Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №12, с. 44–56 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

ИК.И. ЖАЛОЛОВ, О.И. ЖАЛОЛОВ

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ $\overleftrightarrow{V}_m(x)$ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация. Рассмотрена задача построения преобразования Фурье боронообразной функции для определения дискретного аналога дифференциального оператора, который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера. Кроме того, рассмотрена задача построения дискретного аналога конкретного оператора в частном случае.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство Соболева, функционал погрешности, интерполяционная формула, экстремальная функция.

УДК: 519.54

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-44-56

Введение

Для построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространствах $H_2^{\mu}(R^n)$ и $L_2^{(m)}(R^n)$ важную роль играет дискретный аналог $D_{m,n}[\beta]$ полигармонического оператора

$$\Delta^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m.$$

Впервые в пространстве $L_2^{(m)}(R^n)$ построением и изучением свойств обращения оператора свертки с функцией $G_{m,n}[\beta]$, где $G_{m,n}(x)$ — фундаментальное решение полигармонического оператора, т. е. свойств такой функции дискретного аргумента $D_{m,n}[\beta]$, которая удовлетворяет равенству $D_{m,n}[\beta] * G_{m,n}[\beta] = \delta[\beta]$, где $\delta[\beta]$ равно единице при $\beta = 0$ и равно нулю при $\beta \neq 0$, занимался С.Л. Соболев [1]. Он изучал свойства оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$, являющегося обращением оператора свертки с функцией $G_{hH}^{(m)}[\beta] = h^n G_m(hH\beta)$ [1]. Задача построения дискретного оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ при произвольном n оказалось очень трудной.

В одномерном случае дискретный аналог оператора $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ построен З.Ж. Жамоловым [2]. Но там вид этой функции выписан с точностью до $m+1$-неизвестного коэффициента. В работе Х.М. Шадиметова [3] найдены эти коэффициенты, тем самым полностью построен дискретный аналог оператора $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$. Построением дискретного аналога дифференциальных

Поступила в редакцию 13.01.2024, после доработки 13.01.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

операторов

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$$

и

$$\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$$

занимались Х.М. Шадиметов, А.Р. Хаётов [4], [5].

В работе Х.М. Шадиметов, Н.Х. Маматова [6] вариационным методом в пространстве Соболева построены составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы. В работе Б.Г. Габдулхаева [7] в пространстве квадратично суммируемых функций установлены эффективные достаточные условия непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов с ядрами Коши на отрезке вещественной оси.

В данной работе рассматривается построение преобразования Фурье функции $\overleftarrow{\overrightarrow{V}}_m(x)$ для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$.

Определение. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме

$$\| f |\, H_2^\mu(R)\| = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left[\left(1+y^2\right)^{m/2} \cdot F\left[f(x)\right](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Здесь F и F^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье:

$$F\left[f(x)\right](y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i y x} dx \quad \text{и} \quad F^{-1}\left[f(x)\right](y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

При выполнении условия $V_{m/2}(x) = F^{-1}\left[\left(1+y^2\right)^{-m/2}\right](x) \in L_2(R)$ пространство $H_2^\mu(R)$ вкладывается в пространство непрерывных функции $C(R)$ [1], [8].

Скалярное произведение в $H_2^\mu(R)$ определяется в виде

$$<\varphi, \psi> = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\left[\left(1+y^2\right)^{m/2} \cdot F\left[\varphi(x)\right](y)\right] \cdot F^{-1}\left[\left(1+y^2\right)^{m/2} \cdot F\left[\psi(x)\right](y)\right] dx.$$

1. Постановка задачи

В настоящей работе мы исследуем задачу построения преобразования Фурье функции $\overleftarrow{\overrightarrow{V}}_m(x)$ для определения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора

$$\left(1 - \frac{d^2}{\left(2\pi\omega\right)^2 dx^2}\right)^m$$

[9], [10], который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве $H_2^\mu(R)$.

