(x), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} R_2[\tau] &= R_1[\tau] + k\lambda\mu B^*(x) \int_0^c \tau(s)ds \times \\ &\times \int_0^c \left(\frac{(c-x)x^2}{(c-t)t^2} \right)^\alpha \left[\left(\frac{c+x}{c+t} \right)^\alpha \frac{\omega(x)(A(x)-i\pi\lambda)}{\omega(t)(A(t)-i\pi\lambda)} - 1 \right] \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) \frac{dt}{1-ks-t} \end{aligned}$$

— регулярный оператор.

В (39) вычислим внутренний интеграл

$$A(x, s) = \int_0^c \left(\frac{(c-x)x^2}{(c-t)t^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) \frac{dt}{1-ks-t}.$$

Разлагая рациональный множитель подинтегрального выражения на простые дроби, используя формулы гипергеометрической функции и выполнив несложные вычисления, имеем

$$\begin{aligned} A(x, s) &= \frac{(c-x)^\alpha x^{2\alpha}}{1-ks-x} \left\{ -\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha)}{x^{2\alpha}(c-x)^\alpha} + \frac{c^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\alpha\Gamma(1-3\alpha)x^{2\alpha}} F\left(1-2\alpha, \alpha, 1+\alpha; \frac{c-x}{c}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{c^{1-3\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-3\alpha)(1-ks)^{1-\alpha}(1-ks-c)^\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right) \right\} + B_0(x, s), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} B_0(x, s) &= -\frac{(c-x)^\alpha x^{2\alpha}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(1-\alpha)c^{1-3\alpha}}{(1-ks+x)\Gamma(2-3\alpha)} \times \\ &\times \left[\frac{F\left(1-2\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{c+x}\right)}{x^{2\alpha}(c+x)^{1-2\alpha}} + \frac{F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right)}{(1-ks)^{1-\alpha}(1-ks-c)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $B_0(x, s)$ — непрерывно дифференцируемая функция в квадрате $[0, c] \times [0, c]$.

Учитывая (40), равенство (39) записываем в виде

$$\begin{aligned} \tau(x) = & k\lambda\mu A^*(x) \int_0^c \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + k\lambda\mu B^*(x) \int_0^c \tau(s)ds \times \\ & \times \left\{ \frac{(c-x)^\alpha x^{2\alpha}}{1-ks-x} \left[-\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha)}{x^{2\alpha}(c-x)^\alpha} + \frac{c^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\alpha\Gamma(1-3\alpha)x^{2\alpha}} F\left(1-2\alpha, \alpha, 1+\alpha; \frac{c-x}{c}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c^{1-3\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-3\alpha)(1-ks)^{1-\alpha}(1-ks-c)^\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right) \right] + B_0(x, s) \right\} + \\ & + R_2[\tau] + \Phi_4(x). \end{aligned} \quad (41)$$

Равенство (41) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \tau(x) = & k\lambda\mu A^*(c) \int_0^c \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} - \pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha) k\lambda\mu B^*(c) \int_0^c \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + \\ & + \frac{k\lambda\mu B^*(x)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)c^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} \times \\ & \times \int_0^c \frac{x^{2\alpha}(c-x)^\alpha}{(1-ks)^{1-\alpha}(1-ks-c)^\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right) \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + R_3[\tau] + \Phi_4(x), \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} R_3[\tau] = & k\lambda\mu \int_0^c \frac{\tau(s)}{1-ks-x} (A^*(x) - A^*(c))ds - k\lambda\mu \pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha) \int_0^c \frac{\tau(s)}{1-ks-x} (B^*(x) - B^*(c))ds + \\ & + \frac{k\lambda\mu B^*(x)c^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\alpha\Gamma(1-3\alpha)} F\left(1-2\alpha, \alpha, 1+\alpha; \frac{c-x}{c}\right) \int_0^c \frac{(c-x)^\alpha \tau(s)ds}{1-ks-x} + \\ & + k\lambda\mu B^*(x) \int_0^c B_0(x, s)\tau(s)ds + R_2[\tau] \end{aligned}$$

— регулярный оператор.

В силу $a(c) = 0$ из (42) получим

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{k\lambda\mu B^*(x)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)c^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} \times \\ & \times \int_0^c \frac{x^{2\alpha}(c-x)^\alpha}{(1-ks)^{1-\alpha}(1-ks-c)^\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right) \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + R_3[\tau] + \Phi_4(x). \end{aligned} \quad (43)$$

Далее, уравнение (43) запишем в виде

$$\tau(x) = \frac{k\lambda\mu B^*(c)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)c^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^c \frac{x^{2\alpha}(c-x)^\alpha}{(1-ks)^{1-\alpha}(1-ks-c)^\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right) \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + R_4[\tau] + \Phi_4(x), \quad (44)$$