Данная работа является обобщением работ [11] и [12], т. е. дан алгоритм построения преобразования Фурье функции $\overleftarrow{\overrightarrow{V}}_m(x)$ для определения дискретного аналога оператора $D_m[h\beta]$, который удовлетворяет равенству

$$D_m\left[\beta\right]*V_m\left[\beta\right]=\delta\left[\beta\right], \tag{1}$$

где $V_m\left(x\right)=\nu_m\left(\omega x\right)$, $\omega>0$. Здесь

$$\nu_m(x)=F^{-1}\left\{\left[1+y^2\right]^m\right\}\left(x\right), \quad x=h\beta,$$

где $F^{-1}\left[\varphi\right]$ — обратное преобразование Фурье функции φ, $\delta\left[\beta\right]$ — дискретная дельта-функция, которая равна единице при $\beta=0$ и равна нулю при $\beta\neq 0$, $h=\dfrac{1}{N}$, $N=2,3,\ldots,[\beta]=h\beta$.

Оператор $D_m\left[\beta\right]$ при $m=3,4$ построен в работах [11] и [12] .

Теорема 1. *Оператор $D_3\left[\beta\right]$, удовлетворяющий равенству (1), при $m=3$ определяется формулой*

$$D_3\left[\beta\right]=B\begin{cases} c+\sum\limits_{i=1}^{2}\dfrac{A_i}{\lambda_i}, & \beta=0;\\ 1+\sum\limits_{i=1}^{2}A_i, & |\beta|=1;\\ \sum\limits_{i=1}^{2}A_1{\lambda_1}^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\end{cases}$$

где

$$B=\frac{4}{a_1\pi}, \quad a_1=16\pi^2h^2\operatorname{sh}(2\pi h)-3\left(\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\pi h)\right), \quad c=-\left(6\operatorname{ch}(2\pi)h+\frac{a_2}{a_1}\right),$$

$$a_2=6\operatorname{ch}(2\pi h)\left(\pi hh2\pi h-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\pi h)\right)-3\left(\operatorname{sh}(2\pi h)\operatorname{ch}(2\pi h)-2\pi h\right)-8\pi^2h^2\operatorname{sh}(2\pi h),$$

$$A_i=\frac{\lambda_i^6-6b\lambda_i^5+3\left(b^24+1\right)\lambda_i^4-4b\left(2b^2+3\right)\lambda_i^3+3\left(4b^2+1\right)\lambda_i^2-6b\lambda_i+1}{\lambda_i^2-1}, \quad i=\overline{1,2},$$

$$\lambda_1=\frac{1}{4}\left[b_1+\sqrt{b_1^2-4b_2-8}+\sqrt{\left(b_1+\sqrt{b_1^2-4b_2+8}\right)^2-16}\right],$$

$$\lambda_2=\frac{1}{4}\left[b_1+\sqrt{b_1^2-4b_2-8}-\sqrt{\left(b_1+\sqrt{b_1^2-4b_2+8}\right)^2-16}\right],$$

$$b_1=\frac{a_2}{a_1}, \quad b_2=\frac{a_3}{a_1},$$

$$a_3=\left[6\operatorname{ch}(2\pi h)\left(\operatorname{sh}(2\pi h)\operatorname{ch}(2\pi h)-2\pi h\right)-6\left(\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\pi h)\right)+16\pi^2h^2\operatorname{sh}2\pi hch2\pi h\right],$$

$|\lambda_1|<1$ *и* h *— малый параметр.*

Теорема 2. *Оператор $D_4[\beta]$, удовлетворяющий равенству (1), при $m=4$ определяется формулой*

$$D_4[\beta] = B\cdot\begin{cases} c+\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{A_i}{\lambda_i}, & \beta=0;\\ 1+\sum\limits_{i=1}^{3}A_i, & |\beta|=1;\\ \sum\limits_{i=1}^{3}A_i{\lambda_i}^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\end{cases}$$

где

$$B=\frac{2^2\cdot 3}{\pi^2\cdot a_1},\quad a_1=-15a+120hb-12\cdot 16\pi h^2a+32\pi^2h^3b,$$

$$c=\frac{a_2}{a_1}+8b,\quad a_2=90ab-240h\left(1+2b^2\right)+12\cdot 16\pi^2a\cdot 2\left(1+b\right)+32\pi^2h^3\cdot 8\left(b^2-1\right),$$

$$A_i=\frac{{\lambda_i}^8+b_1'{\lambda_i}^7+b_2'{\lambda_i}^6+b_3'{\lambda_i}^5+b_4'{\lambda_i}^4+b_5'{\lambda_i}^3+b_6'{\lambda_i}^2+b_7'+1}{\lambda_i^2-1},\quad i=\overline{1,3},$$

$$b_1'=-8b,\quad b_2'=4\left(b^2+1\right),\quad b_3'=8b\left(1-4b^2\right),\quad b_4'=2\left(24b^2+8b^4+3\right);$$