где

$$R_4[\tau] = R_3[\tau] + \frac{k\lambda\mu\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)c^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} \times \\ \times \int_0^c \frac{x^{2\alpha}(c-x)^\alpha}{(1-ks)^{1-\alpha}(1-ks-c)^\alpha} (B^*(x) - B^*(c)) F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right) \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x}.$$

В силу $(1-ks-c)^\alpha = k^\alpha(c-s)^\alpha$ уравнение (44) запишем в виде

$$\tau(x) = \frac{\lambda k^{1-\alpha} \mu B^*(c) \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1-2\alpha) c^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} \times \\ \times \int_0^c \frac{x^{2\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right)}{(1-ks)^{1-\alpha}} \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + R_4[\tau] + \Phi_4(x), \quad x \in (0, c). \quad (45)$$

Преобразуем уравнение (45), выделив его характеристическую часть,

$$\tau(x) = \lambda \mu k^{1-\alpha} B^*(c) \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \int_0^c \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x} + R_5[\tau] + \Phi_4(x), \quad x \in (0, c), \quad (46)$$

где

$$R_5[\tau] = R_4[\tau] + \frac{\lambda \mu k^{1-\alpha} B^*(c) \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-3\alpha)} \times \\ \times \int_0^c \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha \left[\frac{x^{2\alpha}}{(1-ks)^{1-\alpha}} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{c}{1-ks}\right) - \right. \\ \left. - c^{3\alpha-1} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; 1\right) \right] \frac{\tau(s)ds}{1-ks-x}.$$

С учетом тождества $1-ks-c=0$ имеем

$$\tau(x) = \lambda \mu k^{1-\alpha} B^*(c) \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \int_0^c \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha \frac{\tau(s)ds}{(c-s) \left(k + \frac{c-x}{c-s}\right)} + R_5[\tau] + \Phi_4(x), \quad x \in (0, c). \quad (47)$$

В силу $\lambda \mu k^{1-\alpha} B^*(c) \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{\mu k^{1-\alpha} \sin(\alpha\pi)}{\pi}$ из (47) получим

$$\tau(x) = \mu k^{1-\alpha} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^c \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha \frac{\tau(s)ds}{(c-s) \left(k + \frac{c-x}{c-s}\right)} + R_5[\tau] + \Phi_4(x), \quad x \in (0, c). \quad (48)$$

Осуществляя в равенстве (48) замену переменных $x = c - ce^{-\xi}$, $s = c - ce^{-t}$ и обозначая $\rho(\xi) = \tau(c - ce^{-\xi})e^{(\alpha-\frac{1}{2})\xi}$, приводим его к виду

$$\rho(\xi) = \mu k^{1-\alpha} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\rho(t)dt}{ke^{\frac{\xi-t}{2}} + e^{-\frac{\xi-t}{2}}} + R_6[\rho(\xi)] + \Phi_5(\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \quad (49)$$

где

$$R_6[\rho(\xi)] = R_5[\tau(c - ce^{-\xi})]e^{(\alpha-\frac{1}{2})\xi}, \quad \Phi_5(\xi) = \Phi_4(c - ce^{-\xi})e^{(\alpha-\frac{1}{2})\xi}.$$

Введем обозначение:

$$N(\xi) = \frac{\mu k^{1-\alpha} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}}{ke^{\frac{\xi}{2}} + e^{-\frac{\xi}{2}}}.$$

Тогда уравнение (49) запишется в виде

$$\rho(\xi) = \int_0^\infty N(\xi - t)\rho(t)dt + R_6[\rho(\xi)] + \Phi_5(\xi), \quad \xi \in (0, \infty). \quad (50)$$

Уравнение (50) является интегральным уравнением Винера–Хопфа [20], и с помощью преобразования Фурье оно приводится к краевой задаче Римана, т.е. решается в квадратурах. Функции $N(\xi)$, $\Phi_5(\xi)$ имеют показательный порядок убывания на бесконечности, причем $N'(\xi) \in C(0, \infty)$, $\Phi_5(\xi) \in H^{\alpha_1}(0, \infty)$. Следовательно, $N(\xi)$, $\Phi_5(\xi) \in L_2 \cap H^{\alpha_1}$.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свертки справедливы лишь в одном частном случае — когда индекс этих уравнений равен нулю. Индексом уравнения (50) будет индекс выражения $1 - \hat{N}(\xi)$ с обратным знаком, где

$$\hat{N}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi t} N(t)dt = \mu k^{1-\alpha} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi t} dt}{ke^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}. \quad (51)$$

Вычислив интеграл Фурье, с помощью теории вычетов [20] найдем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi t} dt}{ke^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{\pi e^{-i\xi \ln k}}{\sqrt{k} \operatorname{ch}(\pi\xi)}. \quad (52)$$