здесь

$$b_1'=b_7',\quad b_2'=b_6',\quad b_3'=b_5',$$

λ_i *— корни многочлена* $P_6(\lambda)=\left(\lambda^6+b_1\lambda^5+b_2\lambda^4+b_3\lambda^3+b_4\lambda^2+b_5\lambda+1\right),\quad i=\overline{1,3},$

$$b_1=\frac{a_2}{a_1},\quad b_2=\frac{a_3}{a_1},\quad b_3=\frac{a_4}{a_1},$$

где

$$a_3=-45a\left(1+4b^2\right)+120hb\left(11+4b^2\right)+12\cdot 16\pi h^2a\left(8b-11\right)+32\pi^2h^3b\left(4b^2-13\right),$$

$$a_4=60ab\left(3+2b\right)-120h4\left(1+4b^2\right)+12\cdot 16\pi h^2a4\left(1+2b^2+3b\right)+32\pi^2h^3 16\left(2-b^2\right),$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\sqrt{\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)}\right]+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{1}{4}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\sqrt{\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)}\right]^2-4}\right\},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\sqrt{\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)}\right]-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{1}{4}\left[b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)+\sqrt{\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)^2-4\left(b_2-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\left(b_1-\left(A+B+\frac{b_1}{3}\right)\right)-3\right)}\right]^2-4}\right\};$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{9}+\frac{q^2}{4}}},\quad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{9}+\frac{q^2}{4}}};$$

здесь $p=-\dfrac{b_1^2}{3}+b_2-3,\ q=2\cdot\dfrac{b_1^3}{9}-\dfrac{b_1\left(b_2-3\right)}{3}+2b_1-b_3$ *и* h *— малый параметр.*

2. Некоторые свойства функции $V_m(x)$

1. Из четности $\mu^{-1}(\xi)=\left(1+\xi^2\right)^{-m}$ следует четность $V_m(x)=F^{-1}[\mu(\xi)](\omega x)$. Это очевидно.

2. Функция $V_m(x)$ убывает на бесконечность быстрее любой отрицательной степени $|x|$. Действительно, функция $\mu(\xi)$ и $\mu^{-1}(\xi)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Из бесконечной дифференцируемости и суммируемости $\mu^{-1}(\xi)$ и ее производных следует

$$V_m(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-2\pi i\omega x)^{(\alpha)}\cdot\left[\left(1+\xi^2\right)^{-m}\right]^{(\alpha)}e^{-2\pi i\xi\omega x}d\xi,$$

для любого $\alpha\geq 0$. Отсюда $|V_m(x)(2\pi i\omega x)^{\alpha}|<\infty$.

3. Явный вид $V_m(x)$. В силу четности $V_m(x)$ имеем

$$V_m\left(x\right)=\nu_m(\omega x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi iy\omega x}}{\left(1+y^2\right)^m}dy=2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\omega yx}{\left(1+y^2\right)^m}dy.$$

Далее, известно (см. [13]) следующее равенство:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos(ay)dy}{\left(b^2+y^2\right)^n}=\frac{\pi\cdot e^{-ab}}{(2\cdot b)^{2n-1}(n-1)!}\sum\frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!}(2ab)^k. \tag{2}$$

Положив в этом равенстве, что $a=2\pi\omega x$ и $n=m$, получим явное выражение преобразования Фурье функции $\mu^{-1}(\xi)$ в элементарных функциях. Так как левая часть (2) не меняется при замене x на $-x$ в силу четности подинтегральной функции, а правая часть справедлива только для $x>0$, то в правой части последнего равенства x заменим на $|x|$.
Тогда

$$V_m\left(x\right)=\nu_m(\omega x)=2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\omega yx}{\left(1+y^2\right)^m}dy=\frac{\pi\cdot e^{-2\pi\omega|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(2\pi\omega)^k}{k!(m-k-1)!}|x|^k. \tag{3}$$

3. Алгоритм построения преобразования Фурье функции $\overleftrightarrow{V}_m(x)$

В дальнейшем рассмотрим систему из работы [14], которая имеет следующий вид:

$$\sum_{\beta=0}^{N}\overset{0}{C}_{\beta}V_m(h\alpha-h\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(y)\cdot\varepsilon_{[0,1]}(y)\cdot V_m(h\alpha-y)dy,\quad \alpha=0,1,2,\ldots,N. \tag{4}$$

Переобозначив $C[\beta]=C_\beta$ и $V_m^h[\beta]=V_m(h\beta)$, систему (4) можно записать в виде свертки функций дискретного аргумента:

$$\overset{0}{C}[\beta]*V_m^h[\beta]=f_m[\beta],\quad \beta=0,1,\ldots,N, \tag{5}$$

$$\overset{0}{C}[\beta]=0,\quad h\beta\notin[0,1], \tag{6}$$

где

$$f_m[\beta]=\int\limits_{0}^{1}p(y)\cdot V_m(h\beta-y)dy.$$

Систему уравнений (5), (6) будем обозначать системой B.

Рассмотрим соответствующую задачу.

Задача B. Найти дискретную функцию $C[\beta]$, удовлетворяющую системе B при заданных $f_m[\beta]$.

Главная идея этого метода состоит в замене неизвестной функции $C[\beta]$ на функцию $u_m^h[\beta] = u_m(h\beta)$, а именно вместо $C[\beta]$ вводится неизвестная функция

$$u_m^h[\beta] = V_m^h[\beta] * C[\beta]. \tag{7}$$

Тогда необходимо найти оператор $D_m(h\beta) = D_m^h[\beta]$, который удовлетворяет равенству

$$D_m^h[\beta] * V_m^h[\beta] = \delta(h\beta), \tag{8}$$

где $\delta(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0; \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$

Из (7), учитывая (8), получим

$$C[\beta] = D_m^h[\beta] * u_m^h[\beta],$$

где $u_m^h\,[\beta]$ определено в работе [14] и доказана

Теорема 3. *Функция*

$$u_m(h\beta) = \begin{cases} f_m[\beta], & h\beta \in [0,1]; \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{N} C_\alpha V_m(h\beta - h\alpha), & h\beta \notin [0,1]. \end{cases}$$

Теперь будем искать решение уравнения (8). Согласно теории периодических обобщенных функций и преобразованию Фурье вместо дискретной функции $D_m(h\beta)$ удобнее искать боронообразную функцию

$$\overleftrightarrow{D}_m(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_m(h\beta)\delta(x - h\beta).$$

Тогда уравнение (8) в классе боронообразных функций переходит в уравнение

$$\overleftrightarrow{D}_m(x) * \overleftrightarrow{V}_m(x) = \delta(x), \tag{9}$$

где

$$\overleftrightarrow{V}_m(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} V_m(h\beta)\delta(x - h\beta).$$

Известно (см. [1]), что между классом боронообразных функций и классом функций дискретного аргумента существует изоморфизм. Поэтому вместо $D_m(h\beta)$ достаточно исследовать функцию $\overleftrightarrow{D}_m(x)$. Применяя к обеим частям равенства (9) преобразование Фурье и имея в виду, что $F[\varphi(x) * \psi(x)] = F[\varphi] \cdot F[\psi]$ и $F[\delta(x)] = 1$, получим

$$F\left[\overleftrightarrow{D}_m(x)\right] \cdot F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right] = 1.$$

Отсюда имеем

$$F\left[\overleftrightarrow{D}_m(x)\right] = \left\{F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right]\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Вычислим преобразование Фурье $F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right]$ боронообразной функции $\overleftrightarrow{V}_m(x)$.