Подставляя (52) в (51), получаем

$$\hat{N}(\xi) = \mu k^{\frac{1}{2}-\alpha} \sin(\alpha\pi) \frac{e^{-i\xi \ln k}}{\operatorname{ch}(\pi\xi)}.$$

В силу условия $\mu k^{\frac{1}{2}-\alpha} \sin(\alpha\pi) < 1$ и так как $\operatorname{Re}(\hat{N}(\xi)) = \operatorname{Re}\left(\mu k^{\frac{1}{2}-\alpha} \sin(\alpha\pi) \frac{e^{-i\xi \ln k}}{\operatorname{ch}(\pi\xi)}\right) = \mu k^{\frac{1}{2}-\alpha} \sin(\alpha\pi) \frac{\cos(\xi \ln k)}{\operatorname{ch}(\pi\xi)} < \mu k^{\frac{1}{2}-\alpha} < 1$, имеем $\operatorname{Re}(1 - \hat{N}(\xi)) > 0$.

Следовательно, индекс уравнения (50) $\chi = -\operatorname{Ind}(1 - \hat{N}(\xi)) = 0$, т.е. изменение аргумента выражения на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю [20].

Таким образом, уравнение (50) редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи БС. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Севостьянов Г.Д. *Краевая задача Трикоми для полуполосы и четверти плоскости*, Волжск. матем. сб. (3), 312–320 (1965).
- [2] Gellerstedt S. *Quelques Problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$* , Ark. Mat. Astron. Fyzik **26** (3), 1–32 (1938).
- [3] Бицадзе А.В. *Об одной задаче Франкля*, ДАН СССР **109** (6), 1091–1094 (1956).
- [4] Девингталь Ю.В. *О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля*, Изв. вузов. Матем. (2), 39–51 (1958).
- [5] Флайшер Н.М. *Об одной задаче Франкля для уравнения М.А. Лаврентьева в случае неограниченной области*, Изв. вузов. Матем. (6), 152–156 (1966).
- [6] Капустин Н.Ю., Сабитов К.Б. *О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравнения **27** (1), 60–68 (1991).
- [7] Хайруллин Р.С. *Аналог задачи Франкля для уравнения второго рода*, Изв. вузов. Матем. (4), 59–63 (2002).
- [8] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными*, Изв. вузов. Матем. (9), 83–94 (2022).
- [9] Сабитов К.Б., Сафина Р.М. *Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом*, Изв. РАН. Сер. матем **82** (2), 79–112 (2018).
- [10] Полосин А.А. *Об однозначной разрешимости задачи Трикоми для одной специальной области*, Дифференц. уравнения **32** (3), 394–401 (1996).
- [11] Хайруллин Р.С. *Задачи Трикоми для одного уравнения с сингулярными коэффициентами*, Изв. вузов. Матем. (3), 68–76 (1996).
- [12] Жегалов В.И. *Задача Франкля со смещением*, Изв. вузов. Матем. (9), 11–20 (1979).
- [13] Мирсабуров М. *Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках*, Дифференц. уравнения **37** (9), 1281–1284 (2001).
- [14] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Высш. школа, М., 1985).
- [15] Рузиев М.Х. *О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области*, Изв. вузов. Матем. (11), 41–49 (2010).
- [16] Мирсабурова У.М. *Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом*, Изв. вузов. Матем. (9), 70–82 (2022).
- [17] Ruziev M.Kh. *On a Problem with Shift on Pieces of Boundary Characteristics for the Gellerstedt Equation with Singular Coefficients*, Lobachevskii J. Math. **43** (2), 484–495 (2022).
- [18] Ruziev M.Kh., Yuldasheva N.T. *On a Boundary Value Problem for a Class of Equations of Mixed Type*, Lobachevskii J. Math. **44** (7), 2916–2929 (2023).
- [19] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).
- [20] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки* (Наука, М., 1978).

Менглибай Холтожибаевич Рузиев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
просп. М. Улугбека, д. 81, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан,

e-mail: mruziev@mail.ru

Наргиза Тахиржонова Юлдашева

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
просп. М. Улугбека, д. 81, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан,

e-mail: nyuldasheva87@gmail.com

M.Kh. Ruziev and N.T. Yuldasheva

On one boundary value problem for the Gellerstedt equation with a singular coefficient

Abstract. A problem with the Bitsadze–Samarskii and Frankl conditions for a mixed-type equation in a domain whose elliptic part is the first quadrant of the plane, and the hyperbolic part is the characteristic triangle is studied. The correctness of the formulated problem is proved.

Keywords: extremum principle, uniqueness of solution, existence of solution, singular integral equation, Wiener–Hopf equation, index of equation.

Menglibay Kholtojibaevich Ruziev

*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
81 M. Ulugbek Ave., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: mruziev@mail.ru

Nargiza Taxirjonovna Yuldasheva

*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
81 M. Ulugbek Ave., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: nyuldasheva87@gmail.com