Известно (см. [1]), что

$$\phi_0(x)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(x-\beta),\ \ \delta(hx)=h^{-1}\delta(x) \text{ и } F\left[\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i\beta x)\right]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(x-\beta).$$

В силу этих равенств получим

$$\overleftrightarrow{V}_m(x)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}V_m(h\beta)\delta(x-h\beta)=V_m(x)\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(x-h\beta)=$$

$$=h^{-1}V_m(x)\cdot\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta\big(xh^{-1}-\beta\big)=h^{-1}V_m(x)\phi_0\big(h^{-1}x\big). \tag{11}$$

Известно также (см. [2]), что

$$F\big[\phi_0\big(h^{-1}x\big)\big]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}F\big[\delta\big(h^{-1}x-\beta\big)\big]=h\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}F[\delta(x-h\beta)]=$$

$$=h\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi iph\beta)=h\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(hp-\beta)=h\phi_0(hp),$$

т. е.

$$F\big[\phi_0\big(h^{-1}x\big)\big]=h\phi_0(hp). \tag{12}$$

Поэтому с учетом (11) и (12) имеем

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right]=F\big[h^{-1}V_m(x)\cdot\phi_0\big(h^{-1}x\big)\big]=$$

$$=h^{-1}F[V_m(x)]*F\big[\phi_0\big(h^{-1}x\big)\big]=h^{-1}F[V_m(x)]*\phi_0(hp)\cdot h. \tag{13}$$

Поскольку $F[V_m(x)](p)=\big(1+p^2\big)^{-m}$, из (20) имеем

$$\begin{aligned}F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)&=\big(1+p^2\big)^{-m}*\phi_0(hp)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\big(1+p^2\big)^{-m}*\delta(hp-\beta)=\\&=h^{-1}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\big[1+\big(p-\beta h^{-1}\big)^2\big]^m}.\end{aligned} \tag{14}$$

Функция $F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)$ является $N=h^{-1}$-периодической функцией. Используя равенство (14), мы должны сначала определить $\left\{F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)\right\}^{-1}$, которая также будет N-периодической функцией, а потом разложить ее в ряд Фурье. Тогда на основании (10) имеем

$$F\left[\overleftrightarrow{D}_m(x)\right](p)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\hat{D}_\beta\exp(2\pi i\beta hp), \tag{15}$$

где $\hat{D}_k$ — коэффициенты Фурье функции $F\left[\overleftrightarrow{D}_m(x)\right](p)$, т. е.

$$\hat{D}_\beta=\int_0^N F\left[\overleftrightarrow{D}_m(x)\right](p)\exp(2\pi iph\beta)dp.$$

Применяя к равенству (15) формулу обращения Фурье, придем к боронообразной функции

$$\overleftrightarrow{D}_m(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \hat{D}_k \delta(x - h\beta).$$

Таким образом, по определению боронообразной функции, совокупность коэффициентов Фурье и есть искомая функция дискретного аргумента $D_m(hk)$. Для определения коэффициентов Фурье $F\left[\overleftrightarrow{D}_m(x)\right]$ сначала определим коэффициенты Фурье функции

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p).$$

Чтобы определить $F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)$, доказывается

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{h^{-1}}{\left[1 + (p - \beta h^{-1})^2\right]^m} = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \nu_m(\omega h\beta) \exp(2\pi i\beta hp). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть φ — основная функция. Тогда

$$\left(\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{h^{-1}}{\left[1 + (p - h^{-1}\beta)^2\right]^m}, \varphi(p)\right) = \left(F^{-1}\left[\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{h^{-1}}{\left[1 + (p - h^{-1}\beta)^2\right]^m}\right], F^{-1}[\varphi(p)]\right) =$$

$$= \left(F^{-1}\left[\frac{1}{(1+p^2)^m} * \phi_0(hp)\right](x), F^{-1}[\varphi(p)](x)\right) =$$

$$= \left(F^{-1}\left[\frac{1}{(1+p^2)^m}\right](x) \cdot F^{-1}\left[\phi_0(hp)\right](x), F^{-1}[\varphi(p)](x)\right) =$$

$$= \left(V_m(x) \cdot h^{-1}\phi_0\big(h^{-1}x\big), F^{-1}[\varphi(p)](x)\right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} V_m(hk) \exp(2\pi ihkx), \varphi(x)\right).$$

□

Из определения равенства двух обобщенных функций вытекает (16), что и доказывает лемму. Из (14), (16) следует

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} V_m(h\beta) e^{2\pi ihp\beta}. \tag{17}$$

Из (13) видно, что $F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p) > 0$ как сумма положительных функций. Поэтому $\left\{F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)\right\}^{-1} > 0$. Согласно (10) для определения коэффициентов Фурье функции $F\left[\overleftrightarrow{D}_m(h\beta)\right](p)$ нам нужно найти преобразование Фурье функции $\overleftrightarrow{V}_m(x)$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 4. *Преобразование Фурье функции $\overleftrightarrow{V}_m(x)$ для определения дискретного аналога дифференциального оператора*

$$\left[1 - \frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m, \tag{18}$$

удовлетворяющего равенству (10), *имеет вид*

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)=\frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[\frac{\lambda\left(e^{4\pi\omega h}-1\right)}{-\lambda^2e^{2\pi\omega h}+\lambda\left(e^{4\pi\omega h}+1\right)-e^{2\pi\omega h}}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\right)^i\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!\,(i-\rho)!}\rho^k+\frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!\,(i-\rho)!}\rho^k\right].$$

Доказательство. Используя (17), вычислим преобразование Фурье функции $\overleftrightarrow{V}_m(x)$. В формуле (3) положим, что $x=h\beta$, тогда

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi\cdot e^{-2\pi\omega h|\beta|}}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega)^k}{k!(m-k-1)!}|h\beta|^k e^{2\pi ih\beta p}.$$

Таким образом,

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(\omega x)\right](p)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\nu_m\left(h\beta\right)e^{2\pi ih\omega\beta p}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi\cdot e^{-2\pi\omega h|\beta|}}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega)^k}{k!(m-k-1)!}|h\beta|^k\times$$

$$\times e^{2\pi ih\beta p}=\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}e^{2\pi ihp\beta}|\beta|^k. \tag{19}$$

Отсюда, обозначая $e^{2\pi hp}=\lambda$, и после некоторых преобразований из (19) имеем

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)=\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}\lambda^\beta|\beta|^k=$$

$$=\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\frac{(2m-2)!}{(m-1)!}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}\lambda^\beta+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}\lambda^\beta|\beta|^k=$$

$$=\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\frac{(2m-2)!}{(m-1)!}\left[1+\sum_{\beta=-\infty}^{-1}e^{-2\pi\omega h|\beta|}\lambda^\beta+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}\lambda^\beta\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\sum_{\beta=-\infty}^{-1}e^{-2\pi\omega h|\beta|}\lambda^\beta|\beta|^k+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}\lambda^\beta|\beta|^k\right]=$$

$$=\frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[1+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}}\right)^\beta+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}\lambda^{-\beta}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}}\right)^\beta\beta^k+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\lambda^{-\beta}e^{-2\pi\omega h\beta}\right)\beta^k\right]=$$

$$= \frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[1+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}+\sum_{\beta=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda e^{2\pi\omega h})^{\beta}}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}\beta^k+\sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}\beta^k\right]. \qquad (20)$$

Применяя некоторые формулы из [15] на первое слагаемое (20), получаем

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)=\frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[1+\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}-1}+\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}\beta^k+\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda e^{2\pi\omega h})^{\beta}}\beta^k\right]. \qquad (21)$$

Справедлива следующая формула [16]:

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1}q^{\gamma}\gamma^k=\frac{1}{1-q}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{q}{1-q}\right)^{i}\Delta^i 0^k-\frac{q^n}{1-q}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{q}{1-q}\right)^{i}\Delta^i\gamma^k\,|_{\gamma=n}\,,$$

при $|q|<1$ из (21) имеем

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty}q^{\gamma}\gamma^k=\frac{1}{1-q}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{q}{1-q}\right)^{i}\Delta^i 0^k. \qquad (22)$$

В силу (22) из (21) имеем

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)=\frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[\frac{\lambda\left(e^{4\pi\omega h}-1\right)}{-\lambda^2e^{2\pi\omega h}+\lambda\left(e^{4\pi\omega h}+1\right)-e^{2\pi\omega h}}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\right)^{i}\Delta^i0^k+\right. \qquad (23)$$

$$\left.+\frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\right)^{i}\Delta^i0^k\right],$$

где $\Delta^i\gamma^k$ — конечная разность порядка i от γ^k, $\Delta^i0^k=\Delta^i\gamma^k\,|_{\gamma=n}$.

Таким образом, применяя формулы из [17] в (23), имеем

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)=\frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[\frac{\lambda\left(e^{4\pi\omega h}-1\right)}{-\lambda^2e^{2\pi\omega h}+\lambda\left(e^{4\pi\omega h}+1\right)-e^{2\pi\omega h}}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\right)^{i}\Delta^i0^k+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\right)^{i}\Delta^i0^k\right]=$$

$$=\frac{\pi\,(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[\frac{\lambda\left(e^{4\pi\omega h}-1\right)}{-\lambda^2e^{2\pi\omega h}+\lambda\left(e^{4\pi\omega h}+1\right)-e^{2\pi\omega h}}\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\right)^i\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!\,(i-\rho)!}\rho^k+\frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!\,(i-\rho)!}\rho^k\right],$$

что и требовалось доказать. □

Отметим, что в работах [18]–[21] построены оптимальные квадратурные формулы и оптимальные по порядку сходимости, асимптотические оптимальные и практичные асимптотические оптимальные кубатурные формулы в функциональных пространствах С.Л. Соболева.

Так как нам известно $F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)$, то для определения коэффициентов Фурье функции $F\left[\overleftrightarrow{D}_m(h\beta)\right](p)$, т. е. $D_m(x)$, учитывая (10) после разложения $\left\{F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)\right\}^{-1}$ в ряд Фурье, в дальнейшем находим дискретный аналог $D_m[\beta]$ оператора (18).

Рассмотрим случай $m=1$ и $\omega=1$. Для $F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)$ имеем

$$F[\overleftrightarrow{V}_1(\beta)](p)=\pi\left[1+\frac{\lambda}{\exp(2\pi h)-\lambda}+\frac{1}{\lambda\exp(2\pi h)-1}\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{(\exp(2\pi h)-\lambda)(\lambda\exp(2\pi h)-1)+\lambda(\lambda\exp(2\pi h)-1)+(\exp(2\pi h)-\lambda)}{\lambda\exp(4\pi h)-\exp(2\pi h)-\lambda^2\exp(2\pi h)+\lambda}\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{-\lambda^2\exp(2\pi h)+\lambda(\exp(4\pi h)+1)-\exp(2\pi h)+\lambda^2\exp(2\pi h)-\lambda+\exp(2\pi h)-\lambda}{-\lambda^2\exp(2\pi h)+\lambda(\exp(4\pi h)+1)-\exp(2\pi h)}\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{\lambda(\exp(4\pi h)-1)}{-\lambda^2\exp(2\pi h)+\lambda(\exp(4\pi h)+1)-\exp(2\pi h)}\right],$$

где $\lambda=\exp(2\pi iph)$. Отсюда

$$F\left[\overleftrightarrow{V}_1(\beta)\right](p)=\pi\left[\frac{\lambda(\exp(4\pi h)-1)}{-\lambda^2\exp(2\pi h)+\lambda(\exp(4\pi h)+1)-\exp(2\pi h)}\right].$$

Далее находим $\left\{F\left[\overleftrightarrow{V}_1(x)\right](p)\right\}^{-1}$. Имеем

$$\left\{F\left[\overleftrightarrow{V}_m(x)\right](p)\right\}^{-1}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\lambda^2\exp(2\pi h)-\lambda(\exp(4\pi h)+1)+\exp(2\pi h)}{\lambda(1-\exp(4\pi h))}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\lambda\frac{\exp(2\pi h)}{1-\exp(4\pi h)}-\frac{\exp(4\pi h)+1}{1-\exp(4\pi h)}+\frac{1}{\lambda}\frac{\exp(2\pi h)}{1-\exp(4\pi h)}\right]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}D_1[\beta]\exp(2\pi iph\beta).$$

Отсюда вытекает

Теорема 5. *Дискретный аналог* $D_m[\beta]$ *дифференциального оператора* $\left[1-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m$, *удовлетворяющий равенству* (8), *при* $m=1$ *имеет следующий вид*:

$$D_1[\beta]=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\dfrac{\exp(4\pi h)+1}{\exp(4\pi h)-1}, & \beta=0;\\[2mm] \dfrac{\exp(2\pi h)}{1-\exp(4\pi h)}, & |\beta|=1.\end{cases}$$

Заключение

В теории квадратурных и кубатурных формул важную роль играют дискретные аналоги дифференциальных операторов. С.Л.Соболев разработал алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных и кубатурных формул.

В настоящей работе рассмотрена задача построения преобразования Фурье функции $\overleftrightarrow{V}_m(x)$ для определения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1-\dfrac{d^2}{(2\pi\omega)^2dx^2}\right)^m$, который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве $H_2^\mu(R)$.

Литература

[1] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* (Наука, М., 1974).

[2] Жамолов З.Ж. *Об одном разностном аналоге оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение. В кн.: Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения* (Фан, Ташкент, 1978).

[3] Шадиметов Х.М. *Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение*, Вопр. вычисл. и прикл. матем. (79), 22–35 (1985).

[4] Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. *Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$*, Узб. матем. журн. (2), 85–95 (2004).

[5] Хаётов А.Р. *Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1$ и его свойства*, Узб. матем. журн. (3), 81–88 (2009).

[6] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. *Составные кубатурные формулы на решетке*, Изв. вузов. Матем. (11), 59–74 (2023).

[7] Габдулхаев Б.Г. *О непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов*, Изв. вузов. Матем. (8), 3–10 (2009).

[8] Волевич Л.Р., Панеях Б.П. *Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения*, УМН **20** (I), 3–74 (1965).

[9] Jalolov I.I. *A differential operator of order $2m$ and its fundamental solution*, Uzb. Math. J. **1**, 65–72 (2018).

[10] Jalolov I.I. *The algorithm for constructing a differential operator of 2nd order and finding a fundamental solution*, AIP Conf. Proc. **2365** (1), 020015 (2021).

[11] Жалолов Ик.И. *Алгоритм построения дискретного аналога $D_3^h[\beta]$ одного оператора*, Пробл. вычисл. и прикл. матем. (2), 48–52 (2015).

[12] Jalolov I.I. *Algorithm for constructing a discrete analogue $D_4[\beta]$ of a differential operator*, AIP Conf. Proc. **2781** (1), 020041 (2023).

[13] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, М., 1971).

[14] Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. *Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева*, Пробл. вычисл. и прикл. матем. (2), 94–102 (2016).

[15] Данилов В.Л. и др. *Математический анализ (справочная математическая библиотека)* (Физматгиз, М., 1961).

[16] Шадиметов Х.М. *Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева* (Дисс. док. физ.-матем. наук: 01.01.07, Ташкент, 2002).

[17] Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей* (Наука, М., 1967).

[18] Hayotov A.R., Boboev S.S. *Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space*, Пробл. вычисл. и прикл. матем. **4**, 73–84 (2020).

[19] Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. *On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$*, J. Comput. Appl. Math. **372**, 112713 (2020).

[20] Jalolov O.I. *Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space*, AIP Conf. Proc. **2365** (1), 020014 (2021).

[21] Jalolov O.I. *Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space $\overline{L}_p^{(m)}(K_n)$*, AIP Conf. Proc. **2781** (1), 020066 (2023).

Икромжон Исомидинович Жалолов

Ташкентский государственный транспортный университет,
ул. Адылходжаева, д. 1, г. Ташкент, 100167, Республика Узбекистан,

`e-mail:` o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Озоджон Исомидинович Жалолов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

`e-mail:` o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Ik.I. Jalolov and O.I. Jalolov

On one algorithm for constructing the Fourier transform of the function $\overline{V}_m(x)$ to determine a discrete analog of one differential operator

Abstract. This paper considers the problem of constructing the Fourier transform of a harrow-shaped function to determine a discrete analog of the differential operator, which is used in constructing optimal quadrature formulas in L. Hörmander space. In addition, the problem of constructing a discrete analog of a specific operator in a particular case is considered.

Keywords: generalized function, Sobolev space, error functional, interpolation formula, extremal function.

Ikromjon Isomidinovich Jalolov

Tashkent State Transport University,
1 Adylkhodjaeva str., Tashkent, 100167 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Ozodjon Isomidinovich Jalolov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz